# CHAPITRE I

# LOIS DE L'ELECTROMAGNETISME - EQUATIONS DE MAXWELL

## I.1. INTRODUCTION

Avant le génie de James Clerk Maxwell (physicien et scientifique écossais : 1831-1879), les phénomènes électriques et magnétiques étaient séparés et décrits par des théories distinctes. Maxwell, à travers 04 équations fondamentales dites " **les équations de Maxwell**", réunit sous une même théorie l'ensemble de ces types de phénomènes, aboutissant ainsi à l'unification des phénomènes électriques et magnétiques, **l'électromagnétisme** est né.
Mais il serait injuste de ne pas rendre hommage à plusieurs grands physiciens, prédécesseurs de Maxwell, qui ont ouvert la voie à la formulation de la théorie de l'électromagnétisme; citons par exemple Michael Faraday (Anglais, 1791-1867), André Marie Ampère (Français, 1775-1836), Hans Christian Oersted (Danois, 177-1851), Karl Friedrich Gauss (Allemand, 1777-1855) et d'autres encore.

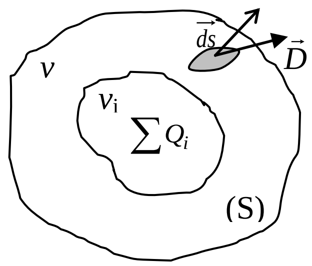
## I.2. GRANDEURS ELECTROMAGNETIQUES

Les grandeurs caractérisant les phénomènes électromagnétiques sont essentiellement :

En électricité :
$\vec{E}$ : Champ électrique, vecteur intensité du champ électrique [V/m]
$\vec{D}$ : Champ de déplacement électrique, vecteur densité du flux électrique [A.s/m$^2$ = C/m$^2$]
$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$[C/Vm=F/m] : Permittivité du vide;
$\varepsilon_r$ : Permittivité relative d'un diélectrique ($\varepsilon_r \rangle 0$) ; $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$: Permittivité absolue.
Dans le vide $\varepsilon_r = 1$. $\varepsilon_r$ : 1→10
$\vec{P} = \chi_e \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ : Polarisation électrique [C/m$^2$], $\chi_e = \varepsilon_r - 1$: susceptibilité électrique.

En magnétisme :
$\vec{H}$ : Champ magnétique, vecteur intensité du champ magnétique [A/m]
$\vec{B}$ : Champ d'induction magnétique, vecteur densité du flux magnétique [T=V.s/m$^2$ = Wb/m$^2$]
$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{M}$
$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ [Tm/A=H/m=Vs/Am] : Perméabilité du vide;
$\mu_r$ : Perméabilité relative d'un matériau ($\mu_r \rangle 0$) ; $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ : Perméabilité absolue magnétique.
Dans le vide $\mu_r = 1$. $\mu_r$ : 1→$10^5$
$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$ : magnétisation ou aimantation [A/m], $\chi_m = \mu_r - 1$: susceptibilité magnétique.

## I.3. LOIS PHYSIQUES ET EQUATIONS DE MAXWELL




### I.3.1 Loi de Gauss

Le flux du champ électrique (flux électrique) traversant une surface quelconque fermée est égal à la somme de la charge électrique située à l'intérieur de la surface.

Notation : $\oiint_s \vec{D}.\vec{ds} = \sum Q_i$ (I.1)

$s$ : est la surface de Gauss.

D'après **le théorème de la divergence** : $\oiint_s \vec{D} \bullet \vec{ds} = \iiint_v div\vec{D}\, dv$

Si $\sum Q_i$ est une distribution volumique dans $v_i$ :

$\sum Q_i = \iiint_{v_i} \rho\, dv = \iiint_v \rho\, dv$ . Ceci est vrai, car $\rho = 0$ sur le volume $v - v_i$ .

Donc on peut écrire : $\iiint_v div\vec{D}\, dv = \iiint_v \rho\, dv$

D'où : $div\vec{D} = \rho$ (I.2)

Cette équation est appelée forme **différentielle** ou forme **locale** du théorème de Gauss (équation de ***Maxwell-Gauss***).

**Remarque : Relation entre le champ $\vec{E}$ et le potentiel $V$ :**

a/ Forme intégrale: La différence de potentiel (d.d.p) entre les points A et B est définie par :

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad \text{(I.3)}$$

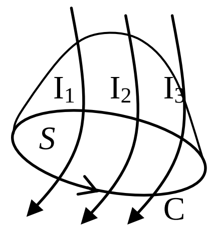
b/ Forme locale

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \text{ . Sachant que } df = \overrightarrow{grad} f \cdot \vec{dl} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \qquad \text{(I.4)}$$

Par conséquent : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (I.5)

**N.B.** : Cette dernière équation est valable dans le cas de **l'électrostatique**.

### I.3.2 Loi d'Ampère




$$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum I \qquad \text{(I.6)}$$

$\sum I$ représente le courant continu total traversant la surface $s$ délimitée par le parcours C.

D'après **le théorème de Stokes** : $\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint_s \overrightarrow{Rot}\vec{H} \cdot \vec{ds}$

L'intensité du courant est définie par : $\sum I = \iint_s \vec{J} \cdot \vec{ds}$ . Donc (I.6) devient : $\iint_s \overrightarrow{Rot}\vec{H} \cdot \vec{ds} = \iint_s \vec{J} \cdot \vec{ds}$

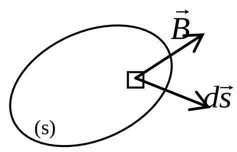
D'où : $\overrightarrow{Rot}\vec{H} = \vec{J}$ (I.7)

Cette équation s'appelle **la forme locale** du théorème d'Ampère ou équation de ***Maxwell-Ampère*** dans le cas des phénomènes stationnaires

### I.3.3 Conservation du flux magnétique

Le flux magnétique traversant l'élément de surface $d\vec{s}$ est : $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (I.8)

Le flux total traversant toute la surface (s) est : $\phi = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (I.9)



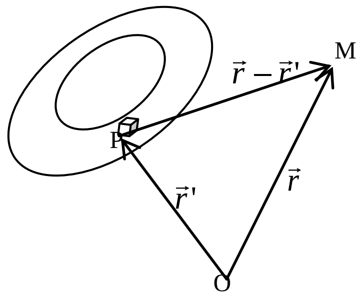

Dans le cas de circuit filiforme parcouru par un courant électrique (section du conducteur est très faible) ***Biot et Savart*** ont établi la loi suivante (1819-1820) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l I.\vec{dl} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} \qquad \text{(I.10)}$$

Dans le cas d'un conducteur volumique il a été établi : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{J}(P) \times \frac{\overrightarrow{PM}}{\left|PM\right|^3}\, d\tau$ (I.11)

En fonction des vecteurs position on peut écrire : $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{J}(r') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} d\tau$ (I.12)

Calculons $div\vec{B}$ par rapport à la variable ( $r$ ).




$$div\vec{B}(r) = div\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{J}(r') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} d\tau\right)$$

$$div\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v div(\vec{J}(r') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}) d\tau$$

Sachant que : $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3} = -\overrightarrow{grad} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}$

et en utilisant l'identification vectorielle : $div(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{Rot}\vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{Rot}\vec{A}_2$

on obtient :

$$div(\vec{J} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}) = div(\vec{J} \times (-\overrightarrow{grad} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}) = -\overrightarrow{grad} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \cdot \overrightarrow{Rot}\vec{J} - \vec{J} \cdot \overrightarrow{Rot}(-\overrightarrow{grad} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}) = -\overrightarrow{grad} \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \cdot \overrightarrow{Rot}\vec{J}$$

$\vec{J} = \vec{J}(r') \Rightarrow \vec{J}$ ne dépend pas de $r \Rightarrow \overrightarrow{Rot}\,\vec{J} = 0$

D'où : $div(\vec{J} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}) = 0 \Rightarrow div\vec{B} = 0$ (I.13)

$div\vec{B} = 0$ est ***<u>équation de Maxwell</u>*** exprimant la ***<u>conservation du flux</u>***.

$div\vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint_v div\vec{B}\, d\tau = \oint\!\!\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, on dit que le flux magnétique à travers une surface fermée est nul.

**<u>Remarques</u>**

1- On constate que $\vec{D}$ *et* $\vec{E}$ dans l'électrostatique (champ électrique statique dû à des charges au repos) ne sont pas liés à $\vec{B}$ *et* $\vec{H}$ du cas magnétostatique (champ magnétique statique généré par un courant constant).

2- Dans un conducteur, les champs électrique et magnétique statiques peuvent exister tous les deux et forment le champ électromagnétique statique. Le champ électrique cause la circulation du courant continu qui génère le champ magnétique. Cependant le champ électrique peut être complètement déterminé à partir de charges électriques statiques ou d'une distribution de potentiel. Le champ magnétique est une conséquence, il ne rentre pas dans le calcul du champ électrique.

3- Lorsque les champs électrique et magnétique varient dans le temps, ces champs ne sont plus indépendants, mais sont couplés l'un à l'autre par l'interaction électromagnétique. Ainsi, toute variation temporelle du champ électrique (ou du champ magnétique) dans une région de l'espace, génère un champ magnétique (ou électrique) dans cet espace.

***Champ électrique (constant ou variable)*** $\Rightarrow$ ***génération de champ magnétique(constant ou variable)***.
***Variation de champ magnétique*** $\Rightarrow$ ***génération de champ électrique variable***.

Cette propriété "***variation-génération-variation***" se propage à travers l'espace d'une région à l'autre et ce qu'il ait de la matière ou non dans les différentes régions de l'espace. Une telle perturbation de l'espace aura les propriétés d'une onde appelée l'onde électromagnétique.

### I.3.4 **Loi de Faraday-Lenz (loi d'induction)**

D'après Faraday, la force électromotrice induite dans un circuit conducteur est :

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \qquad \text{(I.14)}$$

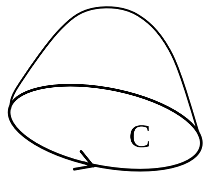
avec : $\Phi(t) = \iint_s \vec{B}.d\vec{s}$

Le signe (-) dans la loi de Faraday a une signification bien précise donnée explicitement par la loi de Lenz en 1833 (loi qualitative) : Une augmentation du flux à travers un circuit ($d\Phi(t)/dt \rangle 0$), entraîne l'apparition d'une f.e.m qui tend à faire circuler un courant qui *s'oppose* à cette augmentation. D'où la loi de Lenz : le courant induit crée un champ magnétique dont le flux s'oppose à *la variation* de flux que l'on impose.

Vu qu'un flux magnétique variable induit une f.e.m et un courant dans un circuit conducteur, on conclu donc qu'un champ électrique est produit dans le conducteur à cause du flux magnétique variable.

En général, la f.e.m associée à n'importe quel parcours fermé est égale à la circulation du champ électrique induit autour du parcours fermé :

$$e(t) = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(I.15)}$$




D'après la loi de Faraday: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

D'après le théorème de stokes et l'expression du flux magnétique on peut écrire :

$$\iint_S \overrightarrow{Rot}\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

D'où on obtient : $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ (I.16)

C'est ***l'équation de Maxwell-Faraday***. Cette équation traduit **localement** une propriété du champ électromagnétique ($\vec{E},\vec{B}$) qui montre qu'à toute variation temporelle du champ magnétique est associée un champ électrique.

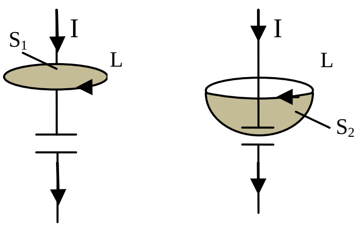
**Remarques:**

1- Le champ électrique dans l'équation précédente est un champ non conservatif (le champ électrostatique est conservatif $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ).

2- L'équation de conservation du flux magnétique est aussi vérifiée dans les phénomènes variables. En effet si on applique la divergence à l'équation précédente on obtient : $div\vec{B} = 0$

### I.3.5 **Loi d'Ampère généralisée**

On a déjà établi en magnétostatique que :




$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I \Rightarrow \overrightarrow{Rot}\vec{H} = \vec{J} \qquad \text{(I.18)}$$

Considérons maintenant le cas d'un condensateur :

1/ Si on applique le théorème d'ampère sur le contour C, en considérant la surface S1 on obtient :

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = i(t) \qquad \text{(I.19)}$$

1/ Si maintenant on applique le théorème d'ampère sur le contour C mais en considérant la surface S2 le résultat sera : $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = 0$ (I.20)

Ce qui se **contredit** avec le résultat (I.19)!

Pour éliminer cette contradiction, Maxwell a proposé un terme supplémentaire dans le membre droit de l'équation (I.17). Comment définir ce terme ?

En magnétostatique on a : $\overrightarrow{Rot}\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow div\,\vec{J} = 0$

ce qui est vérifié aussi par l'équation de continuité $div\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ car en régime stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Cependant en régime variable : $div\,\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. D'après le théorème de Gauss $div\vec{D} = \rho$, on peut écrire :

$$div\vec{J} = -div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow div\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

Donc à l'équation on ajoute le terme $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ que Maxwell a appelé _densité du courant de déplacement_..

Donc l'équation de **_Maxwell Ampère généralisée_** s'écrit :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{I.21}$$

Ce résultat montre que le champ magnétique peut être obtenu par un courant de conduction ou encore par la variation du champ électrique dans le temps.

Donc si on revient à l'équation (I.19) elle devient :

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \tag{I.22}$$

### I.3.6. Equations de Maxwell sous forme intégrale (forme globale)

| | Dans la matière | Dans le vide | Lois |
|---|---|---|---|
| 1 | $\oiint_s \vec{D}\cdot\overrightarrow{ds} = \sum Q_i$ | $\oiint_s \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \sum Q_i/\varepsilon_0$ | Loi de Gauss |
| 2 | $\oiint_s \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds} = 0$ | Idem ci-contre | Conservation du champ magnétique |
| 3 | $\oint_c \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}$ | Idem ci-contre | Loi de Faraday d'induction EM |
| 4 | $\oint_c \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} = \sum I_i + \frac{d}{dt}\iint_s \vec{D}\cdot\overrightarrow{ds}$ | $\oint_c \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\sum I_i + \mu_0\frac{d}{dt}\iint_s \vec{D}\cdot\overrightarrow{ds}$ | Théorème d'ampère modifié par Maxwell |

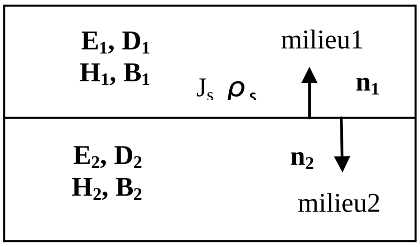
### I.3.7. Equations de Maxwell sous forme différentielle (forme locale)

| | Dans la matière | Dans le vide |
|---|---|---|
| 1 | $div\vec{D}(M,t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}(M,t) = \rho(M,t)$ | $div\vec{E}(M,t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(M,t) = \rho(M,t)/\varepsilon_0$ |
| 2 | $div\vec{B}(M,t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(M,t) = 0$ | Idem ci-contre |
| 3 | $\overrightarrow{Rot}\,\vec{E}(M,t) = \vec{\nabla}\times\vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$ | Idem ci-contre |
| 4 | $\overrightarrow{Rot}\,\vec{H}(M,t) = \vec{\nabla}\times\vec{H}(M,t) = \vec{J}(M,t) + \frac{\partial \vec{D}(M,t)}{\partial t}$ | $\overrightarrow{Rot}\,\vec{B}(M,t) = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}(M,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$ |

Avec $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$.

## I.4 CONDITIONS DE PASSAGE A LA SURFACE DE SEPARATION DE DEUX MILIEUX

Aux interfaces, entre deux milieux de propriétés différentes, l'application des équations de Maxwell donne (les milieux sont notés 1 et 2) :




$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \;;\; \vec{n}_1 \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$
$$\vec{n}_1 \times (E_1 - E_2) = 0 \,;\, \vec{n}_1 \times (H_1 - H_2) = \vec{J}_s$$

$\vec{J}_s$ et $\rho_s$ sont les densités de courant et de charges électriques portées par la surface de séparation. Ces conditions expriment que les composantes tangentielle du champ électrique et normale de l'induction magnétique sont continues, et que les composantes tangentielle du champ magnétique et normale de l'induction électrique sont discontinues par la présence respective du courant surfacique et des charges superficielles.

**<u>Remarque :</u> Lois constitutives (relations dans les milieux)**
Les différents champs dans les équations de Maxwell ne peuvent pas être déterminés sans spécifier les relations constitutives (décrivant le comportement des matériaux) entre ces champs :
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ; $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ; $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ .

**<u>Exemple d'application</u>**
Supposons un surplus de charges dans un conducteur en cuivre. Montrer qu'après une durée de temps très courte, cette charge sera répartie à la surface du conducteur.

**<u>Solution</u>**
$div\vec{J} = -\dfrac{d\rho}{dt}$ (1), $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (dans le vide) (2)

Dans un milieu matériel on a $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ et la 1ere équation de Maxwell devient : $div\varepsilon\vec{E} = \rho$ (3)

En tenant compte de la loi d'Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ et de l'équation (1), on peut écrire :

$$div\sigma\vec{E} = -\frac{d\rho}{dt} \Rightarrow div\vec{E} = -\frac{1}{\sigma}\frac{d\rho}{dt} \quad (\sigma = Cste) \qquad (4)$$

Si $\varepsilon = Cste$, (3) conduit à : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ (5)

Les équations (4) et (5) conduisent à : $\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$ (6)

La solution de l'équation (6) est : $\rho(t) = \rho_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ (7)

$\rho_0$ étant la charge volumique initiale. $\tau = \varepsilon / \sigma$ est la constante de temps.
La charge volumique décroît exponentiellement au cours du temps, avec une rapidité caractérisée par la constante de temps $\tau$ appelée aussi temps de relaxation. Au bout de quelques $\tau$, il n'y aura plus de charge volumique et le surplus de charge sera répartie à la surface du conducteur.

**<u>Argent</u>** : $\sigma = 6.17 \times 10^7 S/m,\ \varepsilon_r = 1,\ \varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} F/m \Rightarrow \tau = 1.44 \times 10^{-19} s$

**<u>Cuivre</u>** : $\sigma = 5.8 \times 10^7 S/m,\ \varepsilon_r = 1,\ \varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} F/m \Rightarrow \tau = 1.52 \times 10^{-19} s$

**<u>Porcelaine</u>** : $\sigma = 10^{-12}\ S/m,\ \varepsilon_r = 6,\ \varepsilon_0 = 8.8 \times 10^{-12} F/m \Rightarrow \tau = 52.8 s$