**Département de Mathématique**
**Faculté de Math. et Informatique**
**Université M. Benboulaid Batna**

**Master 1**, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs linéaires
**Matière:** Théorèmes Fondamentaux

*Espace d'opérateurs linéaires*

**Example 1** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés, $A : X \to Y$, un opérateur linéaire, on note $R(A) = \{y = Ax, \quad x \in \ X\}$ l'image de $A$, et*

*$N(A) = \{ \ \ x \in \ X, \ Ax = 0\}$, le noyau de $A$.*

*On rappelle que $R(A)$ et $N(A)$ sont des sous espaces vectoriels de $Y$ et de $X$ respectivement.*

*$A$ est borné s'il transforme toute partie bornée de $X$ en une partie bornée de $Y$, d'une manière équivalente:*

***Definition 2*** *$A : X \to Y$, un opérateur linéaire, $A$ est dit borné, s'il existe $c \succ 0$, tel que, $\forall x \in X$, on ait $\|Ax\| \leq c\|x\|$.*

*Pour $A$ borné, la quantité $\|A\| = \inf\{c \succ 0, \quad \|Ax\| \leq c\|x\|\}$ ,s'appelle norme de $A$.*

*On admet le:*

***Theorem 3*** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés, $A : X \to Y$, un opérateur linéaire, les propositions suivantes sont équivalentes:*

*1- $A$ est continu sur $X$.*

*2- $A$ est continu en un point de $X$.*

*3- $A$ est continu à l'origine de $X$.*

*4- $A$ est borné sur $X$.*

*On note aussi qu'il est possible de présenter $\|A\|$ sous l'une des formes suivantes:*

$$\begin{aligned}\|A\| &= \inf\{c \succ 0, \|Ax\| \leq c\|x\|\} \\ &= \sup_{x \neq 0}\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right\} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1}\{\|Ax\|\} \\ &= \sup_{\|x\| = 1}\{\|Ax\|\}.\end{aligned}$$

*On remarque que la somme deux opérateurs bornés est un opérateur borné, il en est de même le produit d'un opérateur borné par un scalaire, on montre que l'ensemble des opérateurs bornés de $X$ dans $Y$ est un espace vectoriel, muni de l'une des normes ainsi citées est un espace vectoriel normé, noté* $B(X,Y)$.

***Theorem 4*** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés, dont $Y$ est de Banach, alors $B(X,Y)$ est un espace de Banach.*

***Proof.*** *Soit $(A_n)$ une suite deCauchy dans $B(X,Y)$, alors pour $\varepsilon \succ 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour $p,q \geq n_0$ on ait $\|A_p - A_q\| \prec \varepsilon$, donc $\|A_p x - A_q x\| \leq \|A_p - A_q\| \|x\| \prec \varepsilon \|x\| \quad ...(*)$ , ce qui montre que $(A_n x)$ est une suite de Cauchy dans $Y$,qui est un de Banach, donc converge, on définit :*

$A : X \to Y$

$x \longmapsto Ax = \lim A_n x$

*$A$ est linéaire, borné, en effet $\|Ax\| = \lim \|A_n x\| \leq \lim \|A_n\| \|x\| \leq c\|x\|$, ($(A_n)$ est une suite de Cauchy, donc bornée, ie $\exists c \succ 0, \|A_n\| \leq c$)*

*Montrons que $A_n \to A$ dans $B(X,Y)$ ,soit $\varepsilon \succ 0, p, q \geq n_0$ alors $\|A_p - A_q\| \prec \varepsilon$ pour $\|x\| \leq 1$,par passage à la limite pour $p$ dans $(*)$, on obtient*

*$\|Ax - A_q x\| \prec \varepsilon$, donc $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_q x\| \prec \varepsilon$, ce qui donne $\|A - A_q\| \prec \varepsilon$.*

■

***Definition 5*** *On appelle forme linéaire définie sur $X$, tout opérateur linéaire défini de $X$ dans $\mathbb{K}$ , on note $B(X,\mathbb{K}) = X^*$, dit dual topologique de $X$.*

*Comme $\mathbb{K}$ est un espace de Banach, alors:*

**Corollary 6** *$X^*$ est un espace de Banach.*

***Proposition 7*** *Soient $X$ un espace de Banach, et $F$ un sous espace de $X$, alors $F$ est un espace de Banach si et seulement si $F$ est fermé.*

***Proof.*** *Supposons $F$ de Banach, si $(x_n)$ une suite convergente de $F$, alors $(x_n)$ est une suite de Cauchy dans $F$,donc converge dans $F$,donc $F$ est fermé. Réciproquement, Supposons $F$ fermé et $(x_n)$ une suite de Cauchy dans $F$, $(x_n)$ est aussi une suite deCauchy dans $X$, donc converge, or $F$ est fermé, alors sa limite est toujours dans $F$, d'où la complétude de $F$.*

*Espaces de dimension finie*

**Definition 8** *Un espace vectoriel normé $X$ est dit de dimension finie, s'il possède une base finie, on note* $\dim X \prec +\infty$.

$\mathbb{K}$ *et* $\mathbb{K}^n$ *sont des espaces vectoriels de dimensions finies, mais* $l_p$, $l_\infty$ , $L^p_{[a,b]}$, $C_{[a,b]}$, .. *sont de dimensions infinies.*

**Lemma 9** *Soient $X$ un espace de dimension finie, $(e_i)_{i=1,.,n}$ une base de $X$, alors il existe $m \succ 0$, tel que pour $n$ scalaires quelconques $(\alpha_i)_{i=1,.,n}$ , on ait* $m\sum\limits_1^n |\alpha_i| \leq \left\| \sum\limits_1^n \alpha_i e_i \right\|$.

*En se servant de ce lemme, on montre que,*

■

**Proposition 10** *Tout espace de dimension finie est complet.*

***Proof.*** *Soit $(e_i)_{i=1,.,n}$ une base de $X$, $(x_n)$ une suite de Cauchy dans $X$, alors pour $\varepsilon \succ 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour $p, q \geq n_0$ on ait $\|x_p - x_q\| \prec \varepsilon$,*

*pour* $k \in \mathbb{N}$, $\quad x_k = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_{ki} e_i$

*Par ce lemmme, $\exists m \succ 0$ tel que* $m\sum\limits_1^n |\alpha_{p_i} - \alpha_{q_i}| \leq \left\| \sum\limits_{i=1}^n (\alpha_{p_i} - \alpha_{q_i}) e_i \right\| = \|x_p - x_q\| \prec \varepsilon$,

*donc, pour $p, q \geq n_0$ on ait* $|\alpha_{p_i} - \alpha_{q_i}| \leq \frac{1}{m} \|x_p - x_q\| \prec \frac{\epsilon}{m}$,*ce qui montre que les suites $(\alpha_{pi})$ , $i = 1, ..n$ sont de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ,donc convergent, i.e.* $\exists\, (\alpha_i)_{i=1,.,n}$ *tq* $\alpha_{p_i} \to \alpha_i$ , $i = 1, ..n$, *posons* $x = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i e_i$, *alors* $x \in X$, *et*

$\|x - x_q\| = \left\| \sum\limits_{i=1}^n (\alpha_{_i} - \alpha_{q_i}) e_i \right\| \leq \sum\limits_1^n |\alpha_{_i} - \alpha_{q_i}| \, \|e_i\| \to 0$, *d'où la complétude de $X$.*

**Corollary 11** *Tout sous espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.*

*On rappelle que deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ définies sur le même espace normé sont équivalentes, s'il existe deux constantes*

$c_1 \succ 0,\ c_2 \succ 0\ tq\ c_1 \left\|.\right\|_2 \leq \left\|.\right\|_1 \leq c_2 \left\|.\right\|_2 .$

***Theorem 12*** *Toutes les normes définies sur le même espace normé de dimension finie, sont équivalentes.*

■

***Proof.*** *Soit* $\|.\|$ *une norme définie sur* $X$, $(e_i)_{i=1,.,n}$ *une base de* $X$, *on compare la norme à* $\|.\|_\infty$ .

*On a* $\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leq \sum_1^n |\alpha_i| \|e_i\| \leq \max |\alpha_i| \sum_1^n \|e_i\| = c_1 \|x\|_\infty$ ; $c_1 = \sum_1^n \|e_i\|$ .

*D'autre part* , $\exists m \succ 0$ *tel que* $\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \geq m \sum_1^n \|\alpha_i\| \geq m \max |\alpha_i| = m \|x\|_\infty$ .

*Comme corollaire, on obtient ce résultat:*

***Theorem 13*** *Tout opérateur linéaire défini sur un espace normé de dimension finie, est borné.*

***Proof.*** *Soit* $A$ *un opérateur linéaire défini sur* $X$,*on définit une nouvelle norme sur* $X$ *par* $\|x\|_1 = \|x\| + \|Ax\|$ .

$\|\|_1$ *et* $\|\|$ *sont équivalentes, donc il existe* $c \succ 0$ *tq* $\|x\|_1 \leq c\ \|x\|$ , *ce qui donne* $\|Ax\| \leq \|x\|_1 \leq c\ \|x\|$ .

■

***Theorem 14*** *Dans un d'un espace normé de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.*

***Proof.*** *Un compact est une partie fermée et bornée, on montre la réciproque:*

*Soient* $K \subset X$ *une partie fermée et bornée,* $(e_i)_{i=1,.,n}$ *une base de* $X$, $(x_k)$ *une suite de* $K$, *alors* $x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} e_i,\ \ k = 1, ..$

*Comme* $K$ *est borné, il existe* $M \succ 0$ *tq* $\|x_k\| \leq M$, $k = 1, ...$ *Par le lemme,* $\exists m \succ 0$ *tel que* $m \sum_1^n |\alpha_{k_i}| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} e_i\right\| = \|x_k\| \leq M$, *i.e.*

$|\alpha_{k_i}| \leq \frac{M}{m}$, *donc la suite de scalaires* $(\alpha_{k_i})$ , $i = 1, ..n$ *est bornée, on peut donc en extraire une sous suite* $\left(\alpha_{\phi\left(k_i\right)}\right)$ , $i = 1, ..n$, *convergente vers* $\alpha_i$, $i = 1, ..n$ : *on a donc* $\alpha_{\phi\left(k_i\right)} \rightarrow \alpha_i, \quad i = 1, ..n.$

*Pour* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, *on a* $\left\| x_{\phi(k)} - x \right\| = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \left( \alpha_{\phi\left(k_i\right)} \rightarrow \alpha_i \right) e_i \right\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \alpha_{\phi\left(k_i\right)} \rightarrow \alpha_i \right| \left\| e_i \right\| \rightarrow 0$ *quand* $\phi\left(k_i\right) \rightarrow +\infty$.

*Donc* $x_{\phi(k)} \rightarrow x$, *et comme* $K$ *est fermé,* $x \in K$, *d'où la compacité de* $K$.

***Séries dans un espace normé***

*Soient* $X$ *un espace vectoriel normé,* $(x_i)$ *une suite de* $X$, *on peut considérer la somme* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *comme limite des sommes partielles*

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. *On dit que la série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge, si* $(S_n)$ *converge, dans ce cas sa limite s'appelle somme de la série.* ■

■

**Definition 15** *La série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *est dite absolument convergente, si la série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ *est convergente.*

**Theorem 16** *Un espace vectoriel normé est de Banach, si et seulement si toute série absolument convergente, converge dans cet espace.*

***Proof.*** *Supposons* $X$ *un espace de Banach, et que* $\sum x_i$ *converge. Considérons* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$,*pour* $m \succ n$, $\|S_m - S_n\| = \left\| \sum\limits_{n+1}^{m} x_i \right\| \leq \sum\limits_{n+1}^{m} \|x_i\| \rightarrow 0$, *comme reste pour* $m, n$ *assez grands, alors* $(S_n)$ *est une suite de Cauchy, donc converge.*

*Réciproquement, soit* $(x_i)$ *une suite de Cauchy dans* $X$, *considérons une sous suite* $(x_{i_k})$ *telle que* $\left\| x_{i_{k+1}} - x_{i_k} \right\| \leq 2^{-k}$, *alors la série* $x_{i_1} + \sum\limits_{i=2}^{\infty} x_{i_k} - x_{i_{k-1}}$ *converge absolument, donc converge, or sa somme partielle est égale à* $x_{i_k}$, *d'où la convergence de* $(x_i)$, *en tant que suite de Cauchy possédant une sous suite convergente.* ■

**Proposition 17** ***Proof.***

***Theorem 18*** ***Proof.***

***Espace quotient***

*Soient $X$ un espace vectoriel normé, $F$ un sous espace vectoriel de $X$, on définit sur $X$ la relation d'équivalence:*

$x, y \in X;\qquad x\ R\ y \;\Leftrightarrow\; x - y \in F.$

*On note* $\overline{x} = \{x + F,\quad x \in X\}$ *,la classe d'équivalence de $x$, on a $\overline{0} = F$.*

*L'ensemble des classes d'équivalence est noté par $X/F$.*

*On définit sur $X/F$ les opérations:*

*1- Somme de classes* $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} = (x + y) + F$, *et*

*2- Produit par un scalaire* $\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x} = \lambda x + F.\ \ \lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x \in X$.

*Ces opérations font de $X/F$ un espace vectoriel, on va le munir d'une norme:*

■

***Theorem 19*** *Si $F$ est un sous espace vectoriel fermé de $X$, alors*

$\|\overline{x}\| = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F), \quad \forall\, x \in X,$ *est une norme sur* $X/F$.

■

**Proof.** Il est clair que $\|\overline{x}\| \geq 0,\ \ \forall\, x \in X$, et $\|\overline{x}\| = 0 \;\Leftrightarrow d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F \Leftrightarrow \overline{x} = 0.$

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in X$, $\|\lambda\overline{x}\| = d(\lambda x, F) = d(\lambda x, \lambda F) = |\lambda|\ d(x, F) = |\lambda|\, \|\overline{x}\|$.

- $\|\overline{x} + \overline{y}\| = \|\overline{x + y}\| = \inf\limits_{z_1 + z_2 \in\ F} \|x + y - (z_1 + z_2)\| \leq \inf\limits_{z_1 + z_2 \in\ F} (\|x - z_1\| + \|y - z_2\|)$

$\leq \inf\limits_{z_1 \in\ F} \|x - z_1\| + \inf\limits_{z_2 \in\ F} \|y - z_2\| = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$.

■

**Proposition 20** *Soient $X$ un espace de Banach, $F$ un sous espace vectoriel fermé de $X$, alors $X/F$ est un espace de Banach.*

**Proof.** Soit $\sum x_i$ une série absolument convergente dans $X/F$, d'après la définition de la borne inferieure, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, on choisit $y_i$ de façon que $\|x_i - y_i\| \leq \|\overline{x}_i\| + 2^{-i}$, donc $\sum \|x_i - y_i\| \leq \sum \|\overline{x}_i\| + \sum 2^{-i}$, le terme à droite est convergent, ce qui exige la convergence de $\sum x_i - y_i \to z$,

montrons que $\sum \overline{x}_i \to \overline{z}$.

Soit $i \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i - \overline{z} \right\| = \left\| \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i - z} \right\| = \inf_{y \in F} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \overline{z} - y \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \overline{z} - \sum_{i=1}^{n} y_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) - \overline{z} \right\|$, on passe à la limite, car $\sum x_i - y_i \to z$, donc toute série absolument convergente dans $X/F$, converge, alors $X/F$ est unespace de Banach.

**Proposition 21** *Soient $X$ un espace vectoriel normé, $F$ un sous espace vectoriel fermé de $X$, alors*

$$\pi : X \to X/F$$
$$x \mapsto \overline{x}$$

*est un opérateur linéaire borné , ouvert et tq* $\|\pi\| \leq 1$ .

***Proof.***

*$\pi$ est linéaire, pour $x \in X$, $\|\pi x\| = \|\overline{x}\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| \leq \|x\|$, donc $\pi$ est borné et $\|\pi\| \leq 1$ .*

*On rappelle qu'un opérateur est ouvert, s'il transforme tout ouvret de $X$ en un ouvert, pour cela, il suffit de montrer que*

$\pi (B(0,1))_X = B(0,1)_{X/F}$ .

***Proposition 22*** *Comme $\|\pi x\| \leq \|x\|$, alors $\pi (B(0,1))_X \subset B(0,1)_{X/F}$, d'autre part, soit $\overline{x} \in X/F$ tq $\|\overline{x}\| \leq 1$, alors $\exists\ y \in F$ tq $\|x - y\| \leq 1$, avec $\overline{x} = \pi(x - y)$, soit $z = x - y$, on a montré que, $\overline{x} = \pi(z)$ et $z \in (B(0,1))_X$ .*

***Proposition 23*** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés, $A \in B(X, Y)$ .*

*Soit*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & R(A) \\ & X/N(A) \arrow[ur, "\widetilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

*Alors* $\widetilde{A} : X/N(A) \to R(A)$

$\widetilde{A}\ \pi x = Ax$ *est borné et* $\left\| \widetilde{A} \right\| = \|A\|$ .

■

***Proof.*** *On a,* $\left\| \widetilde{A}\overline{x} \right\| = \left\| \widetilde{A}\pi x \right\| = \|Ax\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|, \quad \forall\ y \in N(A)$ .

*Donc* $\left\| \widetilde{A}\overline{x} \right\| \leq \inf_{y \in N(A)} \|A\| \|x - y\|, \quad \forall\ x \in N(A)$ ; *d'où*

$\left\|\widetilde{A}\overline{x}\right\| \leq \|A\| \|\overline{x}\|$, *ce qui montre que* $\widetilde{A}$ *est borné et* $\left\|\widetilde{A}\right\| \leq \|A\|$,
*mais*
$\|Ax\| = \left\|\widetilde{A}\pi x\right\| \leq \left\|\widetilde{A}\right\| \|\pi x\| \leq \left\|\widetilde{A}\right\| \|x\|$ , $\quad (\|\pi\| \leq 1)$,
*d'où* $\|A\| \leq \left\|\widetilde{A}\right\|$.

***Formes linéaires bornées***

*On rappelle qu'une forme linéaire* $f$ *est un opérateur linéaire défini de* $X$ *dans* $\mathbb{K}$ , *on note* $B(X, \mathbb{K}) = X^*$, *et que* $X^*$ *est un espace de Banach, le noyau d'une forme linéaire s'appelle hyperplan, c'est sous espace de* $X$ *de codimension 1, c'est à dire si* $H = N(f)$, *alors* $X = H \oplus F$, *avec* $\dim F = 1$, *un sous espace de codimension 1 est de la forme* $\mathbb{K}x_0$, $0 \neq x_0 \notin H$.

*Un hyperplan est un sous espace maximal de* $X$, *c'est à dire, si* $G \neq X$ *est tq* $H \subset G$, *alors* $H = G$.

**Theorem 24** *Pour que* $H$ *soit fermé, il faut et il siffit que* $f$ *soit bornée.*

■
***Proof.*** *Si* $f$ *est bornée, alors* $H = N(f)$ *est fermé.*
*Supposons maintenant que* $H = N(f)$ *est fermé, d'après la factorisation*

$$\begin{array}{lcccc} f: & X & & \rightarrow & R(f) \\ \pi & & \searrow & \nearrow & \widetilde{f} \\ & & X/N(f) & & \end{array}$$

*Si* $f \neq 0$, *alors* $\dim X/N(f) = \dim R(f) = 1$, *donc* $\widetilde{f}$ *est bornée, comme opérateur défini sur un espace de dimension finie, ce qui montre que* $f$ *est aussi bornée.*

■

**Corollary 25** *Un hyperplan, est fermé ou partout dense.*

***Proof.*** *Comme* $H$ *est maximal, et* $H \subset \overline{H}$ , *alors* $H = \overline{H}$, *c'est à dire* $H$ *est fermé, ou bien* $\overline{H} = X$,*c'est à dire* $H$ *est partout dense.*

***Théorème de Hahn -Banach***

*Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit inductif , si toute partie de cet ensemble, totalement ordonnée, est majorée.*

***Lemma 26 Lemme de Zorn***

*Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.*

*On appelle semi-norme, une application* $p : X \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant:*
*1-* $p(x) \geq 0$, $\forall x \in X.\forall$
*2-* $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$
*3-* $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X.$
*Une norme est une semi-norme telle que* $p(x) = 0$ *ssi* $x = 0$.

*Le Théorème de Hahn -Banach a pour objet le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous espace vectoriel à l'espace tout entier en concervant ses proprietés (continuité, norme,..).*

■

■

**Theorem 27** ***(Théorème de Hahn -Banach, forme algebrique)***
*Soient* $X$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$, $p$ *une semi-norme définie sur* $X$, $F_0$ *un sous espace vectoriel de* $X$, *sur lequel est définie une forme linéaire* $f_0$, *vérifiant* $\forall x \in F_0, \quad |f_0(x)| \leq p(x),$ *alors* $\exists\ f : X \to \mathbb{R}$ *tq* $f(x) = f_0(x)$ *sur* $F$, *et* $|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$

***Proof.*** *Soit* $0 \neq x_1 \notin F_0$, *notons* $F_1 = \{\lambda x_1 + x, \quad x \in F_0\}$, $F_1$ *est un sous espace vectoriel de* $X$, *contenant* $F_0$, *construisons sur* $F_1$ *la forme linéaire* $f_1 : \ f_1(\lambda x_1 + x) = \lambda f_1(x_1) + f_0(x)$, *posons* $c = f_1(x_1)$, $c$ *doit vérifier* $f_1(\lambda x_1 + x) \leq p(\lambda x_1 + x)$, *oi bien* $\lambda c + f_0(x) \leq p(\lambda x_1 + x)$, $\forall x \in F_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

*On a pour* $\lambda \succ 0, \qquad c \leq p(x_1 + x/\lambda) - f_0(x/\lambda).$

*Et pour* $\lambda \prec 0, \qquad -p(-x_1 - x/\lambda) + f_0(-x/\lambda) \leq c.$

*Pour montrer l'existence de c vérifiant les deux proprietés précédentes, on choisit* $y_1$*et* $y_2$ *de* $F_0$, *alors*

$f_0(y_1) + f_0(y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - x_1) + p(y_2 + x_1)$, *ou bien*

$$-p(y_1 - x_1) + f_0(y_1) \leq p(y_2 + x_1) - f_0(y_2)$$

*Posons* $\quad c' = \sup_{y_1 \in F_0} \left[ -p(y_1 - x_1) + f_0(y_1) \right]$
$\quad c'' = \inf_{y_1 \in F_0} \left[ p(y_1 - x_1) + p(y_2 + x_1) \right]$

*On a* $c' \leq c''$, *or* $c' \leq c \leq c''$, *on remarque que* $f_1(\lambda x_1 + x) \leq p(\lambda x_1 + x)$ *sur* $F_1$, *on continue par définir* $F_2 = \{\lambda x_1 + x, \quad x \in F_1\}$, *puis* $F_k = \{\lambda x_1 + x, \quad x \in F_{k-1}\}$ *pour* $k \geq 3$, *on obtient ainsi une suite* $(F_k)$ *ordonnée au sens de l'inclusion,* $X = \cup F_k$, *par le lemme de Zorn, on conclue que* $f_0$ *est prolongeable sur tout* $X$, *en une forme lineare* $f$, *respectant* $|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X$.

***Theorem 28 (Théorème de Hahn -Banach, espace normé)***

*Soient* $X$ *un espace vectoriel normé,* $f_0$ *une forme linéaire bornée définie sur un sous espace vectoriel* $F_0$ *de* $X$, *alors il existe une forme linéaire* $f$ *prolongeant* $f_0$ *sur* $X$, *telle que* $\|f_0\| = \|f\|$.

***Proof.*** *Notons* $p(x) = \|f_0\| \|x\|$, $\forall x \in X$, *alors* $p$ *est une semi-norme tq* $|f_0(x)| \leq p(x), \forall x \in X$, *d'après le Th. de Hahn -Banach, il existe une forme linéaire* $f$ *prolongeant* $f_0$ *sur* $X$, *tq* $|f(x)| \leq p(x) = \|f_0\| \|x\|$, *donc* $f$ *est bornée et* $\|f\| \leq \|f_0\|$, *et comme* $f$ *est une extension de* $f_0$, *alors* $\|f\| \geq \|f_0\|$, *d'où* $\|f_0\| = \|f\|$.

***Conséquences:***

*1- Soit* $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, *alors, il existe une forme linéaire bornée* $f$ *sur* $X$, *tq* $f(x_0) = \|x_0\|$ *et* $\|f\| = 1$.

■

***Proof.*** *Soit* $F = \langle x_0 \rangle$ *le sois e.v. engendré par* $\{x_0\}$, *les éléments de* $F$ *sont de la forme* $\lambda x_0$; $\lambda \in \mathbb{R}$, *pour*

$x = \lambda x_0 \in F$, *on note* $f_0(x) = \lambda \|x_0\|$, *on a* $f_0(x_0) = \|x_0\|$, *il est clair que* $f_0$ *est bornée, et* $\|f_0\| = 1$,*d'après le Th. de Hahn -Banach, il existe une forme linéaire bornée* $f$, *définie sur* $X$ *tq* $f(x_0) = \|x_0\|$ *et* $\|f\| = 1$.

*2- Les formes linéaires bornées séparent les points de* $X$, *i.e si* $x_1 \neq x_2$, *alors, il existe une forme linéaire bornée* $f$ *sur* $X$, *tq* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

■

***Proof.*** *Soit* $x_0 = x_1 - x_2$, *alors* $x_0 \neq 0$, *d'après la conséquence 1, il existe une forme linéaire bornée* $f$, *tq* $f(x_0) = f(x_1) - f(x_2) = \|x_0\| \neq 0$.

*3- Soient* $F$ *un sous espace de* $X$, $0 \neq x_0 \notin \overline{F}$, *alors* $\exists\ f \in X^*$ *tq* $f = 0$ *sur* $F$ *et* $f(x_0) \neq 0$.

■

***Proof.*** *Soit* $F_0 = [y = \lambda x_0 + x,\ x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}]$, *notons* $f_0(y) = \lambda$, $f_0$ *est une forme linéaire,* $f_0(x_0) = 1$ *et* $f_0(x) = 0$ *pour tout* $x \in F$. *Montrons que* $f_0$ *est bornée:*

*Comme* $x_0 \notin \overline{F}$, $\exists\ r \succ 0$ *tq* $B(x,r) \cap F = \Phi$, *donc* $\forall\ x \in F$, $\|x - x_0\| \geq r \succ 0 \Rightarrow \|y\| = \|\lambda x_0 + x\| =$

$|\lambda| \|(-x/\lambda) - x_0\| \geq |\lambda| r$ *car* $x/\lambda \in F$, *on a montré que* $|\lambda| = |f_0(y)| \leq 1/r\ \|y\|$, $f_0$ *est donc bornée, par*

*le Th. de Hahn -Banach, il existe une forme linéaire bornée* $f$, *définie sur* $X$ *tq* $f = 0$ *sur* $F$ *et* $f(x_0) \neq 0$.

***(Théorème de Hahn -Banach, forme géomètrique)***

■

***Definition 29*** *Soit* $C$ *un ouvert convexe de* $X$, *contenant l'origine, on appelle* ***jauge*** *de* $C$, *l'application*

***Proof.*** $p : X \to \mathbb{R}_+$

$p(x) = \inf[t \succ 0,\ x/t\ \in C]$

*On note* $\inf \Phi = +\infty$.

$p$ *est appelée aussi fonction de Minkowski.*

■

***Proposition 30*** *La fonction* $p$ *possède les proprietés suivantes:*

*1-* $p(tx) = tp(x),\ \forall\ x \in X \quad \forall\ t \succ 0.$

*2-* $p(x+y) \leq p(x) + p(y),\quad \forall\ x, y \in X.$

*3-* $\exists\ M \succ 0$ *tq* $0 \leq p(x) \leq M\|x\|.$

*4-* $p(x) \prec 1 \Leftrightarrow x \in C.$

■

***Proof.*** *3) Comme* $C$ *est ouvert,* $0 \in C$, *alors il existe* $r \succ 0$ *tq* $B(0,r) \subset C$. *Pour* $x \neq 0$; $\frac{x}{\|x\|}\frac{r}{2} \in B(0,r) \subset C$, *donc* $p(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|.$

*4) Soit* $x \in C$, *et Comme* $C$ *est ouvert,il existe* $\epsilon \succ 0$ *tq* $(1+\epsilon)x \in C$, *donc* $p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} \prec 1$.

*Supposons que* $p(x) \prec 1$, *donc* $\exists\ \alpha \prec 1$ *tq* $\frac{x}{\alpha} \in C$, *ce qui donne, en utilisant la convexité de* $C$, $\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)\,0 = x \in C$.

***Lemma 31*** *Soit* $C$ *un ouvert convexe,* $x_0 \in X$ *tq* $x_0 \notin C$, *alors il existe une forme linéaire bornée* $f$ *tq*

$f(x) \prec f(x_0) \quad \forall x \in C.$

■

***Proof.*** *On fait translater $C$ de façon à avoir $0 \in C$, on définit*

$f_0 : \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$f_0(tx_0) = t$

*On a $f_0(x) \leq p(x)$ la jauge de $C$, en effet si $t \geq 0$, $p(x) = p(tx_0) = tp(x_0) \geq t$, car $p(x_0) \geq 1$.*

*Si $t \leq 0$, $f_0(tx_0) = t \leq p(tx_0)$ .Par le Th. de Hahn -Banach, il existe une forme linéaire bornée $f$, définie sur $X$ tq $f(x_0) = f_0(x_0) = 1$, mais pour $x \in C$,on a $f(x) \leq p(x) \prec 1$.*

***Definition 32*** *On dit que l'hyperplan $(f = \alpha)$ sépare les ensembles $V$ et $W$ dans $X$, si*

*$\forall x \in V$, on a $f(x) \leq \alpha$, et $\forall x \in W$ on a $f(x) \geq \alpha$.*

■

**Theorem 33** *Soient $V$ et $W$ deux convexes non vides, disjoints de $X$, on suppose $V$ ouvert, alors il existe un hyperplan fermé séparant $V$ et $W$.*

**Proof.** Posons $C = V - W = \underset{y \in W}{\cup} (v - y)$, alors $C$ est un ouvert tq $0 \notin C$, car $V$ et $W$ sont disjoints, par le lemme, $\exists$ $f$ bornée tq $f(x) \prec f(0) = 0$, $\forall x \in C$, donc $\forall x \in V, \forall y \in W$, $f(x - y) = f(x) - f(y) \prec 0$, on obtient donc

$\sup\limits_{x \in V} f(x) \leq \inf\limits_{y \in W} f(y)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$, $\forall x \in V, \forall y \in W$. ■