Rappelle sur L'intégration et fonction primitive

Soit *f(x)* et *G(x)* deux fonctions définies sur l'intervalle $x \in [a,b]$. On appelle la fonction G(x) est une primitive de la fonction *f(x)* si : $\boxed{G'(x) = f(x).}$

Pour Trouver une primitive d'une fonction revient à faire le processus inverse de la dérivée :

$$\boxed{G'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{dG(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow \quad dG(x) = f(x).dx}$$

On défini un opérateur intégrale ($\int$) (c'est l'inverse de dérivée) pour trouver la fonction G(x). Donc on intègre les membres de l'équation on trouve :

$\boxed{\int dG(x) = \int f(x).dx + C}$ (Tel que C c'est une constant d'intégrale, désigné qu'il existe plusieurs fonction primitive de *f(x)*), Donc $\boxed{G(x) = \int f(x).dx + C}$

Méthode d'intégration :

Il existe 4 méthodes usuelles d'intégration :

- L'intégration immédiate.
- L'intégration *d'une fonction sous formes fraction par la méthode décomposition*
- L'intégration par partie.
- L'intégration par changement de variables.

Les deux dernières ayant pour but de se ramener à la première.

1) L'intégration immédiate :

Dans cette méthode on déduit les lois des intégrales à partir des lois des dérives connues.

ex 1:

$\frac{dF_{(x)}^N}{dx} = N.F_{(x)}^{N-1}.\frac{dF_{(x)}}{dx} \Rightarrow dF_{(x)}^N = N.F_{(x)}^{N-1}.dF_{(x)}$ On intègre les membres on trouve

$$\int dF_{(x)}^N = \int N.F_{(x)}^{N-1}.dF_{(x)} \Rightarrow \int N.F_{(x)}^{N-1}.dF_{(x)} = F_{(x)}^N + C \Rightarrow \boxed{\int F_{(x)}^N.dF_{(x)} = \frac{1}{N+1}F_{(x)}^{N+1} + C}$$

ex 2: $$\boxed{\int \frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}^N} = \int F_{(x)}^{-N} dF_{(x)} = \frac{1}{-N+1}F_{(x)}^{-N+1} + C}$$

ex 3: $$\boxed{\int \sqrt{F_{(x)}}.dF_{(x)} = \int F_{(x)}^{1/2}.dF_{(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}F_{(x)}^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}F_{(x)}^{\frac{3}{2}}}$$

	La formule de la dérive	La formule d'intégration
Ex4	$\frac{d}{dx}\left[\exp\left(F_{(x)}\right)\right] = \frac{dF_{(x)}}{dx}.\exp\left(F_{(x)}\right)$	$\int \exp\left(F_{(x)}\right).dF_{(x)} = \exp\left(F_{(x)}\right) + C$
Ex5	$\frac{d\left[Ln\left(F_{(x)}\right)\right]}{dx} = \frac{\frac{dF_{(x)}}{dx}}{F_{(x)}}$	$\int \frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}} = Ln\left(F_{(x)}\right) + C$
Ex6	$\frac{d\left[Cos\left(F_{(x)}\right)\right]}{dx} = \frac{-dF_{(x)}}{dx}.Sin\left(F_{(x)}\right)$	$\int Sin\left(F_{(x)}\right).dF_{(x)} = -Cos\left(F_{(x)}\right) + C$
Ex7	$\frac{d\left[Sin\left(F_{(x)}\right)\right]}{dx} = \frac{dF_{(x)}}{dx}.Cos\left(F_{(x)}\right)$	$\int Cos\left(F_{(x)}\right).dF_{(x)} = Sin\left(F_{(x)}\right) + C$
Ex8	$\frac{d}{dx}\left[ArcTan\left(\frac{F_{(x)}}{a}\right)\right] = \frac{dF_{(x)}}{dx}.\frac{a}{a^2 + F_{(x)}^2}$	$\int \frac{dF_{(x)}}{a^2 + F_{(x)}^2} = \frac{1}{a}.ArcTan\left(\frac{F_{(x)}}{a}\right) + C$
Ex9	$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V.dU - U.dV}{V^2}$	$\int \frac{V.dU - U.dV}{V^2} = \int d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U}{V}$

2) **_L'intégrale d'une fonction sous formes fraction par la méthode décomposition_** : $f(x)=\dfrac{P_N(\mathrm{x})}{Q_M(x)}$

- $P_N(\mathrm{x})$ c'est un polynôme ordre N et $Q_M(x)$ c'est un polynôme ordre M

Pour calculer $\boxed{\int \dfrac{P_N(\mathrm{x})}{Q_M(x)}.dx}$, on suivre les étapes suivante :

➢ Le degré de $P_N(\mathrm{x})$ doit être inférieur à le degré de $\boxed{Q_M(x)}$(N<M) **Si non** on fait la division **euclidienne** dans ce cas on trouve : $\boxed{f(x)=E_{N1}+\dfrac{H_{N2}(\mathrm{x})}{Q_M(x)}}$ tel que

- E_{N1} est partie entier de la division euclidienne.
- $H_{N2}(\mathrm{x})$ c'est le reste de la division tel que $N2<M$.

➢ on décompose $\boxed{\dfrac{H_{N2}(\mathrm{x})}{Q_M(x)}}$ en des éléments simples comme suit :

$\boxed{\dfrac{H_{N2}(\mathrm{x})}{Q_M(x)}=\sum\dfrac{A_i}{(x-R_i)^i}+\sum\dfrac{B_i.x+C_i}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^i}}$ (Tel que R_i les racines réel, $\alpha\pm\beta.I$ racines complexe)

Exemple : factorisation d'un polynôme ordre 2 : $Q_2(x)=a.x^2+b.x+c$

On calcule : $\Delta=b^2-4.a.c$ on trouve 3 cas

1ere cas $\Delta>0$ $R_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$ $R_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$ $Q_2(x)=a.(x-R_1).(x-R_2)$	**2eme cas** $\Delta=0$ $R_1=R_1=\dfrac{-b}{2.a}=R$ $Q_2(x)=a.(x-R)^2$	• **3eme cas** $\Delta<0\Rightarrow\Delta=-\lambda^2=I^2.\lambda^2$ $R_1=\dfrac{-b-I.\lambda}{2.a}$; $R_1=\dfrac{-b+I.\lambda}{2.a}$ $R_{1,\,2}=\alpha\pm\beta.I$; $\alpha=\dfrac{-b}{2.a}$; $\beta=\dfrac{\lambda}{2.a}$ $Q_2(x)=a.\left[(x-\alpha)-\beta.I\right].\left[(x-\alpha)+\beta.I\right]$ $Q_2(x)=a.\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$

3) l'intégration par parties:

Dans cette méthode on utilise la loi de dérivé de produit deux fonction U*V Donc:

$$\frac{d[U*V]}{dx}=V.\frac{d[U]}{dx}+U\frac{d[V]}{dx}\Rightarrow d(U*V)=V.dU+U.dV\Rightarrow\int d(U*V)=\int V.dU+\int U.dV$$

$$U*V=\int V.dU+\int U.dV \qquad \boxed{\Rightarrow\int U.dV=U*V-\int V.dU}$$

Cette formule permet de remplacer le calcul de $\int U.dV$ par celui de $\int V.dU$.

Donc un choix judicieux des fonctions U et V peut rendre l'intégration immédiate.

Un mouvait choix des fonctions U et V remplace l'intégrale donnée par une autre plus compliquée.

• **Exemple** $\int \mathrm{ArcTan(x)}.dx=?$ $\rightarrow\int U.dV=U*V-\int V.dU$ $\left.\begin{array}{l} U=ArcTan(x)\xrightarrow{derive}dU=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dV=dx\xrightarrow{integral}V=x\end{array}\right\}\rightarrow$ $\int ArcTan(x).dx=x.ArcTan(x)-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2.x.dx}{1+x^2}$ $\boxed{\int ArcTan(x).dx=x.ArcTan(x)-\dfrac{1}{2}Ln(1+x^2)+C}$	• **Exemple** $\int Ln(a.x+b).dx=?\rightarrow\int U.dV=U*V-\int V.dU$ $\left.\begin{array}{l} U=Ln(a.x+b)\xrightarrow{derive}dU=\dfrac{a.\,dx}{a.x+b}\\ dV=dx\xrightarrow{integral}V=x\end{array}\right\}\rightarrow$ $\int Ln(a.x+b).dx=x.Ln(a.x+b)-\int\dfrac{(a.x+b-b).dx}{a.x+b}$ $\int Ln(a.x+b).dx=x.Ln(a.x+b)-\int dx+\dfrac{b}{a}\int\dfrac{a.dx}{a.x+b}$ $\boxed{\int Ln(a.x+b).dx=(x+\dfrac{b}{a}).Ln(a.x+b)-x}$

- **Intégrale de la forme** $\int P_N(x).\exp(a.x).dx = ?$ Tel que $P_N(x)$ est un polynôme de degré N

En intégrant N fois par parties on obtient :

$$\boxed{\int P_N(x).\exp(a.x).dx = \exp(a.x).\left[\frac{P_{N(x)}}{a} - \frac{P'_{N(x)}}{a^2} + \frac{P''_{N(x)}}{a^3} - \dots\dots + (-1)^N.\frac{P^{(N)}_{N(x)}}{a^{N+1}}\right]}$$

Exemple : $\boxed{\int (x^2+3.x+1).\exp(2.x).dx = \exp(2.x).\left[\frac{x^2+3.x+1}{2} - \frac{2.x+3}{2^2} + \frac{2}{2^3}\right] = \exp(2.x).\left[\frac{x^2}{2} + x\right]}$

4) l'intégration par changement de variables :

Dans le cas d'intégrale difficile à calculer par l'intégral immédiate ou l'intégrale par parties, on doit faire un changement variable $x = \psi(z)$ pour faciliter le calcul.

Donc on a $x = \psi(z) \Rightarrow dx = d\psi(z)$ et on remplace dans l'intégral on trouve : $\boxed{\int f(x).dx = \int f(\psi(z)).d\psi(z) + C}$

Exemple : $\int \exp(\sqrt{x}).dx = ?$ on pose $x = z^2 \xrightarrow{derive} dx = 2.z.dz$ on remplace :

$$\int \exp(\sqrt{x}).dx = \int 2.z.\exp(z).dz = \exp(z).\left[\frac{2.z}{1} - \frac{2}{1^2}\right] = \exp(z).[2.z-2] = \exp(\sqrt{x}).\left[2.\sqrt{x}-2\right]$$

- **Exercice : Calculer l'intégrale des fonctions suivant :**
- **En utilisant l'intégration immédiate :**

$\int (1+x)^2.dx = \frac{1}{3}(1+x)^3 + C$	$\int F_{(x)}^N.dF_{(x)} = \frac{1}{N+1}F_{(x)}^{N+1} + C$
$\int \frac{dx}{(2+x)^3} = \int (2+x)^{-3}.dx = \frac{1}{-3+1}(2+x)^{-3+1} = \frac{-1}{2(2+x)^2} + C$	$\int \frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}^N} = \int F_{(x)}^{-N}dF_{(x)} = \frac{1}{-N+1}F_{(x)}^{-N+1} + C$
$\int \frac{2.x.dx}{1+x^2} = Ln(1+x^2) + C$	$\int \frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}} = Ln(F_{(x)}) + C$
$\int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}ArcTan(\frac{x}{2}) + C$	$\int \frac{dF_{(x)}}{a^2+F_{(x)}^2} = \frac{1}{a}.ArcTan\left(\frac{F_{(x)}}{a}\right) + C$
$\int 6.x.\exp(3.x^2+1).dx = \exp(3.x^2+1) + C$	$\int \exp(F_{(x)}).dF_{(x)} = \exp(F_{(x)}) + C$
$\int 2.x.Cos(x^2).dx = Sin(x^2) + C$	$\int Cos(F_{(x)}).dF_{(x)} = Sin(F_{(x)}) + C$
$\int 3.Sin(3.x+5).dx = -Cos(3.x+5) + C$	$\int Sin(F_{(x)}).dF_{(x)} = -Cos(F_{(x)}) + C$

- **En utilisant la méthode décomposition des fonctions fraction rational**

$\int \frac{dx}{x^2+5.x+6} = \int \frac{dx}{(x+2).(x+3)}$ (méthode décomposition) $= \int \frac{A.dx}{(x+2)} + \int \frac{B.dx}{(x+3)} = A.Ln(x+2) + B.Ln(x+3) + C$	$\int \frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}} = Ln(F_{(x)})$
$\int \frac{dx}{x^2+2.x+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int (x+1)^{-2}.dx = \frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1} = \frac{-1}{x+1} + C$	$\int \frac{dF_{(x)}}{F_{(x)}^N} = \int F_{(x)}^{-N}dF_{(x)} = \frac{1}{-N+1}F_{(x)}^{-N+1}$
$\int \frac{dx}{x^2+2.x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}.ArcTan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$	$\int \frac{dF_{(x)}}{a^2+F_{(x)}^2} = \frac{1}{a}.ArcTan\left(\frac{F_{(x)}}{a}\right)$

- $\int \exp((\alpha+\beta.I).x).dx = \int \frac{\alpha+\beta.I}{\alpha+\beta.I}.\exp((\alpha+\beta.I).x).dx = \frac{1}{\alpha+\beta.I}.\exp((\alpha+\beta.I).x)$

$$\int e^{((\alpha+\beta.I).x)}.dx = \frac{e^{\alpha.x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[(\alpha.\cos(\beta.x)+\beta.\sin(\beta.x)) + I*(-\beta.\cos(\beta.x)+\alpha.\sin(\beta.x))\right] = \int e^{\alpha.x}.(\cos(\beta.x)+I.\sin(\beta.x)).dx$$

Par identification on trouve :

$$\boxed{\int \exp(\alpha.x).\cos(\beta.x).dx = \frac{e^{\alpha.x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha.\cos(\beta.x)+\beta.\sin(\beta.x))}$$

$$\boxed{\int \exp(\alpha.x).\sin(\beta.x).dx = \frac{e^{\alpha.x}}{\alpha^2+\beta^2}(-\beta.\cos(\beta.x)+\alpha.\sin(\beta.x))}$$

- $$\frac{x^3-x^2-7.x+9}{(x^2-25).(x^2+25)}=\frac{x^3-x^2-7.x+9}{(x-5).(x+5).(x^2+25)}=\frac{a_0}{x-5}+\frac{a_1}{x+5}+\frac{a_2+a_3.x}{x^2+25}=\frac{a_0}{x-5}+\frac{a_1}{x+5}+\frac{a_2}{x^2+5^2}+\frac{a_3.x}{x^2+25}$$

$$\int\frac{x^3-x^2-7.x+9}{(x^2-25).(x^2+25)}.dx = a_0.Ln(x-5)+a_1.Ln(x+5)+\frac{a_2}{5}.ArcTan(\frac{x}{5})+\frac{a_3}{2}.Ln(x^2+25)+C^{st}$$

- $$\frac{x^3+x-1}{x.(1+x)^3}=\frac{a}{x}+\frac{b.(1+x)^2+c.(1+x)\ +d}{(1+x)^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(1+x)}+\frac{c}{(1+x)^2}+\frac{d}{(1+x)^3}$$

$$\int\frac{(x^3+x-1).dx}{x.(1+x)^3}=\int\frac{a}{x}.dx+\int\frac{b}{(1+x)}.dx+\int\frac{c}{(1+x)^2}.dx+\int\frac{d}{(1+x)^3}.dx=a.Ln(x)+b.Ln(1+x)+\frac{-c}{1+x}-\frac{d}{2.(1+x)^2}$$

- $\int\frac{x^3+x^2+2x-1}{9+x^2}.dx=?$ On fait la division **euclidienne on trouve** $\rightarrow\int\frac{\left[(x+1).(x^2+9)-7.x-10\right].dx}{x^2+9}$

$$=\int(x+1).dx-\frac{7}{2}\int\frac{2..x.dx}{x^2+9}-10.\int\frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{2}.(x+1)^2-\frac{7}{2}.Ln(x^2+9)-\frac{10}{3}arcTan\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

- **Intégration des fonctions hyperboliques : On** a les fonctions hyperboliques suivant

Cosinus hyperbolique $\rightarrow Ch(x)=\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$		sinus hyperbolique $\rightarrow Sh(x)=\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$	
Tangent hyperbolique $\rightarrow Th(x)=\frac{Sh(x)}{Ch(x)}$		**Tel que :** $\rightarrow Ch^2(x)-Sh^2(x)=1$	
$\frac{d}{dx}[Ch(x)]=Sh(x)$	$\frac{d}{dx}[Sh(x)]=Ch(x)$	$\int Ch(x).dx=Sh(x)+C$	$\int Sh(x).dx=Ch(x)+C$

Exercice : calcule l'intégrale des fonctions hyperboliques **inverses** : on donne $\boxed{Ch^2(y)-Sh^2(y)=1}$

- $y=ArcCh(x)\ \rightarrow Ch(y)=x$ On dérive /x on trouve : $Sh(y)\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \sqrt{(Ch(y))^2-1}.\frac{dy}{dx}=1$

$\sqrt{x^2-1}.\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow dy=\frac{1.dx}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \boxed{\int dy=\int d(ArcCh(x))=\int\frac{1.dx}{\sqrt{x^2-1}}=ArcCh(x)}$

- $y=ArcSh(x)\ \rightarrow Sh(y)=x$ On dérive /x on trouve : $Ch(y)\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \sqrt{1+(Sh(y))^2}.\frac{dy}{dx}=1$

$\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow dy=\frac{1.dx}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \boxed{\int dy=\int d(ArcSh(x))=\int\frac{1.dx}{\sqrt{1+x^2}}=ArcSh(x)}$

Exercice : calcule l'intégrale des fonctions trigonométrique inverses : on donne $\boxed{Cos^2(y)+Sin^2(y)=1}$

- $y=Arc\tan(x)\ \rightarrow \tan(y)=\frac{\sin(y)}{\cos(y)}=x$ On dérive /x on trouve : $\frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)}\frac{dy}{dx}=1$

$\rightarrow \left(1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}\right)\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \left(1+(\tan(y))^2\right)\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=1$

$\rightarrow dy=\frac{dx}{\left(1+x^2\right)} \rightarrow \boxed{\int dy=\int d(Arc\tan(x))=\int\frac{1.dx}{1+x^2}=Arc\tan(x)}$

- $y=Arc\sin(x)\ \rightarrow \sin(y)=x$ On dérive /x on trouve : $\cos(y)\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \sqrt{1-(\sin(y))^2}.\frac{dy}{dx}=1$

$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow dy=\frac{1.dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \boxed{\int dy=\int d(Arc\sin(x))=\int\frac{1.dx}{\sqrt{1-x^2}}=Arc\sin(x)}$

- On pose $x=\frac{F}{a}$ déduire : $\boxed{\int\frac{dF}{F^2+a^2}=\frac{1}{a}ArcTan(\frac{F}{a})}$

$\boxed{\int\frac{1.dF}{\sqrt{a^2+F^2}}=ArcSh(\frac{F}{a})}$ $\boxed{\int\frac{1.dF}{\sqrt{a^2-F^2}}=Arc\sin(\frac{F}{a})}$ $\boxed{\int\frac{1.dF}{\sqrt{F^2-a^2}}=ArcCh(\frac{F}{a})}$