# CHAPITRE II

## CIRCUIT MAGNETIQUE - FORCE MAGNETIQUE

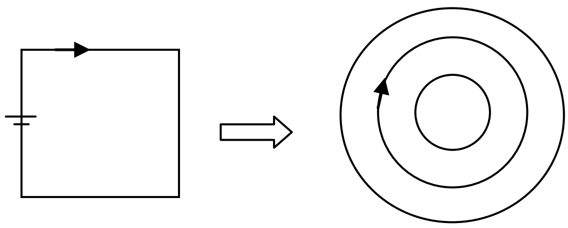
### II.1. INTRODUCTION

On présente dans ce chapitre, une analogie entre les circuits magnétiques et les circuits électriques en introduisant les notions de force magnétomotrice et de reluctance. Par la suite les forces qu'exerce le champ magnétique sur des particules chargées, des éléments ou des boucles de courant, seront détaillées. Ceci est important dans le cas de dispositifs électriques tels qu'ampèremètres, voltmètres, galvanomètres, moteurs, générateurs magnétohydrodynamique,…etc. les concepts de moment et d'énergie magnétiques seront considérés.

### II.2. CIRCUITS MAGNETIQUES

Le concept de circuits magnétiques est basé sur la résolution de certains problèmes de champ magnétique en utilisant **l'approche des circuits électriques**. Les dispositifs magnétiques tels que tores, transformateur, moteurs et relais peuvent être considérés comme circuits magnétiques. L'analyse de tels dispositifs devient simple si **une analogie** entre circuits magnétiques et circuits électriques et exploitée. Cette analogie est présentée sur le tableau ci-dessous :

| Circuit électrique | Circuit magnétique |
|---|---|
| Conductivité : $\sigma$ | Perméabilité : $\mu$ |
| Intensité du champ : $E$ | Intensité du champ : $H$ |
| Courant : $I = \iint \vec{J} \cdot \overrightarrow{ds}$ | Flux magnétique : $\phi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds}$ |
| Densité de courant : $J = I/S = \sigma E$ | Densité de flux : $B = \phi/S = \mu H$ |
| Tension elec. ou Force électromotrice (f.é.m.) : V | Tension mag. ou Force magnétomotrice (f.m.m.) : $F_m$ |
| Résistance : $R$ | Réluctance : $R_m$ |
| Conductance : $G=1/R$ | Perméance : $P_m = 1/R_m$ |
| Loi d'Ohm : $R = V/I = \frac{l}{\sigma S}$ | Loi d'Ohm : $R_m = F_m/\phi = \frac{l}{\mu S}$ |
| Ou $V = E\,l = R\,I$ | Ou $F_m = H\,l = R_m\,\phi = N\,I$ |
| Lois de Kirchhoff : | Lois de Kirchhoff : |
| $\Sigma I = 0$ | $\Sigma \phi = 0$ |
| $\Sigma V - \Sigma R\,I = 0$ | $\Sigma F_m - \Sigma R_m\,\phi = 0$ |



### II.3. FORCE DE LORENTZ

L'interaction entre charges fixes nous a permis de définir la force électrique $\vec{F}$ à partir de la loi de Coulomb. En terme de champ électrostatique, cette force exercée sur une charge test de valeur $q$ s'exprime par :

$$\vec{F} = q.\vec{E} \qquad \text{(II.1)}$$

Cependant, l'expérience montre que l'interaction entre charges en mouvement ne peut se réduire à une interaction électrostatique. Ainsi la force qui s'exerce sur une charge en mouvement peut être divisée en deux parties :

1- Une force indépendante de la vitesse de la charge, c'est la force électrique.
2- L'autre force dépend de la vitesse et lui est orthogonale, on l'appelle la force magnétique.
La force résultante dite la force de Lorentz (1853-1928) qui s'exerce sur une charge q de vitesse $\vec{v}$ et placée dans un champ électromagnétique, s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(II.2)}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement les champs électrique et magnétique. L'ensemble ( $\vec{E}$ , $\vec{B}$ ) forme le champ électromagnétique. La force magnétique est :

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(II.3)}$$

## II.4. FORCE MAGNETIQUE SUR UN ELEMENT DE COURANT

Pour déterminer la force appliquée sur un élément de courant $I.dl$ due à un champ magnétique $\vec{B}$ , rappelons la relation suivante : $J.d\tau = J.ds.dl = I.dl$

Avec $\vec{J} = \rho_m \vec{v}$ , on aura : $I\,\overrightarrow{dl} = \rho_m \vec{v} d\tau = dQ\vec{v}$ , donc la force appliquée sur l'élément de courant $I\,\overrightarrow{dl}$ existant dans un champ magnétique $\vec{B}$ est obtenue à partir de l'expression (II.3) :

$$d\vec{F} = I\,\overrightarrow{dl} \times \vec{B} \qquad \text{(II.4)}$$

La force magnétique sur un circuit complet fermé parcouru par un courant I est donnée par :

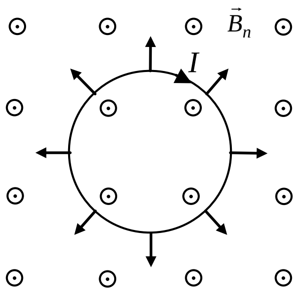
$$\vec{F} = I \oint_L \overrightarrow{dl} \times \vec{B} \qquad \text{(II.5)}$$

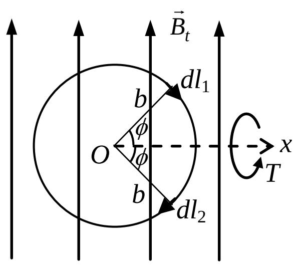
## Exemple d'application

Un fil courbé en demi-cercle de rayon R forme un circuit fermé parcouru par un courant I. Le circuit est disposé dans le plan xy, dans un champ magnétique uniforme orienté dans le sens positif de l'axe des y. Déterminer les forces magnétiques exercées sur la portion rectiligne du fil et sur sa portion courbe.

## II.5. FORCE MAGNETIQUE SUR UNE BOUCLE DE COURANT

Considérons une petite spire de rayon *b*, parcourue par un courant *I* et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ . On décompose ce champ en deux composantes normal (perpendiculaire) et tangentielle (parallèle) au plan de la spire : $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t$ .




-La composante normale tend à étendre la spire (ou contracter si le sens de I est inversé), mais n'exerce pas de force nette pour déplacer la boucle.

-La composante tangentielle, dont la force nette est aussi nulle, exerce un couple qui tend à tourner la spire autour d'un axe (l'axe x dans ce cas).

Le couple différentiel produit par les forces $d\vec{F}_1 \; et \; d\vec{F}_2$ est :

$$d\vec{T} = (dF).2.b.\sin\phi\,\vec{i} = (Idl.B_t.\sin\phi).2.b.\sin\phi\,\vec{i} = 2I\,b^2.B_t.\sin^2\phi.d\phi\,\vec{i} \qquad \text{(II.6)}$$

Où $dF = \left|d\vec{F}_1\right| = \left|d\vec{F}_2\right|$ et $dl = \left|dl_1\right| = \left|dl_2\right| = b.d\phi$ . Le couple total agissant sur la spire est alors :

$$\vec{T} = \int d\vec{T} = 2I\,b^2.B_t\int_0^{\pi}\sin^2\phi.d\phi\,\vec{i} = I.(\pi\,b^2).B_t\,\vec{i} \qquad \text{(II.7)}$$

En utilisant la définition du moment magnétique d'un circuit électrique parcouru par un courant I :

$$\vec{m} = I.S.\vec{n} \qquad \text{(II.8)}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface de la spire dirigé suivant le pouce de la main droite quand le courant est dirigé suivant les quatre doigts. L'équation (IV.16) s'écrit comme :

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad \text{(II.9)}$$

Notons que le vecteur $\vec{B}$ est utilisé dans cette équation au lieu de $\vec{B}_t$ , car $\vec{m}\times\vec{B} = \vec{m}\times(\vec{B}_n + \vec{B}_t) = \vec{m}\times\vec{B}_t$ .

**N.B.** : C'est ce couple qui tend à aligner les dipôles magnétiques microscopiques dans les matériaux magnétiques.

## II.6. FORCE ET COUPLE EN TERME D'ENERGIE MAGNETIQUE EMMAGASINEE

Tous les circuits parcourus par un courant électrique et placés dans un champ magnétique sont soumis à une force magnétique. A l'exception de certains cas symétriques, la détermination de cette force est généralement une tache fastidieuse car en pratique on n'a pas que les fils filiformes ou ayant des géométries simples, mais la force ou le couple résulte de trois formes d'interactions :

- interaction entre deux courants ;
- interaction entre un courant et un circuit magnétique ;
- interaction entre aimant et un courant ou un circuit magnétique.

### II.6.1. Principe de déplacements ou travaux virtuels

Pour des cas compliqués où l'expression (II.5) ne peut être utilisée, une méthode alternative basée sur le principe de déplacements ou travaux **virtuels** et permettant la détermination de la force magnétique est présentée.

On rappelle que l'équation de tension pour la plupart des machines électriques est données par :

$$V = Ri + \frac{d\psi}{dt}$$

Si on multiplie cette équation par le courant *i*, on obtient l'équation de puissance :

$$V.i = Ri^2 + i.\frac{d\psi}{dt}$$

Le terme $P_{el} = V.i$ représente la puissance électrique fournie par les sources extérieures au système, cette puissance est répartie en : puissance dissipée par effet Joules $P_J = Ri^2$ et puissance électromagnétique $P_{em} = i.\frac{d\psi}{dt}$ , celle-ci peut être décomposée en puissance magnétique et puissance $P_{mag}$ mécanique $P_{mec}$.

-La puissance magnétique est définie par la variation de l'énergie magnétique emmagasinée dans la machine : $P_{mag} = \frac{dW_{mag}}{dt}$

-La puissance mécanique est fournie à l'extérieur au moyen du travail des forces ou des couples :

*Pour un actionneur tournant : $P_{mec} = T.\Omega = T.\frac{d\theta}{dt}$

*Pour un actionneur linéaire $P_{mec} = F.v = F.\frac{dx}{dt}$

$\theta$ et $x$ sont respectivement les positions angulaire et linéaire des parties en mouvement.
$\Omega$ et $v$ sont respectivement les vitesses angulaire et linéaire.
De ce qui précède on peut écrire :

$P_{mec} = P_{em} - P_{mag} = dW_{mec}/dt = i.d\psi/dt - dW_{mag}/dt$

Sous forme différentielle (variation de l'énergie) :

$dW_{mec} = i.d\psi - dW_{mag} = T.d\theta$

## II.6.1.1. Système au repos

Si le système est au repos $\Rightarrow d\theta/dt = 0 \Rightarrow dW_{mag} = i.d\psi$ .

Par conséquent l'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit magnétique, traversé par un flux magnétique qui croit de 0 à la quantité $\psi$ , est : $W_{mag} = \int_0^{\psi} i.d\psi$ .

## II.6.1.2. Système en mouvement à flux constant

Un déplacement infinitésimal $d\theta (ou\, dx)$ peut être effectué de plusieurs manières. En premier lieu on considère un déplacement à flux constant :

$\psi = cste \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow T.d\theta = -dW_{mag}$

D'où le couple sera exprimé par : $T = -\left.\frac{dW_{mag}}{d\theta}\right|_{\psi = cste}$

Dans le cas d'un déplacement linéaire, la force est donnée : $F = -\left.\frac{dW_{mag}}{dx}\right|_{\psi = cste}$

**N.B.** : S'il n'y a pas de variation dans le flux de couplage résultant d'un déplacement virtuel différentiel $dl$, de l'un des circuits parcourus par les courants électriques, il ne peut y avoir de f.é.m. induite et les sources ne fourniront pas d'énergie au système. Le travail mécanique $\vec{F}.\vec{dl}$ est effectué par le système au détriment de la diminution de l'énergie magnétique stockée $W_{mag}$ . D'où on a : $\vec{F}.\vec{dl} = -dW_{mag}$

## II.6.1.2. Système en mouvement à courant constant

On suppose maintenant un déplacement infinitésimal $d\theta (ou\, dx)$ à courant constant :

$i = cste \Rightarrow di = 0 \Rightarrow i.d\psi = d(i\psi) - \psi.di = d(i\psi).$

La variation de l'énergie mécanique devient :

$dW_{mec} = d(i.\psi - W_{mag})\big|_{i=cste} = T.d\theta$

D'où : $T = dW_{mec} / d\theta = \left.\frac{d}{d\theta}(i.\psi - dW_{mag})\right|_{i=cste}$

On appelle co-énergie la quantité : $W_{co} = i.\psi - W_{mag}$

En termes de co-énergie le couple s'écrit : $T = \left.\frac{dW_{co}}{d\theta}\right|_{i=cste}$

## II.6.2. Energie magnétique emmagasinée

La densité volumique de l'énergie magnétique, en fonction des champs ***H*** et ***B***, est :

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}.\vec{B} \qquad (J/m^3)$$

Dans le cas de matériaux linéaires, l'énergie magnétique totale est donnée par :

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}.\vec{B}\,dv = \frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{\mu}\,dv$$

## II.6.3. Tenseur de Maxwell

Le tenseur de Maxwell est utilisé pour calculer <u>les densités surfaciques</u> des forces radiale (normale) et tangentielle sur une surface à l'intérieur de l'entrefer des machines électriques :

$$\sigma_r = \frac{1}{2\mu_0}(B_n^2 - B_t^2) \qquad (N/m^2)$$

$$\sigma_t = \frac{1}{\mu_0}(B_n.B_t) \qquad (N/m^2)$$

$B_n\ et\ B_t$ sont respectivement les composantes normale (radiale) et tangentielle à la surface considérée dans l'entrefer pour le calcul des forces. Les forces sont obtenues par l'intégration des densités précédentes sur cette surface.

Le couple est donnée par :

$$T = \oiint_s \vec{r} \times \vec{\sigma}.ds = \frac{1}{\mu_0}\int_0^{2\pi} r^2.B_n.B_t d\varphi$$