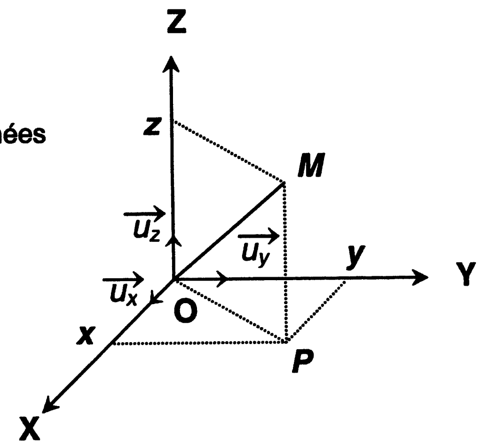
1. SYSTEMES DE COORDONNEES

1.1. COORDONNEES CARTESIENNES



Définition

Pour une origine O et une base orthonormée ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$), les coordonnées cartésiennes (*x*, *y*, *z*) d'un point *M* sont définies sur le dessin :
Où P est la projection de M dans le plan (*OXY*).
Avec $x \in [-\infty,+\infty]$, $y \in [-\infty,+\infty]$, $z \in [-\infty,+\infty]$.

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule *x* varie : droites // (OX)
Lignes sur lesquelles seule *y* varie : droites // (OY)
Lignes sur lesquelles seule *z* varie : droites // (OZ)
L'intersection de ces lignes définit un point (*x*, *y*, z).

Base associée ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) orthonormée directe
définie par : déplacement vectoriel de *M* lorsque (*x*, *y*, *z*) varient séparément

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z}$

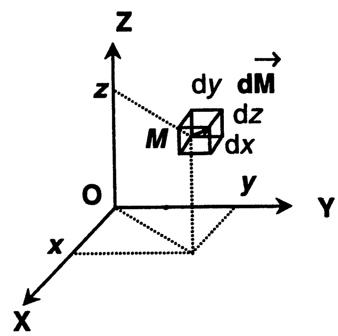
Produit scalaire $\boxed{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = xx' + yy' + zz'}$

En particulier : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Produit vectoriel

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ x \\ y \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{vmatrix}}$$

Déplacement élémentaire



- *dx* : variation infinitésimale de *x* à *y* et *z* constants
- *dy* : variation infinitésimale de *x* à *x* et *z* constants
- *dz* : variation infinitésimale de *x* à *x* et *y* constants

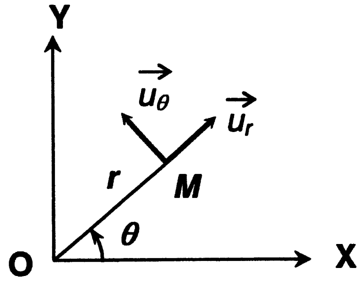
$\rightarrow \boxed{d\overrightarrow{M} = dx\;\vec{u}_x + dy\;\vec{u}_y + dz\;\vec{u}_z}$

Longueur élémentaire $\left\|d\overrightarrow{M}\right\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Volume élémentaire : $\boxed{d\tau = dx\,dy\,dz}$

Surface élémentaire sur un plan $\perp$ à l'axe *(OZ)* : $dS = dx\,dy$
" *(OX)* : $dS = dy\,dz$
" *(OY)* : $dS = dx\,dz$

1.2. COORDONNEES POLAIRES (DANS UN PLAN)



Définition

Les coordonnées polaires (r, θ) d'un point M (distinct de O) sont définies par :

$r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ = distance à l'origine $\qquad r > 0$

$\theta = (\widehat{OX, \overrightarrow{OM}})$ orienté = angle polaire $\qquad 0 \le \theta < 2\pi$.

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule r varie : droites passant par O (= rayons)
Lignes sur lesquelles seule θ varie : cercles centrés en O.
L'intersection de ces lignes définit un point (r, θ).

Quand a-t-on intérêt à utiliser ce système de coordonnées ?

Problèmes plans à symétrie circulaire.
Par ex. : rotation plane autour de O, ou problèmes où propriétés ne dépendent que de la distance à un point.

Base associée : LOCALE ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$) orthonormée, tangents aux lignes de coordonnées
définie par : déplacement vectoriel de M lorsque (r, θ) varient séparément

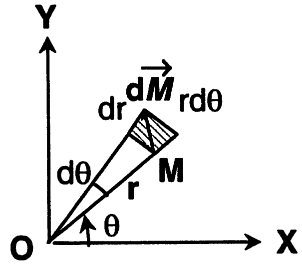
Soit : $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$ et $\vec{u}_\theta = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\left\|\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|^{-1} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}$

Cette base est orthonormée : $\left\|\vec{u}_r\right\| = \left\|\vec{u}_r\right\| = 1$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = +\dfrac{\pi}{2}$

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$

Produit scalaire $\qquad \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = r\,\vec{u}_r \cdot r'\,\vec{u}_{r'} = r\,r'\cos(\theta-\theta')$

Déplacement élémentaire du point M



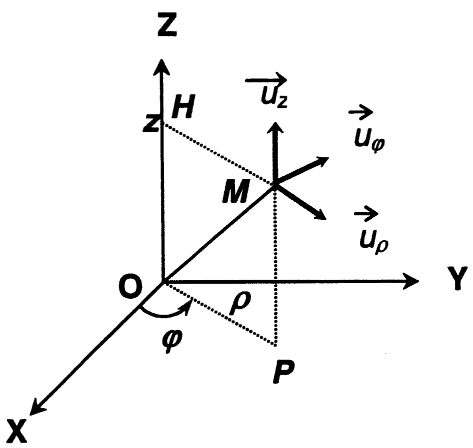
- *pour une variation* dρ, *à* θ constants, M se déplace de dρ *suivant* $\vec{u}_r$
- *pour une variation* dθ, *à* θ constants, M se déplace de $r\,\mathrm{d}\theta$ *suivant* $\vec{u}_\theta$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}r\ \vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\ \vec{u}_\theta}$

Longueur élémentaire $\qquad \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{M}\right\| = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2}$

Surface élémentaire (hachurée) $\qquad \boxed{\mathrm{d}S = r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$

1.3. COORDONNEES CYLINDRIQUES (DANS L'ESPACE)



Définition

Les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) d'un point M sont définies par :

$\rho = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ = distance à l'axe (OZ) $\qquad \rho > 0$

$\varphi = (\widehat{0X, \overrightarrow{OP}})$ orienté $\qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$z = \overline{OH}$ $\qquad z \in [-\infty, +\infty]$

P étant la projection de M dans le plan ($0XY$)
et H sa projection parallèle à ce plan sur l'axe (OZ).

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule ρ varie : droites parallèles au plan (OXY) coupant l'axe (OZ).
Lignes sur lesquelles seule φ varie : cercles d'axes (OZ).
Lignes sur lesquelles seule z varie : droites // (OZ).

L'intersection de ces lignes définit un point (ρ, φ, z).

Quand a-t-on intérêt à utiliser ce système de coordonnées ?

Problèmes à symétrie cylindrique
Par ex. : problèmes avec axe privilégié, comme rotation autour de l'axe (OZ).

Base associée : LOCALE $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ orthonormée directe
définie par : déplacement vectoriel de M lorsque (r, φ, z) varient séparément

Soient : $\vec{u}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$ $\quad \vec{u}_\varphi = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\left\|\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right\|^{-1} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi}$ et $\vec{u}_z = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\left\|\overrightarrow{OH}\right\|}$

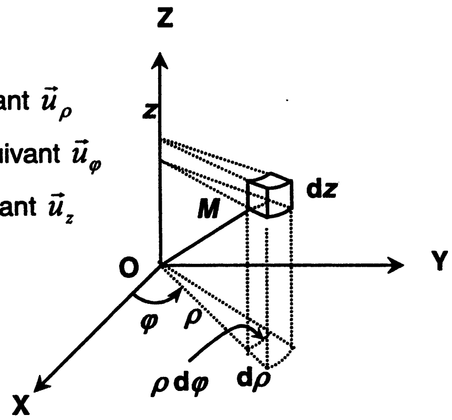
$\vec{u}_\varphi$ dans le plan (OXY) avec $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi) = +\dfrac{\pi}{2}$

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z}$

Produit scalaire

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}' = (\rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z) \cdot (\rho'\vec{u}_{\rho'} + z'\vec{u}_{z'}) = \rho\,\rho'\cos(\varphi - \varphi') + zz'$$

Déplacement élémentaire du point M



- *pour une variation* $\mathrm{d}\rho$, à φ et z constants, M se déplace de $\mathrm{d}\rho$ suivant $\vec{u}_\rho$
- *pour une variation* $\mathrm{d}\varphi$, à ρ et z constants, M se déplace de $\rho\,\mathrm{d}\varphi$ suivant $\vec{u}_\varphi$
- *pour une variation* $\mathrm{d}z$, à ρ et φ constants, M se déplace de $\mathrm{d}z$ suivant $\vec{u}_z$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}\rho\ \vec{u}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\ \vec{u}_\varphi + \mathrm{d}z\ \vec{u}_z}$

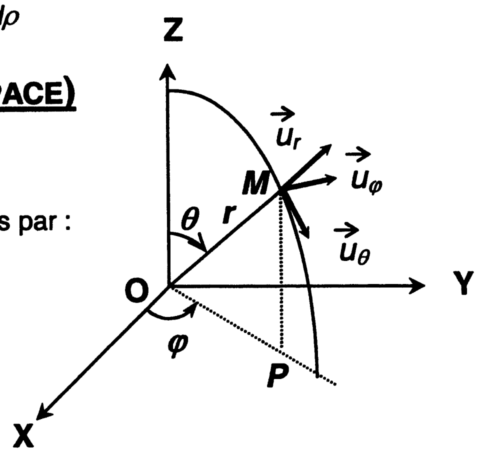
Longueur élémentaire $\left\|\mathrm{d}\overrightarrow{M}\right\| = \sqrt{\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2}$

Volume élémentaire $\boxed{\mathrm{d}\tau = \rho\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$

Surface élémentaire sur un cylindre d'axe (Oz) : $\mathrm{d}S = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

" dans un plan $\perp$ à l'axe (Oz) : $dS = \rho\ d\varphi\,d\rho$

1.4. COORDONNEES SPHERIQUES (DANS L'ESPACE)



Définition

Les coordonnées sphériques (r, φ, φ) d'un point M sont définies par :

$r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ $\qquad r > 0$

$\theta = (\widehat{\overrightarrow{OM}, 0Z})$ $\qquad 0 \le \theta \le \pi$

$\varphi = (\widehat{0X, \overrightarrow{OP}})$ orienté $\qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

où P est la projection de M dans le plan (OXY).

Lignes de coordonnées

Lignes sur lesquelles seule r varie : droites passant par O (= rayons)

Lignes sur lesquelles seule θ varie : demi-cercles centrés en O et de diamètre sur (OZ) (= méridiens)

Lignes sur lesquelles seule φ varie : cercles d'axes (OZ) (= parallèles)

L'intersection de ces lignes définit un point (r, θ, φ).

Quand a-t-on intérêt à utiliser ce système de coordonnées ?

Problèmes à symétrie sphérique, avec un point privilégié.

Par ex. : problèmes où propriétés ne dépendent que distance à un point.

Base associée : LOCALE ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) orthonormée directe

définie par : déplacement vectoriel de M lorsque (r, θ, φ) varient séparément

Soient : $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$

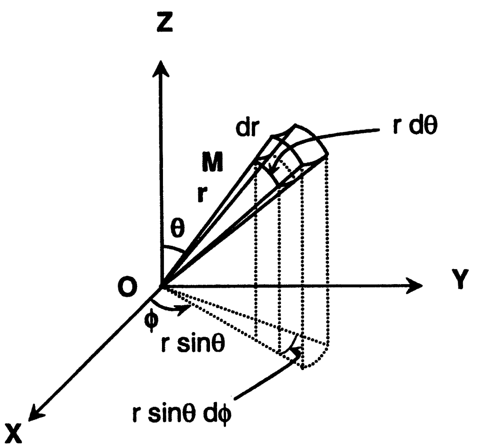
$$\vec{u}_\theta = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|^{-1} = \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta}$$

$$\vec{u}_\varphi = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right\|^{-1} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi}$$

$\vec{u}_\theta$ dans le plan ($\overrightarrow{OM}$, OZ) tel que $(\vec{u}_r , \vec{u}_\theta) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\vec{u}_\varphi$ tel que ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$) forment un trièdre direct

Dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$



Déplacement élémentaire du point M :

- *pour une variation dr*, à θ et φ constants, M se déplace de dr suivant $\vec{u}_r$
- *pour une variation dθ*, à r et φ constants, M se déplace de $r\,d\theta$ suivant $\vec{u}_\theta$
- *pour une variation dr*, à r et θ constants, M se déplace de $r\sin\theta\,d\varphi$ suivant $\vec{u}_\varphi$

$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{dM} = dr\ \vec{u}_r + r\sin\theta\,d\varphi\ \vec{u}_\varphi + r\,d\theta\ \vec{u}_\theta}$

Longueur élémentaire $\left\|\overrightarrow{dM}\right\| = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + r^2\,d\theta^2}$

Volume élémentaire $\boxed{d\tau = dr\ r\,d\theta\ r\sin\theta\,d\varphi = r^2\sin\theta\ dr\,d\varphi\,d\theta}$

Surface élémentaire sur une sphère centrée en O : $dS = r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$

1.5. Relations avec les coordonnees cartesiennes

Coordonnées polaires (dans le plan)

$x = r\cos\theta$ $\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta$ $\qquad \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Coordonnées cylindriques (dans l'espace)

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z \qquad z = z$$

Coordonnées sphériques (dans l'espace)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

2. ANALYSE VECTORIELLE

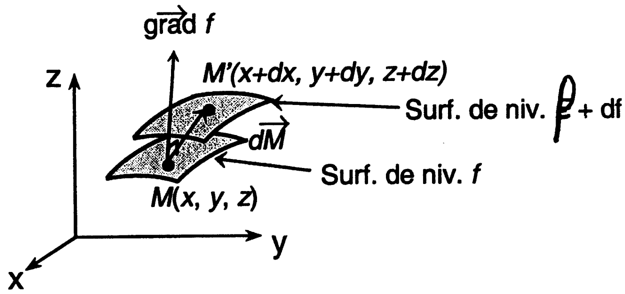
2.1. GRADIENT D'UNE FONCTION

Définition

A une dimension, on a besoin d'un scalaire (la pente de la courbe $y = f(x)$) pour définir la différentielle de f : $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$

A trois dimensions, il faudra un vecteur, le vecteur gradient, pour définir la différentielle de f :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}}$$



Interprétation géométrique

* $\mathrm{d}f > 0$ et maximum lorsque $\overrightarrow{grad}f$ et $\overrightarrow{dM}$ sont colinéaires

→ le gradient indique **la direction de plus grande variation (pente)**

(direction le long de laquelle f augmente le plus vite)

* $\mathrm{d}f = 0$ lorsqu'on se déplace sur la surface f = cste = surface de niveau f

c'est à dire lorsque $\overrightarrow{dM}$ tangent à la surface f = cste et alors $\overrightarrow{grad}f \perp \overrightarrow{dM}$

→ le gradient en M est orienté suivant **la normale à la surface f = cste** passant par M.

Expressions du gradient dans les différents systèmes de coordonnées

En cartésiennes :
(base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{array} \right.$$

En cylindriques :
(base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} \end{array} \right.$$

En sphériques :
(base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$)

$$\overrightarrow{grad}f = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)_{\varphi,\theta} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \end{array} \right.$$

On peut les retrouver facilement à partir de la définition du gradient : $\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$

Ex. : pour les coordonnées cylindriques, $f(\rho, \varphi, z)$

On a : $\overrightarrow{dM} = d\rho\ \vec{u}_\rho + \rho d\varphi\ \vec{u}_\varphi + dz\ \vec{u}_z$

On peut écrire le gradient sous la forme : $\overrightarrow{grad}f = a_\rho\,\vec{u}_\rho + a_\varphi\,\vec{u}_\varphi + a_z\,\vec{u}_z$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}f \cdot \overrightarrow{dM} &= (a_\rho\,\vec{u}_\rho + a_\varphi\,\vec{u}_\varphi + a_z\,\vec{u}_z)\cdot(\mathrm{d}\rho\ \vec{u}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\ \vec{u}_\varphi + \mathrm{d}z\ \vec{u}_z) \\ &= a_\rho\,\mathrm{d}\rho + \rho\,a_\varphi\,\mathrm{d}\varphi + a_z\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Or : $\quad \mathrm{d}f = f'_\rho \, \mathrm{d}\rho + f'_\varphi \, \mathrm{d}\varphi + f'_{z\theta} \, \mathrm{d}z$

Les variables (ρ, φ, z) étant *indépendantes*, on peut choisir des chemins particuliers, comme par exemple celui où seule ρ varie de ρ à $\rho + \mathrm{d}\rho$, φ et z étant constantes.

On a alors sur ce chemin : $\mathrm{d}f = a_\rho \, \mathrm{d}\rho = f'_\rho \, \mathrm{d}\rho$ pour tout (ρ, φ, z).

D'où l'on tire : $a_\rho = f'_\rho$, $\forall (\rho, \varphi, z)$.

De la même façon, on montre : $\quad a_\varphi = \dfrac{1}{\rho} f'_\varphi$, $\forall (\rho, \varphi, z)$ et $a_z = f'_z$, $\forall (\rho, \varphi, z)$.

Exemple : Expression d'une force conservatrice en fonction du gradient de E_p

Si $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p : $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{M} = -\mathrm{d}E_p$

Or : $\quad \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{M} = F_x \, \mathrm{d}x + F_y \, \mathrm{d}y + F_z \, \mathrm{d}z$

Et par définition : $\mathrm{d}E_p = \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$.

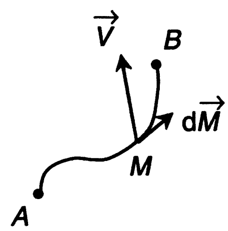
Ceci est vrai quelques soient dx, dy et dz donc :

$F_x = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}$. On montre de la même façon : $F_y = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}$, $F_z = -\left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}$.

Soit : $\quad \boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$.

Autre exemple de relation de ce type : entre le potentiel V et le champ électrique $\vec{E}$: $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$.

2.2. INTEGRALE CURVILIGNE – CIRCULATION



Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel (qui à tout point M(x, y, z) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Définition

La circulation de $\vec{V}$ sur le trajet AB est : $C = \displaystyle\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{M}$

Propriété

La circulation sur tout contour fermé d'un gradient est nulle. Formulé autrement : sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, elle ne dépend que des points de départ et d'arrivée du contour.

$\overrightarrow{grad}f \cdot d\vec{M} = df$ (par définition du gradient)

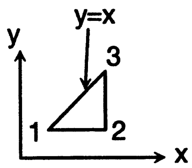
Le long d'un contour fermé : $\boxed{\oint \overrightarrow{grad}f \cdot d\vec{M} = \oint df = 0}$.

Le long d'un contour ouvert AB : $\boxed{\displaystyle\int_A^B \overrightarrow{gradf} \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A)}$

Par contre, si $\vec{V}$ n'est pas un gradient, la circulation sur un contour fermé peut être non nulle. Formulé autrement : sa circulation dépend du chemin suivi.

Exemple :

$\vec{V} = -x\,\vec{u}_y$ *sur le contour C fermé 1-2-3-1 de la figure*



$\vec{V}\cdot d\vec{M} = -x\,dy$

$$\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{M} = \int_1^2 -x\,dy + \int_2^3 -x\,dy + \int_3^1 -x\,dy = 0 - x_2(y_3 - y_1) - \frac{(y_1^2 - y_3^2)}{2}$$

qui est différent de *0* a priori. Si par ex. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_3 = 2$: $\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{M} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$

On reconnaîtra le travail d'une force de pression ($\int -\,pdV$) en thermodynamique.

2.3. DIVERGENCE (FORME LOCALE DU FLUX)

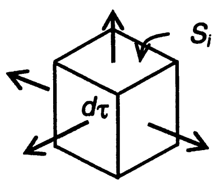
Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur (qui à tout point M(*x*, *y*, *z*) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Flux

Le **flux** de $\vec{V}$ à travers une surface *S* orientée est le scalaire : $F_{\vec{V}}(S) = \iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S}$

Si *S* est une surface fermée entourant un volume τ, on oriente toujours $d\vec{S}$ vers l'extérieur.

Forme locale (définition)



Le flux élémentaire $dF_{\vec{V}} = F_{\vec{V}}\left(S(d\tau)\right)$ de $\vec{V}$ sortant à travers la surface *S* entourant le volume élémentaire $d\tau$ est proportionnel à ce volume.

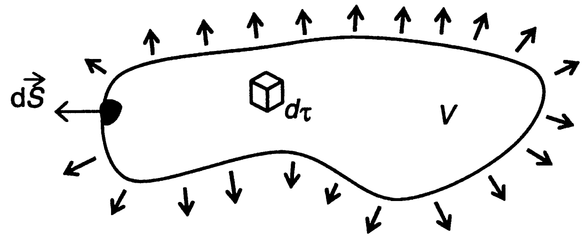
On appelle **divergence** de $\vec{V}$ (notée div$\vec{V}$) le coefficient de proportionnalité.

$$dF_{\vec{V}} = F_{\vec{V}}\left(S(d\tau)\right) = \sum_{i=1}^{6} \vec{V}\cdot\vec{S}_i = div\,\vec{V}\,d\tau\,,$$

où S_i désigne les surfaces des 6 faces du cube $d\tau$.

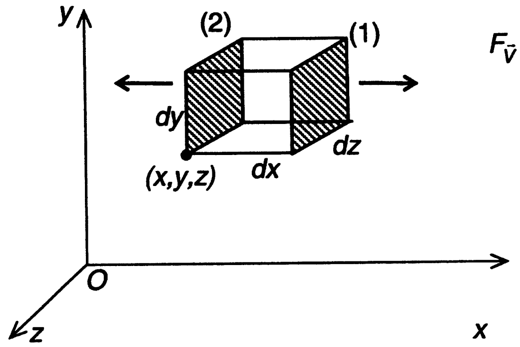
Forme globale (formule d'Ostrogradski)

Le flux de $\vec{V}$ sortant à travers une surface fermée *S(V)* entourant le volume *V* est égal à la somme de div $\vec{V}$ sur tout le volume :



$$F_{\vec{V}}\left(S(V)\right) = \iint_{S(V)} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{V}\,d\tau$$

Calcul de la divergence en coordonnées cartésiennes

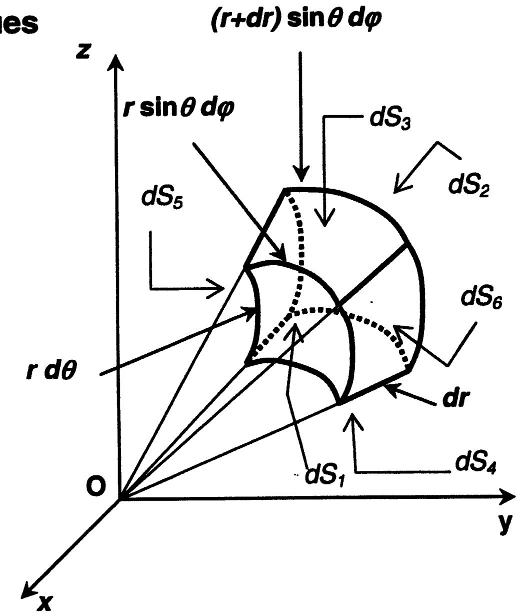


$$F_{\vec{V}}(S_1 \cup S_2) = V_{x+dx}\, dy\, dz - V_x\, dy\, dz$$
$$\quad \hookrightarrow x+dx \qquad \hookrightarrow x$$
$$= [V_x(x+dx,y,z) - V_x(x,y,z)]\, dy\, dz$$
$$= \left[\frac{\partial V_x}{\partial x}(x,y,z)dx\right] dy\, dz$$
$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} d\tau$$

En sommant sur les deux autres couples de forces :

$$F_{\vec{V}}(S(d\tau)) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) d\tau \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \cdot \vec{V}}$$

Calcul de la divergence en coordonnées sphériques



Soit le champ de vecteurs :
$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi$

Le volume élémentaire en coordonnées sphériques est :
$d\tau = dr \;\; rd\theta \;\; r\sin\phi\, d\varphi$.

La surface dS, entourant ce volume, est composées de 6 facettes : $dS = dS_1 \cup dS_2 \cup dS_3 \cup dS_4 \cup dS_5 \cup dS_6$.

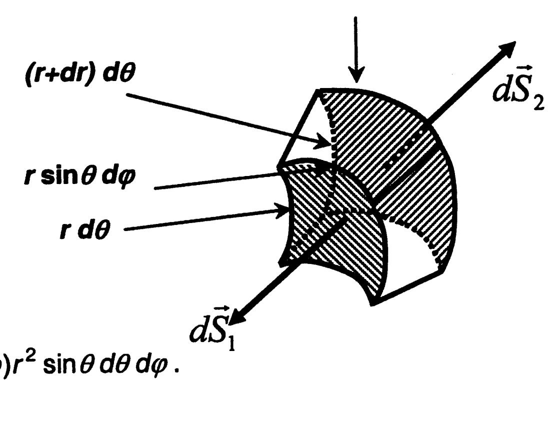
Par définition de la divergence le flux de $\vec{E}$ à travers la surface fermée dS est :

$$F_{\vec{E}}(dS) = \mathrm{div}\,\vec{E}\; d\tau \qquad (1)$$

Pour calculer la divergence il faut donc calculer le flux de $\vec{E}$ sortant de $d\tau$, qui s'écrit : $F_{\vec{E}}(dS) = \sum_{i=1}^{6} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i$.

<u>Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_1 et dS_2 perpendiculaire à $\vec{u}_r$:</u> $d\vec{S}_1 = -dS_1\vec{u}_r$ et $d\vec{S}_2 = dS_2\vec{u}_r$

$$F_{\vec{E}}(dS_1 \cup dS_2) = \vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}(r+dr,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_2 = -dS_1E_r(r,\theta,\varphi) + dS_2E_r(r+dr,\theta,\varphi).$$



Les surfaces dS_1 et dS_2 ne sont pas égales :
$dS_1 = r\,d\theta\; r\sin\theta\, d\varphi$ et
$$dS_2 = (r+dr)\,d\theta\,(r+dr)\sin\theta\, d\varphi$$
$$= (r^2 + 2rdr + dr^2)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$\approx (r^2 + 2rdr)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
car, dr étant très petit, on ne garde pas le terme d'ordres 2 en dr.

On obtient donc
$$F_{\vec{E}}(S_1 \cup S_2) = E_r(r+dr,\theta,\varphi)(r^2+2rdr)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi - E_r(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

Par ailleurs : $E_r(r+dr,\theta,\varphi) - E_r(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\partial E_r}{\partial r} dr$, donc :

$$F_{\vec{E}}(dS_1 \cup dS_2) = \left(E_r(r,\theta,\varphi) + \frac{\partial E_r}{\partial r} dr\right)\left(r^2 + 2rdr\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi - E_r(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \left(r^2 \frac{\partial E_r}{\partial r} dr + 2rdr\, E_r(r,\theta,\varphi) + 2r\frac{\partial E_r}{\partial r}(dr)^2\right)\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

en négligeant le terme en $(dr)^2$ il vient :

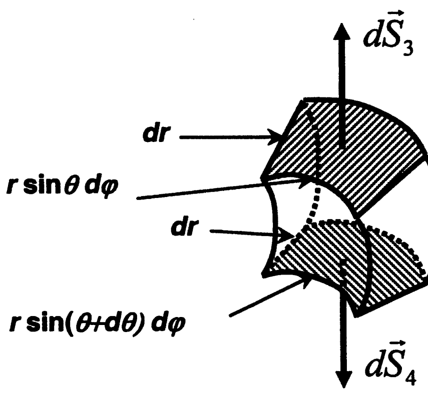
$$F_{\vec{E}}(dS_1 \cup dS_2) = \frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r}\, d\tau. \qquad (2)$$

Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_3 et dS_4 perpendiculaire à $\vec{u}_\theta$: $d\vec{S}_3 = -dS_3\vec{u}_\theta$ et $d\vec{S}_4 = dS_4\vec{u}_\theta$

$$F_{\vec{E}}(dS_3 \cup dS_4) = \vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_3 + \vec{E}(r,\theta+d\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_4 = -dS_3 E_\theta(r,\theta,\varphi) + dS_4 E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi).$$

Les surfaces dS_3 et dS_4 ne sont pas égales :
$dS_3 = dr\ r\sin\theta\, d\varphi$ et
$dS_4 = dr\ r\sin(\theta + d\theta)\, d\varphi$.

Le développement limité de $\sin(\theta + d\theta)$ au voisinage de θ donne (premier ordre en $d\theta$) :
$\sin(\theta + d\theta) \approx \sin\theta + \dfrac{d\sin\theta}{d\theta} d\theta = \sin\theta + \cos\theta\ d\theta$ donc
$dS_4 \approx dr\ r(\sin\theta + \cos\theta\ d\theta)d\varphi$.



On obtient donc :
$F_{\vec{E}}(S_3 \cup S_4) = E_\theta(r,\theta+d\theta,\varphi)\, r\, dr(\sin\theta + \cos\theta\, d\theta)d\varphi - E_\theta(r,\theta,\varphi) r\, dr \sin\theta\, d\varphi$.

Or : $E_\theta(r,\theta + d\theta,\varphi) = E_\theta(r,\theta,\varphi) + \dfrac{\partial E_\theta}{\partial \theta} d\theta$, donc :

$$F_{\vec{E}}(S_3 \cup S_4) = E_\theta(r,\theta,\varphi) r\, dr \cos\theta\, d\theta\, d\varphi + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} r\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} r\, dr \cos\theta (d\theta)^2\, d\varphi$$

en négligeant le terme en $(d\theta)^2$ il vient :

$$F_{\vec{E}}(S_3 \cup S_4) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(E_\theta(r,\theta,\varphi)\cos\theta + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}\sin\theta\right) r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, E_\theta)\, d\tau. \qquad (3)$$

Flux de $\vec{E}$ à travers les facettes dS_5 et dS_6 perpendiculaire à $\vec{u}_\varphi$: $d\vec{S}_5 = -dS_5\vec{u}_\varphi$ et $d\vec{S}_6 = dS_6\vec{u}_\varphi$

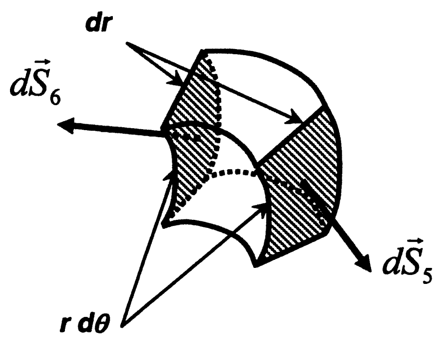
$$F_{\vec{E}}(dS_5 \cup dS_6) = \vec{E}(r,\theta,\varphi)\cdot d\vec{S}_5 + \vec{E}(r,\theta,\varphi + d\varphi)\cdot d\vec{S}_6 = -dS_5 E_\varphi(r,\theta,\varphi) + dS_6 E_\varphi(r,\theta,\varphi + d\varphi).$$

Les surfaces dS_5 et dS_6 sont égales : $dS_5 = dS_6 = dr\, r\, d\theta$.

Sachant que $E_\varphi(r,\theta,\varphi + d\varphi) = E_\varphi(r,\theta,\varphi) + \dfrac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$,

on a immédiatement :

$$F_{\vec{E}}(dS_5 \cup dS_6) = dr\, r\, d\theta \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} dV. \qquad (4)$$



D'après les équations (2), (3) et (4) :

$$F_{\vec{E}}(S) = \sum_{i=1}^{6} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \, E_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right) d\tau$$

donc par définition de div $\vec{E}$ (1) : $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \, E_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}}$

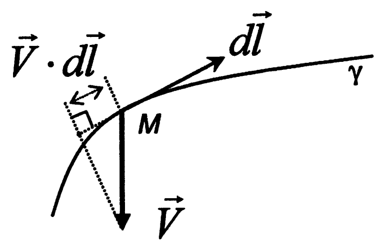
Exemple : théorème de Gauss (en électrostatique)

Soit $\vec{E}$ le champ électrique, Q les charges électriques et ρ la densité volumique de charge.
Soient S et V tels que : S est une surface entourant un volume V qui contient les charges Q.

Forme globale : Flux de $\vec{E}$ à travers S : $F_{\vec{E}}(S) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \displaystyle\iiint_{V(S)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau$

Forme locale : $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

2.4. Rotationnel (forme locale de la circulation)

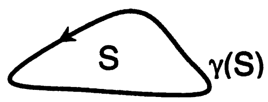


Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur (qui à tout point M(x, y, z) associe un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$).

Définition

On appelle **circulation** de $\vec{V}$ le long de la courbe orientée γ le scalaire : $C_{\vec{V}}(\gamma) = \displaystyle\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{dl}$

Lorsque γ est fermée : $C_{\vec{V}}(\gamma) = \displaystyle\oint_\gamma \vec{V} \cdot \vec{dl}$

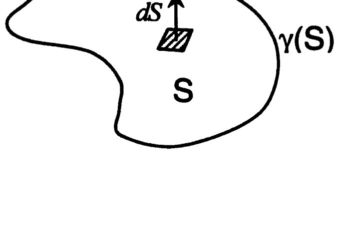


Propriété-définition (forme locale)

La circulation sur un contour élémentaire fermé $d\gamma$ entourant une surface élémentaire $d\vec{S}(d\gamma) = dS\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ vecteur unitaire) est "proportionnelle" à cette surface. On appelle **rotationnel** de $\vec{V}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$, vérifiant : $C_{\vec{V}}(d\gamma) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} \cdot d\vec{S}$

Remarque : le choix de $\vec{n}$ oriente la surface $d\vec{S}(d\gamma)$ et son contour $d\gamma$ (règle de la "main droite" ou du "tire bouchon")

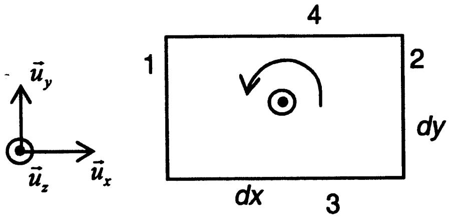
Forme globale (Théorème de Stokes-Ampère)



$$C_{\vec{V}}(\gamma(S)) = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} \cdot d\vec{S}$$

Calcul du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Soit le contour élémentaire $d\gamma$ fermé : $d\gamma = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4$



$$\begin{aligned} C_{\vec{V}}(1 \cup 2) &= C_{\vec{V}}(1) + C_{\vec{V}}(2) \\ &= \vec{V}(x,y)\cdot d\vec{l}_1 + \vec{V}(x+dx,y)\cdot d\vec{l}_2 \\ &= \vec{V}(x,y)\cdot(-dy\,\vec{u}_y) + \vec{V}(x+dx,y)\cdot(-dy\,\vec{u}_y) \\ &= [V(x+dx,y) - V(x,y)]dy \\ &= \frac{\partial V_y}{\partial x}dxdy \end{aligned}$$

De même $C_{\vec{V}}(3 \cup 4) = -\dfrac{\partial V_x}{\partial y}dxdy$.

donc $C_{\vec{V}}(d\gamma) = C_{\vec{V}}(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)dxdy = \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)dS$ avec $d\vec{S}(d\gamma) = dS\,\vec{u}_z$.

Par identification avec la définition du rotationnel on obtient la composante suivant z de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$:

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}\right)_z = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).$$

Les autres composantes s'obtiennent de la même manière : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{matrix}\right. = \overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}$.

Exemple : Théorème d'Ampère (magnétostatique)

$\vec{B}$ est le champ magnétique, I le courant et $\vec{j}$ la densité de courant.

Forme globale : $C_{\vec{B}}(\gamma) = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 \displaystyle\iint_{S(\gamma)} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(\gamma)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot d\vec{S}$

Forme locale : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$

2.5. <u>COMPLEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE</u>

Laplacien scalaire et Laplacien vectoriel

<u>Définition :</u> on appelle <u>*laplacien scalaire*</u> d'une fonction scalaire *f(M)* le scalaire définit par :

$$\Delta = \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}$$

En coordonnées cartésiennes *f(M) = f(x,y,z)* et :

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)_{x,y}$$

On appelle *laplacien vectoriel* d'un champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z)$ le vecteur définit en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\Delta}\vec{V} = (\Delta V_x)\vec{u}_x + (\Delta V_y)\vec{u}_y + (\Delta V_z)\vec{u}_z$$

Identité entre opérateurs

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{0}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div} - \vec{\Delta}$ $\qquad$ $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}} = 0$

Quelques formules utiles

$$\overrightarrow{\text{grad}}(nm) = n\,\overrightarrow{\text{grad}}\,m + m\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$$
$$\text{div}(m\vec{A}) = m\,\text{div}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,m)\cdot\vec{A}$$
$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(m\vec{A}) = m\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} + (\overrightarrow{\text{grad}}m)\wedge\vec{A}$$

moins fréquente : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}(\text{div}\,\vec{B}) - \vec{B}(\text{div}\,\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}$

Notation « nabla » : $\vec{\nabla}$

Certain ouvrage introduisent le vecteur[1] symbolique « nabla », noté $\vec{\nabla}$, de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Cela permet d'écrire :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \vec{\nabla}f$ $\qquad$ $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$, $\qquad$ $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V}$ $\qquad$ $\Delta f = \nabla^2 f$

Remarque : L'utilisation du vecteur nabla est hasardeuse pour établir les formules entre opérateurs ; en particulier, elle peut conduire à un résultat faux dans le cas de $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B})$.

Remarque : L'utilisation du vecteur nabla n'est possible qu'en coordonnées cartésiennes !

2.6. Gradient, divergence, rotationnel et laplacien dans les coordonnees usuelles

Coordonnées cartésiennes (*x,y,z*)

Base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Soient la fonction $f(x,y,z)$ et le champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z) = V_x\,\vec{u}_x + V_y\,\vec{u}_y + V_z\,\vec{u}_z$

$$\overrightarrow{grad}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{u}_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{u}_y + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{u}_z$$

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\right)_{x,y}$$

Δ est le laplacien scalaire

$$\text{div}\,\vec{V} = \left.\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left.\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)_{x,z} + \left.\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{x,y}$$

[1] En fait c'est un opérateur.

$$\text{rot}\,\vec{V} = \left[\left.\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)_{x,z} - \left.\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)_{x,y}\right]\vec{u}_x + \left[\left.\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)_{x,y} - \left.\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)_{y,z}\right]\vec{u}_y + \left[\left.\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)_{y,z} - \left.\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{x,z}\right]\vec{u}_z$$

Coordonnées sphériques (r,θ,φ)

Base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$)

Soient la fonction $f(r,\theta,\varphi)$ et le champ de vecteur $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = V_r\,\vec{u}_r + V_\theta\,\vec{u}_\theta + V_\varphi\,\vec{u}_\varphi$

$$\overrightarrow{grad} f = \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \vec{u}_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{u}_\theta + \left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{u}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} + \left.\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)_{r,\theta}\right\}$$

$$\text{div}\,\vec{V} = \left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 V_r\right)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(V_\theta \sin\theta\right)}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} + \left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}$$

$$\text{rot}\,\vec{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\left.\frac{\partial\left(V_\varphi \sin\theta\right)}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} - \left.\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}\right]\vec{u}_r$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\left.\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} - \left.\frac{\partial\left(r V_\varphi\right)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\right]\vec{u}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\left.\frac{\partial\left(r V_\theta\right)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} - \left.\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\right]\vec{u}_\varphi$$

Coordonnées cylindriques (ρ,φ,z)

Base ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$, $\vec{u}_z$)

Soient la fonction $f(\rho,\varphi,z)$ et le champ de vecteur $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = V_\rho\,\vec{u}_\rho + V_\varphi\,\vec{u}_\varphi + V_z\,\vec{u}_z$

$$\overrightarrow{grad} f = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} \vec{u}_\varphi + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} \vec{u}_z$$

$$\Delta f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}\right)_{\varphi,z} + \left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} + \left.\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)_{\rho,z} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\rho,\varphi}$$

$$\text{div}\,\vec{V} = \left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho V_\rho\right)}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} + \left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} + \left.\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}$$

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \left[\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z} - \left.\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi}\right]\vec{u}_\rho + \left[\left.\frac{\partial V_\rho}{\partial z}\right)_{\rho,\varphi} - \left.\frac{\partial (V_z)}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z}\right]\vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\left.\frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho}\right)_{\varphi,z} - \left.\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)_{\rho,z}\right]\vec{u}_z$$