Rang de matrices

Pour quoi le rang d'une matrice ?

Considérons le système linéaire $Ax = b$, avant de procéder à la résolution du système donné par la matrice A, une question pertinente est posée sur le **rang** de A.

On rappelle que si A est carrée d'ordre n,telle que $rg(A) = n$; alors A est inversible, et si A est de type $m \times n$ et que $rg(A) = n$, alors A représente une injection, d'autre part si $rg(A) = m$, alors A représente une surjection, mais ce n'est pas tout!

On rappelle que le rang de la matrice A, est la dimension de l'image de A,et comme les colonnes d'une matrice est une partie génératrice de $R(A)$,c'est donc le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants de cette matrice.

Considérons A comme application linéaire d'un espace vectoriel X de dimension n dans un espace vectoriel Y de dimension m.

On commence par donner les proprietés fondamentales du rang.

On a quelques relations directes:

Proposition:

Si A est de type $m \times n$, alors $rg(A) \leq \min(m, n)$.

Preuve:

On sait que $rg(A) = \dim R(A) \leq \dim X = n$, et comme $R(A) \subset Y$, alors $rg(A) \leq \dim Y = m$.

On a le théorème fondamental:

Théorème:

Si A est une matrice de type $m \times n$, alors

$$n = \dim N(A) + rg(A)$$

Cette formule s'appelle la formule du rang.

Preuve:

Soit F un sous espace supplémentaire de $N(A)$ dans X, A est injective sur F, donc

$\dim F = \dim A\,(F) = \dim R(A) = rg(A)$; ce qui donne

$n = \dim F + \dim N(A) = rg(A) + \dim N(A)$.

Corollaire:

On a $rg(A) = rg(A^t) = rg(A^*)$

Preuve:
Montrons que $rg(A) = rg(A^*)$.
Du fait que $N(A)^\perp = R(A^*)$, et
$\dim N(A)^\perp = n - \dim N(A)$, alors
$rg(A^*) = n - \dim N(A) = rg(A)$.

Une conséquence directe de la formule du rang est:

Proposition:
Soit A est de type $m \times n$ alors $rg(A) = n$ si et seulement si A représente une injection.
Preuve:
Dans la formule du rang, on obtient $rg(A) = n$ ssi $N(A) = \{0\}$.

Le résultat dual est le suivant:

Proposition:
Soit A est de type $m \times n$ alors $rg(A) = m$, si et seulement si A représente une surjection.
Preuve:
A est de type $m \times n$ alors $rg(A) = m$, A^t est de type $n \times m$ et $rg(A^t) = m$, on applique la proposition précédente, on obtient
$N(A^t) = \{0\}$ ce qui équivaut la surjectivité de A.

On a le

Corollaire:
Soit A est matrice carrée d'ordre n, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
1- $rg(A) = n$
2- A est une injection
3- A est une surjection
4- A est une bijection

Proposition:
Pour les matrices A et B telles que le produit AB soit défini,on a
$rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

Preuve:
On a $R(AB) \subset R(A)$, donc $rg(AB) \leq rg(A)$,on utilise cette inégalité dans ce qui suit:
$rg(AB) = rg(AB)^t = rg(B^t A^t) \leq rg(B^t) = rg(B)$,donc

$$rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$$

Corollaire:

Si P et Q sont des matrices inversibles de types appropriés, alors $rg(PA) = rg(AQ) = rg(A)$.

En particulier, deux matrices équivalentes ont même rang.

En terme d'égalité, on a :

Théorème (Sylvester) :

Pour les matrices A et B telles que le produit AB soit défini,on a $rg(AB) = rg(B) - \dim(R(B) \cap N(A))$

Preuve:

On considère l'opérateur AB comme $\widetilde{A}$ linéaire agissant sur $R(B)$,c'est à dire $R(AB) = R(\widetilde{A})$ et $N(\widetilde{A}) = R(B) \cap N(A)$,

et de $\dim R(B) = rg(\widetilde{A}) + \dim N(\widetilde{A})$,on obtient :

$rg(B) = rg(AB) + \dim(R(B) \cap N(A))$.

Une matrice A de type $m \times n$ est dite de rang complet si $rg(A) = m$ ou $rg(A) = n$.

Si $rg(A) = n$, alors A est injective, donc inversible à gauche, et si $rg(A) = m$, alors A est surjective, donc inversible à droite.

Proposition:

Soit une matrice A de type $m \times n$ et telle que $rg(A) = n$,alors pour toute matrice B telle que le produit AB soit défini,on a

$rg(AB) = rg(B)$.

Preuve:

$rg(A) = n$, donc A est injective, ce qui donne $N(A) = \{0\}$, donc $R(B) \cap N(A) = \{0\}$, et d'après la formule de Sylvester,

$rg(B) = rg(AB)$.

Corollaire:

Soit une matrice A de type $m \times n$ et telle que $rg(A) = m$,alors pour toute matrice B telle que le produit BA soit défini,on a

$rg(BA) = rg(B)$.

Preuve:

Du corollaire précédent, $rg(A^t) = n$, donc $rg(BA) = rg(BA)^t = rg(A^tB^t) = rg(B^t) = rg(B)$.

En terme d'inégalité, le théorème de Sylvester admet la fomulation suivante:

Corollaire:

Soient une matrice A de type $m \times n, B$ une matrice telle que le produit AB soit défini, alors

$rg(A) + rg(B) \leq rg(AB)$

Preuve:

Par le théorème de Sylvester, on a

$rg(B) = rg(AB) + \dim (R(B) \cap N(A))$, or $R(B) \cap N(A) \subset N(A)$ c'est à dire $\dim R(B) \cap N(A) \leq \dim N(A)$, donc

$rg(A) + \dim (R(B) \cap N(A)) \leq n$,ce qui donne

$rg(B) + rg(A) = rg(A) + \dim (R(B) \cap N(A)) + rg(AB) \leq n + rg(AB).$

Dans ce qui suit, on va considérer les formules concernant des matrices partitionnées.

Proposition:

Si A et B ont le même nombre de lignes, alors

$rg \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$

Preuve:

$R \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A et B ensembles, donc

$rg \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \dim R(A) + \dim R(B) - \dim (R(A) \cap R(B)) \leq rg(A) + rg(B).$

On a le

Corollaire:

Si A et B ont le même nombre de colonnes, alors

$rg \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$

Preuve:

On a

$rg \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^t = rg \begin{pmatrix} A^t & B^t \end{pmatrix} \leq rg(A^t) + rg(B^t) = rg(A) + rg(B)$

Corollaire:

Pour A et B de même type, on a

$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$$
$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$$

Preuve:
On remarque que:
$A+B = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et que
$A+B = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$ d'où les inégalités

$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \qquad \text{et}$$
$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Proposition:
Pour les matrices A et B , on a

$$rg\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = rg(A) + rg(B)$$

Preuve:
On remarque que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, il suffit de le montrer pour l'une d'elles.
Et comme $rg\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = rg(X)$,alors
$rg\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg(A) + rg(B) - \dim\left(R\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \cap R\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right)$
Or $R\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \cap R\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} = \{0\}$, car un élément de l'intersection est de la forme $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, où les vacteurs v et w doivent être nuls.

On admet le résultat suivant, concernant une matrice partitionnée triangulaire (sup. ou inf.):

Proposition:

$$rg\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .. & .. & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & 0 & A_{nn} \end{pmatrix} \geq rg(A_{11}) + rg(A_{22}) + ... + rg(A_{nn}).$$

On s'intereesse au cas particulier:

$rg\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & X \end{pmatrix} \geq rg(A) + rg(B)$ et cela pour toute matrice X de type approprié.

On utilise ce résultat pour montrer :

Théorème (Sylvester) :
Pour les matrices A, B et C telles que le produit ABC soit défini,on a $rg(ABC) \geq rg(AB) + rg(BC) - rg(B)$.

Preuve:
On applique les opérations élémentaires sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_1 - AL_2} \begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ BC & B \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_1 - C_2C} \begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

On a donc

$$rg\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg(ABC) + rg(B)$$

Mais $rg\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \geq rg(AB) + rg(BC)$ on obtient:

$$rg(AB) + rg(BC) \geq rg(ABC) + rg(B).$$

On donne ici un résultat concernant les systèmes linéaires:

Le système suivant:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
....
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_n$

Est exprimé sous la forme matricielle $Ax = b$, ou bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est dit consistent s'il admet au moins une solution.

Le système $Ax = 0$ est consistent. On donne les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'un système soit consistent.

Théorème:

Considérons le système $Ax = b$, alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1- Le système $Ax = b$ est consistent

2- $b \in R(A)$

3- $rg(A \;\; b) = rg(A)$.

Preuve:

1)$\Leftrightarrow$ 2) Si Le système $Ax = b$ est consistent, équivaut l' existence de x_0 tel que $Ax_0 = b$; $b \in R(A)$.

2)$\Rightarrow$ 3) Comme $b \in R(A)$, alors $R(A \;\; b) \subset R(A)$, donc $rg(A \;\; b) \leq rg(A)$, mais $rg(A \;\; b) \geq rg(A)$, ce qui donne égalité.

3)$\Rightarrow$ 1) $rg(A \;\; b) = rg(A)$ montre que $R(A \;\; b) = R(A)$, donc $b \in R(A)$