

# CHAPITRE 1 : Résoudre les équations différentielles du 1<sup>ère</sup> ordre de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Dans ce chapitre on va étudier cinq types des équations suivant :

**1. Equation à variable séparées (E.V.S) :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{G(y)}$  ou bien  $G(y).dy = F(x).dx$

On intègre les deux membres de l'équation on trouve  $\int G(y).dy = \int F(x).dx + C$

**Ex :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y.Cos(y^2).(1+x^2)}$  on fait la séparation des variables et puit on intègre les deux membres de

$$\text{l'équation} \rightarrow \int 2.y.Cos(y^2).dy = \int \frac{2.x.dx}{1+x^2} + C \rightarrow \boxed{\sin(y^2) = \ln(1+x^2) + C}$$

$$\text{On a : } \int \cos(F).dF = \sin(F) \quad \text{et} \quad \int \frac{dF}{F} = \ln(F)$$

**2. Equation Homogène :**  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$  on se ramène à une (E.V.S) Si on pose un changement variable

$$\boxed{z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.z} \quad \text{on dérive /x} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1.z + x.\frac{dz}{dx}$$

On remplace dans l'équation  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z + x.\frac{dz}{dx} = F(z) \Rightarrow x.\frac{dz}{dx} = F(z) - z \Rightarrow \int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C$

**Ex :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 3.x.y + 5.x^2}{x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3.\left(\frac{y}{x}\right) + 5$  (E.H) : on pose  $z = \frac{y}{x} \rightarrow y = x.z$  on dérive /x

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 1.z + x.\frac{dz}{dx} \quad (\text{on remplace dans EH}) \rightarrow z + x.\frac{dz}{dx} = z^2 + 3.z + 5 \rightarrow \int \frac{dz}{z^2 + 2.z + 5} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{(z+1)^2 + 2^2} = \int \frac{dx}{x} + C \rightarrow \frac{1}{2} \text{Arc tan}\left(\frac{z+1}{2}\right) = \ln(x) + c \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{Arc tan}\left(\frac{y+x}{2.x}\right) = \ln(x) + c}$$

$$\text{On a : } \int \frac{dF}{a^2 + F^2} = \frac{1}{a} \cdot \text{ArcTan}\left(\frac{F}{a}\right) \quad \text{et} \quad \int \frac{dF}{F} = \ln(F)$$

**3. Equation Linéaire :**  $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$

• **Recherche la Solution Homogène**  $y_H = ? \rightarrow$  Résoudre Equation Sans Second Membre (E.S.S.M)

$$\frac{dy_H}{dx} + P(x).y_H = 0 \Rightarrow \int \frac{dy_H}{y_H} = -\int P(x).dx + C \Rightarrow \ln(y_H) = -\int P(x).dx + C$$

$$\Rightarrow y_H = e^{-\int P(x).dx} . e^C \Rightarrow y_H = K . e^{-\int P(x).dx}$$

• **Recherche la Solution Totale**  $y_T = ? \rightarrow$  Résoudre Equation Avec Second Membre (E.A.S.M), on utilise la méthode de variation de constant: Dans cette méthode on prend la forme de  $y_T$  est la même forme

$y_H$ , sauf que la constant  $K$  est variable en fonction de  $x$  donc:  $y_T = K(x).e^{-\int P(x).dx}$  on doit calculer  $K(x) = ?$ ,

on calcule  $\frac{dy_T}{dx} = \frac{dK(x)}{dx} . e^{-\int P(x).dx} - p(x).e^{-\int P(x).dx} . K(x)$  et on remplace dans l'équation :

$$\frac{dy_T}{dx} + P(x).y_T = Q(x) \Rightarrow \frac{dK(x)}{dx} . e^{-\int P(x).dx} - p(x).e^{-\int P(x).dx} . K(x) + K(x).p(x).e^{-\int P(x).dx} = Q(x)$$

$$\int dK(x) = K(x) = \int Q(x).e^{\int P(x).dx} . dx + C$$

#### 4. Équation différentielle de Bernoulli :

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x).y^\alpha$$

On se ramène au type linéaire en divisant par  $y^\alpha$ , puis on pose  $Z = y^{1-\alpha}$  et on dérive /x

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha).y^{-\alpha} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-\alpha} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{dz}{dx} \quad \text{on remplace dans l'équation :}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x).y^\alpha \Rightarrow y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + P(x).y^{1-\alpha} = Q(x) \Rightarrow \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{dz}{dx} + P(x).z = Q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x).z = (1-\alpha).Q(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} + P_1(x).z = Q_1(x) \quad (\text{Équation linéaire})$$

#### 5. Equation Quasi Homogène :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1.x + b_1.y + c_1}{a_2.x + b_2.y + c_2} \quad \text{on trouve 3 cas :}$$

**1<sup>ère</sup> cas ( $C_1=0$  et  $C_2=0$ )**  $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1.x + b_1.y}{a_2.x + b_2.y} = \frac{x \cdot \left( a_1 + b_1 \cdot \frac{y}{x} \right)}{x \cdot \left( a_2 + b_2 \cdot \frac{y}{x} \right)} = \frac{a_1 + b_1 \cdot \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \cdot \frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right)$  (c'est un type de l'équation

Homogène) on pose  $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1.z + x \cdot \frac{dz}{dx}$  on remplace dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z + x \cdot \frac{dz}{dx} = F(z) \Rightarrow x \cdot \frac{dz}{dx} = F(z) - z \rightarrow \int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + K \quad (\text{E.V.S})$$

**Exemple :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \rightarrow z + x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{1-z} \rightarrow \int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x} + C$

$$\rightarrow \int \frac{1 dz}{1+z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2.z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x} + C \rightarrow \text{ArcTan}(z) - \frac{1}{2} \cdot \text{Ln}(1+z^2) = \text{Ln}(x) + C$$

$$\text{ArcTan}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \cdot \text{Ln}\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \text{Ln}(x) + C$$

**2<sup>ème</sup> cas ( $C_1 \neq 0$  ou  $C_2 \neq 0$ ) on calcul**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1$$

Si  $\Delta = 0 \Rightarrow a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0 \Rightarrow a_1.b_2 = a_2.b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = R \Rightarrow \begin{cases} a_1 = R.a_2 \\ b_1 = R.b_2 \end{cases}$  on remplace dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1.x + b_1.y + c_1}{a_2.x + b_2.y + c_2} = \frac{R.(a_2.x + b_2.y) + c_1}{a_2.x + b_2.y + c_2} \quad \text{Dans ce cas on prend un changement variable comme suit :}$$

$$z = a_2.x + b_2.y \Rightarrow y = (z - a_2.x) / b_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} - a_2.1\right) / b_2 \quad \text{on remplace dans l'équation}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{dx} - a_2.1\right) / b_2 = \frac{R.Z + c_1}{Z + c_2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = b_2 \cdot \frac{R.Z + c_1}{Z + c_2} + a_2 = F(z) \Rightarrow \int \frac{dz}{F(z)} = \int dx + K \quad (\text{E.V.S})$$

**Exemple :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{-3.x - 3.y + 1}{x + y + 1} = \frac{-3.(x+y) + 1}{(x+y) + 1}$  on pose  $z = x + y \Rightarrow y = z - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$  on remplace

$$\text{dans l'équation : } \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{-3.z + 1}{z + 1} \rightarrow \int \frac{z+1}{z-1} dz = -2 \cdot \int dx + C \rightarrow \int \frac{z-1+2}{z-1} dz = -2 \cdot \int dx + C$$

$$\rightarrow \int 1 dz + \int \frac{2 dz}{z-1} = -2 \cdot \int dx + C \rightarrow z + 2 \cdot \text{Ln}(z-1) = -2.x + C \rightarrow 3.x + y + 2 \cdot \text{Ln}(x+y-1) = C$$

**3<sup>ème</sup> cas** ( $C_1 \neq 0$  ou  $C_2 \neq 0$  et  $\Delta \neq 0$ ) Dans ce cas on prend un changement variable comme suit:

$$\begin{cases} x = x_1 - \alpha \\ y = y_1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases} \text{ on remplace dans l'équation } \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{(a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1) - a_1 \cdot \alpha - b_1 \cdot \beta + c_1}{(a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1) - a_2 \cdot \alpha - b_2 \cdot \beta + c_2}$$

On calcule  $\alpha$  et  $\beta$  de tel sort  $\begin{cases} -a_1 \cdot \alpha - b_1 \cdot \beta + c_1 = 0 \\ -a_2 \cdot \alpha - b_2 \cdot \beta + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} \\ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} \end{cases}$

Tel que  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$  et  $\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$  et  $\Delta_\beta = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$  on se ramène à une équation homogène comme le 1<sup>ère</sup> cas

Donc on trouve comme le 1<sup>ère</sup> cas :  $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot y_1}{a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_1}$

**Exemple :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{x-y+4}$  ( $C_1 = 5 \neq 0$  ou  $C_2 = 4 \neq 0$  et  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ ) on fait des

**changement variables comme suit :**  $\begin{cases} x = x_1 - \alpha \\ y = y_1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases}$  On remplace dans l'équation on trouve

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{(x_1 + y_1) - \alpha - \beta + 5}{(x_1 - y_1) - \alpha + \beta + 4}, \text{ On calcule } \alpha \text{ et } \beta \text{ de tel sort } \begin{cases} -\alpha - \beta + 5 = 0 \\ -\alpha + \beta + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{9}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On se ramène à une équation homogène comme le 1<sup>ère</sup> cas donc on trouve :  $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$

La solution est :

$$\text{ArcTan}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \text{Ln}\left(1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2\right) = \text{Ln}(x_1) + C \rightarrow \text{ArcTan}\left(\frac{y + \frac{1}{2}}{x + \frac{9}{2}}\right) - \frac{1}{2} \cdot \text{Ln}\left(1 + \left(\frac{y + \frac{1}{2}}{x + \frac{9}{2}}\right)^2\right) = \text{Ln}(x + \frac{9}{2}) + C$$

### TD N : 01 (Module Math 3)

Résoudre Les Equations Différentielles Du Premier Ordre suivantes :

**Ex 01 : Equation à variables séparées :**  $\rightarrow G(y) \cdot dy = F(x) \cdot dx$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot y \rightarrow \frac{dy}{y} = x \cdot dx$  (on intègre les deux membres de l'équation on trouve)

$\rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx + C \rightarrow \text{Ln}(y) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C \rightarrow \rightarrow y = K \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(3 \cdot \text{Ln}(x) + 1) \cdot y}{x \cdot \text{Ln}(x)} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{(3 \cdot \text{Ln}(x) + 1)}{x \cdot \text{Ln}(x)} dx + C \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} + \int \frac{dx}{x \cdot \text{Ln}(x)} + C$

$\rightarrow \text{Ln}(y) = 3 \cdot \text{Ln}(x) + \text{Ln}(\text{Ln}(x)) + \text{Ln}(K) \rightarrow \text{Ln}(y) = \text{Ln}(K \cdot x^3 \cdot \text{Ln}(x)) \rightarrow y = K \cdot x^3 \cdot \text{Ln}(x)$

**Ex 02 : Equation homogène :**  $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x \cdot (x + y)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)}$  (E.H) : on pose  $z = \frac{y}{x} \rightarrow y = x \cdot z$  on dérive /x

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$  (on remplace dans l'EH)  $\rightarrow z + x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{1+z} \rightarrow x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{-z}{1+z}$

$\rightarrow \frac{(z+1) \cdot dz}{z} = -\frac{dx}{x} \rightarrow \int 1 \cdot dz + \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} + C \rightarrow z + \text{Ln}(z) = -\text{Ln}(x) + C \rightarrow \frac{y}{x} + \text{Ln}\left(\frac{y}{x}\right) = -\text{Ln}(x) + C$

**Ex 03 : Equation linéaire :**  $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$

➤  $\frac{dy}{dx} - 2.x.y = \exp(x^2). \sin(x)$  **Tel que**  $P(x) = -2.x$  et  $Q(x) = \exp(x^2). \sin(x)$

• la Solution Totale est de la forme  $y_T = K(x).e^{-\int P(x).dx}$

✓ **calcule :**  $\int P(x).dx = \int -2.x.dx = -x^2$

✓ **calcule**  $K(x) = \int Q(x).e^{\int P(x).dx} .dx + C$

→  $K(x) = \int e^{x^2} . \sin(x).e^{-x^2} .dx + C = \int \sin(x) .dx + C = -\cos(x) + C$

**Donc**  $y_T = (C - \cos(x)) * e^{-x^2}$

**Ex 04 : Equation de Bernoulli :**  $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x).y^\alpha$

➤  $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}.y = x.\sqrt{y}$  On se ramène au type linéaire en divisant par  $y^{\frac{1}{2}} \rightarrow y^{-\frac{1}{2}}.\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}.y^{\frac{1}{2}} = x$

puis on pose  $Z = y^{\frac{1}{2}}$  et on dérive /x →  $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.\frac{dy}{dx} \rightarrow y^{-\frac{1}{2}}.\frac{dy}{dx} = 2.\frac{dz}{dx}$

on remplace dans l'équation on trouve équation linéaire →  $\frac{dZ}{dx} - \frac{2}{x}.Z = x/2$

**De la forme**  $\frac{dZ}{dx} + P_1(x).Z = Q_1(x)$  **Tel que**  $P_1(x) = -\frac{2}{x}$  et  $Q_1(x) = x/2$

la Solution Totale est de la forme  $Z_T = K(x).e^{-\int P_1(x).dx}$

✓ **calcule :**  $\int P_1(x).dx = \int -\frac{2}{x}.dx = -2.Ln(x) = Ln(x^{-2})$

✓ **calcule**  $K(x) = \int Q_1(x).e^{\int P_1(x).dx} .dx + C$

→  $K(x) = \int \frac{1}{2}.x.e^{Ln(x^{-2})} .dx + C = \frac{1}{2}.\int \frac{dx}{x} + C = Ln(\sqrt{x}) + C$

Donc :  $Z = (Ln(\sqrt{x}) + C).e^{-Ln(x^{-2})} = (Ln(\sqrt{x}) + C).x^2 = y^{\frac{1}{2}} \rightarrow$

la solution est  $y = x^4 . (Ln(\sqrt{x}) + C)^2$

**Equation de Bernoulli :**  $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x).y^\alpha$

➤  $\frac{dy}{dx} - \frac{1-2x}{2x^2}y = -\frac{1}{2}.y^3$  On se ramène au type linéaire en divisant par  $y^3 \rightarrow y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1-2x}{2x^2} \cdot y^{-2} = -\frac{1}{2}$

puis on pose  $Z = y^{-2}$  et on dérive /x  $\rightarrow \frac{dz}{dx} = -2.y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} \rightarrow y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dx}$  on remplace dans

l'équation  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{1-2x}{2x^2} \cdot z = -\frac{1}{2}$

On trouve équation linéaire  $\frac{dz}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} \cdot z = 1$  **De la forme**  $\frac{dZ}{dx} + P_1(x).Z = Q_1(x)$

Tel que  $P_1(x) = \frac{1-2x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$  et  $Q_1(x) = 1$

• la Solution Totale est de la forme  $Z_T = K(x).e^{-\int P_1(x).dx}$

✓ calcule :  $\int P_1(x).dx = \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} - 2.Ln(x) = -\frac{1}{x} + Ln(x^{-2})$

✓ calcule  $K(x) = \int Q_1(x).e^{\int P_1(x).dx} .dx + C$

$\rightarrow K(x) = \int 1.e^{-\frac{1}{x} + Ln(x^{-2})} .dx + C = \int x^{-2} .e^{-\frac{1}{x}} .dx + C = e^{-1/x} + C$

Donc :  $Z = (e^{-1/x} + C).x^2 .e^{1/x} = y^{-2} \rightarrow y = 1/\sqrt{(e^{-1/x} + C).x^2 .e^{1/x}}$