Module analyse numérique

L'objectif de ce module est la résolution des problèmes mathématique qui difficile a résolu analytiquement, comme :

Chapitre 1 : Résoudre équation non linéaire F(x)=0.

- méthode newton.
- méthode dichotomie

Chapitre 2 : intégration numérique $\left(\int_a^b f(x).dx\right)$

- méthode trapèze
- méthode Simpson

Chapitre 3 : équation différentielle du premier ordre de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

- méthode Euler
- méthode Euler modifié
- méthode Rang Kutta

Chapitre 4 : équation différentielle deuxième ordre de la forme $a(x).\frac{d^2y}{dx^2} + b(x).\frac{dy}{dx} + C(x).y = f(x)$

- méthode des différences finies.

Chapitre 5 : Problème d'interpolation.

- méthode moindre carrée

Chapitre 1 : Résoudre équation non linéaire F(x)=0.

Dans ce chapitre on a choisi quelle que méthode numérique pour trouver les solutions (les racines) de l'équation non linéaire F(x)=0.

- **La méthode de newton**

Cette méthodes consiste a remplacé la fonction f(x) par sa tangent dans un point estime (Xe) :

$$f(X) = f(Xe) + f\ '(Xe) * (X - Xe) = 0$$

Donc on cherche la solution de l'équation d'une droit :

$$X = XC = Xe - \frac{f(Xe)}{f\ '(Xe)}$$

(Tel que *XC* Solution calculé). Pour accepter XC comme solution elle doit être vérifié le teste de convergence :

Si $|\text{xc-xe}| < \varepsilon$ la solution est (***XC***)

Sinon on pose (***XE =XC***) et recalcule (***XC***) on répète le calcul jusqu'à la convergence

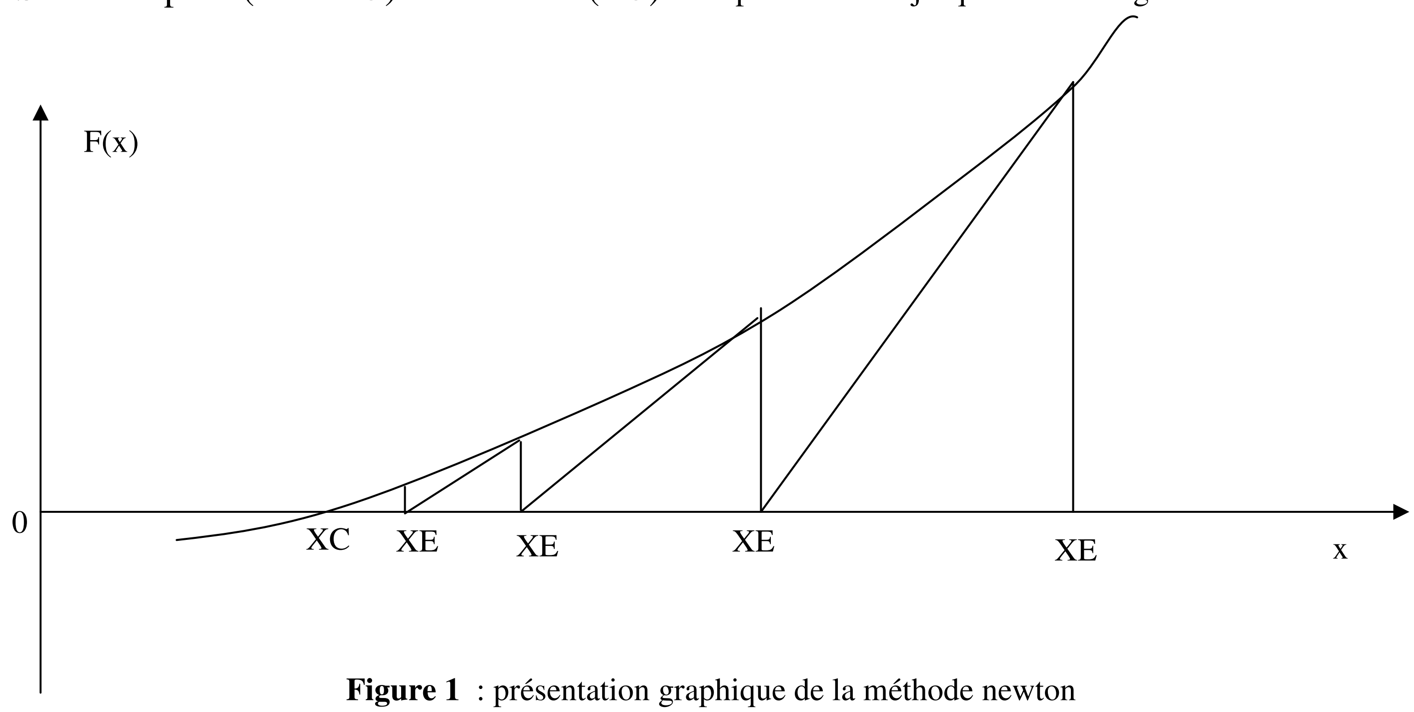


Figure 1 : présentation graphique de la méthode newton

Exercice 01

Soit f(x) une fonction continue dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$: $f(x) = \sin(x) - x + 1$

- Donner la prévision de La courbe f(x).
- donner la solution possible de l'équation f(x)=0.
- écrire un programme par langage Matlab qui résoudre f(x)=0

<u>Solution</u>

$f(x) = \sin(x) - x + 1$;

- Donner la prévision de La courbe *f(x).*

On calcule la dérive de la fonction *f(x)*

$$f'(x) = \cos(x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0 + 2.K.\pi$$

On a $\boxed{-1 \le \cos(x) \le +1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le \cos(x) - 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow -2 \le F'(x) \le 0}$ (donc f(x) est monotone sur $[-2\pi, 2\pi]$)

X	$-2.\pi$	***0***	**1.93**	$2.\pi$
F'(x)	**--**	***0***	**--**	
F(x)	$2.\pi+1$	1	0	$1-2.\pi$

- calcule la solution par la méthode de newton

Donc $$XC = xe - \frac{f(xe)}{f'(xe)} = xe - \frac{Sin(xe) - xe + 1}{\cos(xe) - 1}$$

Remarque : éviter la valeur estime qui annule ($f'(xe) = 0$)

- écrire un programme par langage Matlab qui résoudre f(x)=0 par la méthode de newton

```
xe , xc , erreur     1.0000    2.8305    1.8305
xe , xc , erreur     2.8305    2.0496    0.7809
xe , xc , erreur     2.0496    1.9387    0.1109
xe , xc , erreur     1.9387    1.9346    0.0041
xe , xc , erreur     1.9346    1.9346    0.0000
nombre_iteration =      5
la solution est 1.9346
```

```
clc
clear all
f =@(x) sin(x)-x+1 ;
df =@(x) cos(x)-1  ;
xe=1 ; eps=0.0001; it = 0;  itmax=100 ; erreur=1 ;
while(erreur>eps & it<=itmax )
    it=it+1 ;
    xc=xe-f(xe)/df(xe);
    erreur=abs(xc-xe) ;
    fprintf('xe , xc , erreur  %10.4f %10.4f %10.4f\n',xe,xc,erreur)
    xe=xc;
end
nombre_iteration=it
fprintf('la solution est %10.4f\n',xc)
```

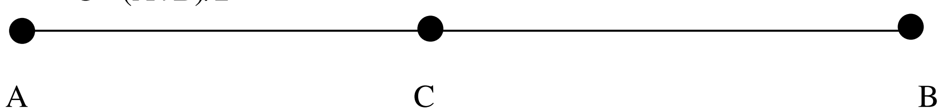
2 eme **La méthode de dichotomie (ou La méthode de bissection)**:

Pour trouver une solution dans l'intervalle [A, B] elle doit être vérifiée les conditions suivant :

- ✓ F(x) fonction continue et monotone dans l'intervalle [A,B]
- ✓ Et F(A)*F(B) < 0

On calcul le milieu de l'intervalle [A,B] :

C= (A+B)/2



On cherche la solution est ce que dans l'intervalle [A, C] ou [C, B]

SI F(A)*F(C) < 0

B=C

SI NON % (F(C)*F(B) < 0)

A=C

FIN SI

Si $|B-A| < \varepsilon$ la solution est C

SI NON on recalcule C= (A+B)/2 on répète le calcul jusqu'à la convergence

Exercice 01

Soit f(x) une fonction continue dans l'intervalle [0,3] : $f(x) = \sin(x) - x + 1$

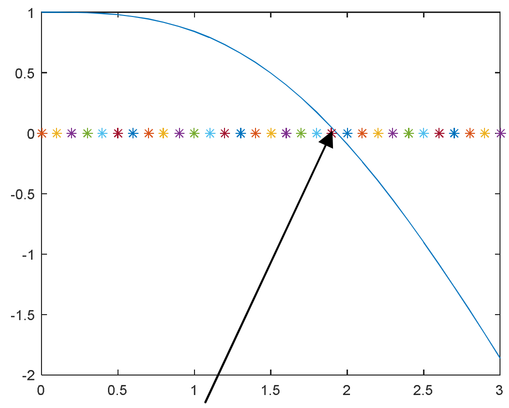
```
clc
clear all
f = @(x) sin(x)-x+1;
a=0  ;  b=3  ;  epslon =0.01 ;
if f(a)*f(b)<0
  fprintf('    a,     c  ,    b ,    f(a),    f(c) ,    f(b)\n')
        while(  abs(b-a)>epslon)
            c=(a+b)/2   ;
fprintf('%10.4f %10.4f %10.4f %10.4f %10.4f %10.4f\n',a,c,b,f(a),f(c),f(b))
             if f(a)*f(c)<0
             b=c;
             else
             a=c;
             end
        end
fprintf('la solution = %f\n',c)
else
fprintf(' pas de solution dans (a,b) ')
end
```

a	c	b	F(a)	F(c)	F(b)
0.0000	1.5000	3.0000	1.0000	0.4975	-1.8589
1.5000	2.2500	3.0000	0.4975	-0.4719	-1.8589
1.5000	1.8750	2.2500	0.4975	0.0791	-0.4719
1.8750	2.0625	2.2500	0.0791	-0.1810	-0.4719
1.8750	1.9688	2.0625	0.0791	-0.0469	-0.1810
1.8750	1.9219	1.9688	0.0791	0.0171	-0.0469
1.9219	1.9453	1.9688	0.0171	-0.0146	-0.0469
1.9219	1.9336	1.9453	0.0171	0.0013	-0.0146
1.9336	1.9395	1.9453	0.0013	-0.0066	-0.0146
La solution est c = 1.9395					

Exercice

- Tracer la courbe y=f(x) par la commande Plot(x,y)
- Par langage Matlab on peut résoudre équation non linéaire f(x)=0 numériquement, en utilisant la command
  fsolve(f,xe) Tel que ***xe*** la valeur estime.

```
clc
clear all
f=@(x)sin(x)-x+1
x=[0:0.1:3] ;
y=f(x);
plot(x,y,x,0,'-*')
xe=1 ; xc=fsolve(f,xe)
```



La solution est 1.93

Exercice 02

Résoudre équation non linéaire suivant $F(x) = x^2 - 2 + \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

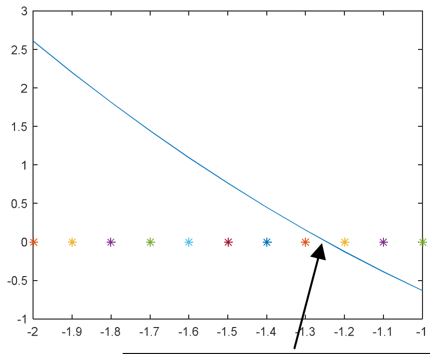
Méthode newton, $Xe = -2$, $\varepsilon = 0.001$

xe , xc , erreur	-2.0000	-1.3722	0.6278
xe , xc , erreur	-1.3722	-1.2504	0.1218
xe , xc , erreur	-1.2504	-1.2458	0.0047
xe , xc , erreur	-1.2458	-1.2458	0.0000

nombre_iteration =

4

la solution est   -1.2458



La solution est -1.2458

- ✓ Méthode dichotome, $[A,B] = [-2,-1]$, $\varepsilon = 0.01$

a	c	b	F(a)	F(c)	F(b)
-2.0000	**-1.5000**	**-1.0000**	**2.6065**	**0.7634**	**-0.6321**
-1.5000	**-1.2500**	**-1.0000**	**0.7634**	**0.0118**	**-0.6321**
-1.2500	**-1.1250**	**-1.0000**	**0.0118**	**-0.3233**	**-0.6321**
-1.2500	**-1.1875**	**-1.1250**	**0.0118**	**-0.1590**	**-0.3233**
-1.2500	**-1.2188**	**-1.1875**	**0.0118**	**-0.0744**	**-0.1590**
-1.2500	**-1.2344**	**-1.2188**	**0.0118**	**-0.0315**	**-0.0744**
-1.2500	**-1.2422**	**-1.2344**	**0.0118**	**-0.0099**	**-0.0315**
La solution est c = **-1.2422**					