SEMESTRE	Intitulé de la matière		Coefficient	Code
S1	Algèbre 1		5	ALG-1
VHH	Cours	Travaux dirigés	Travaux Pratiques	
67h30	3h00	1h30	-	

Pré requis :

Notions de base des mathématiques des classes Terminales (ensembles, fonctions, équations, ...).

Objectifs de l'enseignement

Cette première matière d'Algèbre I est notamment consacrée à l'homogénéisation des connaissances des étudiants à l'entrée de l'université. Les premiers éléments nouveaux sont enseignés de manière progressive afin de conduire les étudiants vers les mathématiques plus avancées. Les notions abordées dans cette matière sont fondamentales et parmi les plus utilisées dans le domaine des Sciences et Technologies. Notions de logique mathématique.

Contenu de la matière: Ch 0 : Rappel : Les méthode de Raisonnement mathématique

Chapitre 1. Les ensembles, les relations et les applications (5 semaines)

1. Théorie des ensembles.
2. Relation d'ordre, Relations d'équivalence.
3. Application injective, surjective, bijective et fonction réciproque: définition d'une application, image directe, image réciproque, caractéristique d'une application.

Chapitre 2 : Les nombres complexes

1. Définition d'un nombre complexe.
2. Représentation d'un nombre complexe : Représentation algébrique, représentation trigonométrique, représentation géométrique, représentation exponentielle.
3. Racines d'un nombre complexe : racines carrées, résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, racines nième d'un nombre complexe.

Chapitre 3 : Espace vectoriel

1. Espace vectoriel, base, dimension (définitions et propriétés élémentaires).
2. Application linéaire, noyau, image, rang.

Notions de Logique mathématique : La 1ère Partie qu'on va faire Concerne :

1-1. Assertion (ou Proposition Logique) :

Exp 2 est un nbre paire. Vraie

Defof: Une assertion est une Phrase soit vraie, soit fausse.

Par exemple : $2+3=5$. est une assertion vraie.

$\forall x \in \mathbb{R}$. on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie

3 est supérieur à 6 est une assertion fausse.

> Définition : Toute proposition démontrée vraie est appelée : Théorème par exo (Thé de Thalès.....)

Etant donné deux Proposition P et Q, Alors :

1-2. Opérations sur les Propositions :

1-2-1 La Conjonction logique (et) :

La Proposition P et Q notée $(P \wedge Q)$ est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion $P \wedge Q$ est fausse sinon. On résume ceci sur une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarque :
$P \wedge P \Leftrightarrow P$
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

exemple : ① $1+2=3$ et $3\times1=3$, est une Ass Vraie.
② $\sqrt{(-5)^2}=5$ et $|-4|=-4$ " " fausse.

1-2-2. La disjonction Logique (ou)

La Proposition P ou Q notée $(P \vee Q)$ est Vraie si l'une au moins des propositions est Vraie, c.à.d P vraie ou Q vraie.

.. L'assertion $P \vee Q$ est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque :
$P \vee P \Leftrightarrow P$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

exemple : ① $1+2=3$ ou $3\times1=3$. est une assertion Vraie.
② $\frac{-7}{2} \geq 0$ ou $(-4)^2=16$ " " "
③ $5<3$ ou $1<0$ " " fausse

1-2-3 La négation Logique (non P ou $\overline{P}$) :

(non P est le Contraire de P)

L'assertion $\overline{P}$ est Vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

exemple : La négation de l'assertion $2 \geq 0$ est l'assertion $2<0$
" " " " $x+3=1$ " $x+3 \neq 1$

— Règle : pour établir la négation d'une Proposition on remplacera :

$\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$; $=$ par $\neq$; $\in$ par $\notin$
et par ou et ou par et ; $\geq$ par $<$; $>$ par $\leq$;
Ainsi les expression par leur négations.

$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$; $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$

$\overline{\forall, P(x)} \Leftrightarrow \exists, \overline{P(x)}$; $\overline{\exists, P(x)} \Leftrightarrow \forall, \overline{P(x)}$

Remarque
$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$

Autres exemples

① $\underbrace{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}_{V}$ et $\underbrace{|-5| \neq 5}_{F}$ Fausse

Sa négation : $\underbrace{\sqrt{2} \in \mathbb{Q}}_{F}$ ou $\underbrace{|-5| = 5}_{V}$ → Vraie

②

$\underbrace{\sqrt{(-5)^2} = -5}_{F}$ ou $\underbrace{\sqrt{2+3} = \sqrt{2} + \sqrt{5}}_{F}$ Fausse

$\underbrace{\sqrt{(-5)^2} \neq -5}_{V}$ et $\underbrace{\sqrt{2+3} \neq \sqrt{2} + \sqrt{5}}_{V}$ Vraie

Propriétés

① Si $a, b \geq 0$ alors $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$

② Si $a \geq 0$, $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ mais : $\forall a, b > 0$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

$\sqrt{25} = 5 \qquad 3 + 4 = 7$

1-2-4. L'implication Logique : ($\Rightarrow$) la définition mathématique est la suivante : L'assertion ($\bar{P} \vee Q$) est notée $P \Rightarrow Q$, on dit P implique Q ou bien Si P alors Q

$P \Rightarrow Q$ est fausse dans le seul cas (P est vraie et Q est fausse),

Sinon ($P \Rightarrow Q$) est vraie dans les autres cas.

P	$\bar{P}$	Q	$\bar{P} \vee Q$ ($P \Rightarrow Q$)
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

Si P est vraie, que doit l'être obligatoirement Q est vraie.

Il est impossible de commencer, correct et trouver l'erreur.

Le faux peut donnée le faux ou le vraie.

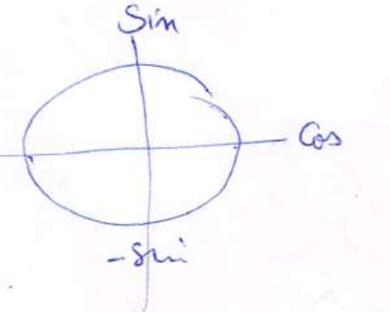
$\boxed{\text{On a : } \overline{P \Rightarrow Q} = \overline{\bar{P} \vee Q} = \bar{\bar{P}} \wedge \bar{Q} = P \wedge \bar{Q}}$

Exemples :

① Si $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ est vraie ?

On prend la racine carrée : $\sqrt{0} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{25} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 5 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$.

② Si $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ est fausse ?



fausse puisque : pour tout $K \in \mathbb{Z}$, on a $\sin(K\pi) = 0$

donc $\theta = K\pi$ pas 0.

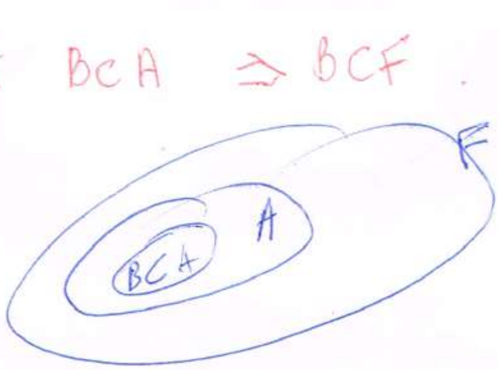
③ Si $\underbrace{3<2 \text{ et } 1<5}_{\text{faux}} \Rightarrow \underbrace{4<7}_{\text{vraie}}$ vraie ?

On prend la somme, on trouve $3+1 < 2+5 \Rightarrow 4<7$. donc la propriété $P \Rightarrow Q$ est vraie

④ Si $\underbrace{1>3 \text{ et } 1>4}_{\text{faux}} \Rightarrow \underbrace{2>7}_{\text{faux}}$ est vraie ?

on prend la somme : $1+1 > 3+4 \Rightarrow 2>7$; la propriété $P \Rightarrow Q$ est vraie.

⑤ Si $A \subset F$ et $B \subset A \Rightarrow B \subset F$.



1-2-5- L'équivalence logique : $(\Leftrightarrow)$: $P \Leftrightarrow Q$ est l'assertion $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
on dira P est équivalent à Q, notée $(P \Leftrightarrow Q)$. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.

la table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

exemple :

① $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $x \cdot x' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x' = 0$ - vraie

② A, B, E trois ensembles.

$$\begin{matrix} A \subset F \\ B \subset F \end{matrix} \text{ et } A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

③ $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Les quantificateurs :

$\forall$ (Quantificateur universel) مكمم كلي

① $\forall$: pour tout (quelque soit)

$\forall x \in E, P(x)$: pour tout x appartient à l'ensemble E, P(x) est vraie. { Tout les éléments de E vérifiant P(x)

Exemple $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > 0$.

($\exists$: Quantificateur existensiel) مكمم وجودي

$\exists x, P(x)$

② $\exists$: Il existe au moins :

par exemple : $\exists x \in E, x + 1 = 0$. il existe au moins un élément de l'ensemble E vérifier cette équation.

③ $\exists!$ il existe un unique

$\exists! x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 0$

$$x = \begin{cases} -1 \notin \mathbb{N} \\ 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Chapitre 1 : Méthodes du raisonnement mathématique :

Il éxiste plusieurs types de raisonnements ; tout d'abord on commence par le plus classique :

I-1. Raisonnement directe :

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie, et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple : Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $a+b \in \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels

Réponse : Prenons $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$; Alors.

$a = \frac{p}{q}$; et $b = \frac{p'}{q'}$.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs) الصحيحة النسبية.

$\mathbb{Z}^*$ " " " " relatif sauf 0.

$p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{Z}^*$

On écrit alors $a+b$ comme la somme de deux fractions que l'on revien même dénominateur,

$$a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{q \cdot q'}$$

, or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{Z}^*$.

Donc $a+b$ s'écrit sous la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{Z}^*$ Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

I-2 Raisonnement par contraposition :

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est équivalente à non $Q \Rightarrow$ non P ; Donc pour montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$, on suppose que non Q est vraie, et on montre qu'alors non P est vraie.

Exemple Soient x et y deux nombres réels, Démontrons que.

Si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

- Par contraposition. $\underbrace{(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)}_{*} \Rightarrow x = y \quad (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

Supposons que l'égalité * est vraie. c.à.d : *

on developpons, on trouve alors

5

$$\cancel{xy} - x + y \cancel{-1} = \cancel{xy} + x - y \cancel{-1} \Rightarrow -x + y = x - y$$

$$\Rightarrow -x + y - x + y = 0 \Rightarrow -2x + 2y = 0 \Rightarrow -2(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Par contraposition, si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

I-3. Raisonnement par l'absurde :

Pour démontrer l'assertion $(P \Rightarrow Q)$, on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse, et on cherche une contradiction.

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde que :

$\forall a, b \geq 0,$

Si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ Alors $a = b$

Démonstration : Nous raisonnons par l'absurde, en supposant :

$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et que $a \neq b$ et obtenons une <u>contradiction</u> :

Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a(1+a) = b(1+b)$

$\Rightarrow a + a^2 = b + b^2$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = b - a$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$, on divisant par $a-b$, on obtient :

$a + b = -1$. Mais $a, b \geq 0$. Leurs somme ne peut donné un nbre négatif.

On obtient donc la contradiction recherché.

Conclusion : On a bien montrer que si

$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ Alors $a = b$.

I-4 - Raisonnement par contre-exemple :

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type : $\forall x \in E$, $P(x)$ est vraie, par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver x.

$\exists x \in E$, non $P(x)$ est fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un contre exemple à l'assertion $[\forall x \in E, P(x)]$

Exemple : Montrons que :

$\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 1 \neq 0$. est fausse.

Par contre exemple : $\exists x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 1 = 0$. est vraie.

Prenons $x = 1$ donc $1^2 - 1 = 0$. c.à.d le contre exemple est 1

D'où l'assertion n'est pas vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I-5- Raisonnement Par récurence :

Le Principe de récurence Permet de montrer qu'une assertion $P(n)$. dépend de n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration Par récurence se déroule en deux étapes :

① Initialisation : on Prouve que l'assertion est vraie Pour $n=0$. $P(0)$ est vraie.

② On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ donné, $P(n)$ est vraie ; et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Enfin, dans la Conclusion. On rappelle que Par le principe de récurence $P(n)$ est vraie Pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Démonstration :

condition initiale : Pour $n=0$, on a $2^0 = 1 \geq 0$. c.à.d $P(0)$ est vraie.

Condition final : On suppose que $P(n)$ est vraie. c.à.d $2^n \geq n$, et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ ($2^{n+1} \geq n+1$) est vraie.

On a : $2^{n+1} = 2^n . 2$

$= 2^n + 2^n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n \geq n$ (Par hypothèse.)

$\Rightarrow 2^{n+1} \geq n + 2^n$. et Puisque : $2^n \geq 1$

$$\begin{cases} n=0 & 2^0 = 1 \\ n=1, & 2^1 = 2 \\ n=2, & 2^2 = 4 \\ \text{alors } 2^n \geq 1, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors $2^{n+1} \geq n+1$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi $P(n)$ est vraie. ($\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$).

fin