Chapitre 3 : Résoudre équation différentielle ordre N linéaire à coefficients constants : Par la Méthode de variation des constants et Méthode recherche solution particulaire

$$A_N.\frac{d^N y}{dx^N}+A_{N-1}.\frac{d^{N-1} y}{dx^{N-1}}+.......+A_2.\frac{d^2 y}{dx^2}+A_1.\frac{dy}{dx}+A_0.y=f(\mathrm{x}) \quad ; \quad (A_N, A_{N-1},...., A_1, A_0 \text{ Sont des constants})$$

3.1: Recherche la solution Homogène $y_H = ? \rightarrow$ (Résoudre équation sans second membre E.S.S.M

$$A_N.\frac{d^N y}{dx^N}+A_{N-1}.\frac{d^{N-1} y}{dx^{N-1}}+.......+A_2.\frac{d^2 y}{dx^2}+A_1.\frac{dy}{dx}+A_0.y=0\ ).$$

On accepte sans démonstration les points suivant :

- La solution **de E.S.S.M** est sous forme exponentielle $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$
- Equation **N^{eme}** ordre admet **N** solutions différant $y_1, y_2, y_3......................., y_N$
- Dans le cas au $\frac{y_K}{y_J}=C^{st}$ on prend $y_K = x.y_J$
- La solution Homogène y_H est une combinaison linéaire entre les N solutions $y_1, y_2,...., y_N$:

$$\boxed{y_H = C_1.y_1 + C_2.y_2 + ...+C_N.y_N}$$

Pour Calculer les solutions $y_1, y_2,...., y_N$ on doit remplacer $y=\mathrm{e}^{(R.x)}$ dans **E.S.S.M** Tel que :

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \frac{dy}{dx}=R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \\ \frac{d^Ny}{dx^N}=R^N.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 * y = A_0 * \mathrm{e}^{(R.x)} \\ A_1 * \frac{dy}{dx}=A_1 * R.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ A_2 * \frac{d^2y}{dx^2}=A_2 * R^2.\mathrm{e}^{(R.x)} \\ \\ A_N * \frac{d^Ny}{dx^N}=A_N * R^N.\mathrm{e}^{(R.x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textbf{E.S.S.M} \rightarrow \\ \mathrm{e}^{(R.x)} * \left[A_N.R^N + A_{N-1}.R^{N-1} + ... + A_1.R + A_0\right] = 0 \\ \mathrm{e}^{(R.x)} \neq 0 \end{cases}$$

Equation caractéristique

$$A_N.R^N + A_{N-1}.R^{N-1} + ... + A_2.R^2 + A_1.R + A_0 = 0$$

Les solutions possibles de l'équation caractéristique soit réelle (R) ou complexe ($\alpha+\beta.I$), alors les solutions E.S.S.M sont : $y=\mathrm{e}^{R.x}$ $\quad y=\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$, $y=\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ Ou bien des solutions répéter $y=x^m.\mathrm{e}^{R.x}$, $y=x^m.\mathrm{e}^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$, $y=x^m.\mathrm{e}^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ Tel que **m** Nombre de répétition

3.2 : Recherche la solution Totale $y_T = ? \rightarrow$ (Résoudre équation Avec second membre E.A.S.M)

Pour calculer la solution Totale En utilisant deux méthodes

1^{ere} : Méthode de variation de constant : Dans cette méthode on prend la forme de y_T est la même forme y_H c'est-à-dire $y_T = C_1(\mathrm{x}).y_1 + C_2(\mathrm{x}).y_2 + ...+C_N(\mathrm{x}).y_N$, sauf que les constant sont des variable en fonction de x dont les dérivées sont déterminées par le système suivant :

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & . & y_N \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} & . & . & y_N^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} & . & . & y_N^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ y_1^{(\mathrm{N}-1)} & y_2^{(\mathrm{N}-1)} & y_3^{(\mathrm{N}-1)} & . & . & y_N^{(\mathrm{N}-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \\ \\ C_N' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ \frac{F(x)}{A_N} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{La Solution du Systeme}} \begin{cases} \frac{dC_1(\mathrm{x})}{dx}=\psi_1(x) \\ \frac{dC_2(\mathrm{x})}{dx}=\psi_2(x) \\ .... \\ \frac{dC_N(\mathrm{x})}{dx}=\psi_N(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} \int dC_1(\mathrm{x}) = C_1(\mathrm{x}) = \int \psi_1(x).dx + K_1 \\ \int dC_2(\mathrm{x}) = C_2(\mathrm{x}) = \int \psi_2(x).dx + K_2 \\ . \\ \int dC_N(\mathrm{x}) = C_N(\mathrm{x}) = \int \psi_N(x).dx + K_N \end{cases}}$$

2eme: Méthode recherche solution particulaire y_P : Dans cette méthode on pose que la forme de **la Solution Totale = Solution Homogène + Solution particulaire** $\Rightarrow y_T = y_H + y_P$

La forme de y_P est obtenu à partir de la fonction F(x), on trouve 2 Cas principale :

- 1 ere cas : $\boxed{F(x) = P_{N1}(x).e^{S.x} = (P_0 + P_1 .x + P_2 .x^2 + ... + P_{N1}.x^{N1}).e^{S.x}}$; $P_{N1}(x)$: polynôme ordre N1.

  $\boxed{y_P = a_{N1}(x).e^{S.x}.x^m = (a_0 + a_1 .x + a_2 .x^2 + ... + a_{N1}.x^{N1}).e^{S.x}.x^m}$

  Tel que $a_0, a_1, a_2 .....\ a_{N1}$ Sont des constant calculer par l'identification avec la fonction F(x).

- 2 eme cas : $\boxed{F(x) = e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x) + Q_{N2}(x).Sin(\gamma.x))}$

  $P_{N1}(x)$: polynôme ordre N1 et $Q_{N2}(x)$: polynôme ordre N2

  $$\boxed{y_P = e^{S.x}.(a_{N3}(x).\cos(\gamma.x) + b_{N3}(x).Sin(\gamma.x)).x^m}$$

  N3: le degré de polynôme $a_{N3}(x)$ et $b_{N3}(x)$ Tel que N3=**MAX**(N1,N2)

  et le terme x^m est introduit pour **éviter** la répétition des solutions y_1, y_2 , ..., y_N de E.S.S.M dans la solution $y_P = e^{S.x}$ ou $y_P = e^{S.x}.\cos(\gamma.x)$ ou $y_P = e^{S.x}.\sin(\gamma.x)$

  m désigne combien des solutions de E.S.S.M répété avec *la solution particulaire* y_P.

Remarque : dans le cas $\boxed{F(x) = \sum_{I}^{N} F_I(x)}$ La solution particulaire $\boxed{y_P(x) = \sum_{I}^{N} \left(y_P(x)\right)_I}$

Tel que : $yp_1 \to F_1$ et $yp_2 \to F_2$; .... $yp_N \to F_N$

- Méthode Recherche Solution Particulière est valable seulement pour f(x) de forme suivante :

polynôme	***exponentielle ordre 1:***	***Cosinus ordre 1 :***	***Sinus ordre 1 :***
x^N	$e^{S.x}$	$\cos(\gamma.x)$	$\sin(\gamma.x)$

- La Méthode de variation de constant est valable pour toutes les fonctions F (x).

TD 03 : équation différentielles ordre N

exercice 1

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}+3.\frac{d^2y}{dx^2}+3.\frac{dy}{dx}+y=e\,\mathrm{xp}(-x)}$$

- **E.S.S.M** (Recherche la solution homogène) :

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3.\frac{d^2y}{dx^2}+3.\frac{dy}{dx}+y=0$$

Équation caractéristique $\boxed{R^3+3.R^2+3.R+1=0}$ Par test on remarque que $R_1=-1$ on fait la division e**uclidienne** on trouve

$$\boxed{\frac{R^3+3.R^2+3.R+1}{R+1}=R^2+2.R+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R^2+2.R+1=0 \\ \Delta=b^2-4.a.c=2^2-4.1.1=0 \\ R_2=R_3=\dfrac{-b}{2.a}=-1 \end{array}}$$

$$\begin{cases} y_1=e^{-x} \\ y_2=x.e^{-x} \\ y_3=x^2.e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3 \\ y_H(x)=(C_1+C_2.x+C_3.x^2).e^{-x} \end{cases}$$

1ere Méthode recherche solution particulière

$y_P=?\rightarrow f(x)=1.e^{-x}=P_N(x).e^{S.x}$ Tel que $P_n(x)$ c'est un polynôme ordre $0 \Rightarrow y_P=a_0.e^{-x}.x^m$

On a : $S=-1=r_{1,2,3}\rightarrow$ Donc Trois solution sont égaux alors **m=3** $\Rightarrow$ $y_P=a_0.e^{-x}.x^3$

Pour calculer a0 on remplace yp dans **E.A.S.M** Tel que :

$\boxed{\frac{dy_P}{dx}=a_0.e^{-x}.(-.x^3+3..x^2)}$; $\boxed{\frac{d^2y_P}{dx^2}=a_0.e^{-x}.(x^3-6..x^2+6..x)}$; $\boxed{\frac{d^3y_P}{dx^3}=a_0.e^{-x}(-x^3+9..x^2-18..x+6)}$

E.A.S.M : $\frac{d^3y_P}{dx^3}+3.\frac{d^2y_P}{dx^2}+3.\frac{dy_P}{dx}+y_P=e^{-x}.$

$\rightarrow 6.a_0.e^{-x}=1.e^{-x}\rightarrow a0=\frac{1}{6}$ Donc $\boxed{y_T=y_H+y_P=(C_1+C_2.x+C_3.x^2+\frac{1}{6}.x^3).e^{-x}}$

2eme méthode variation des constatant

$y_T(x)=(C_1(x)+C_2(x).x+C_3(x).x^2).e^{-x}$

On a : $\begin{cases} y_1=e^{-x} \\ y_2=x.e^{-x} \\ y_3=x^2.e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'=-e^{-x} \\ y_2'=(1-x).e^{-x} \\ y_3'=(2.x-x^2).e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1''=e^{-x} \\ y_2''=(-2+x).e^{-x} \\ y_3''=(2-4.x+x^2).e^{-x} \end{cases}$

On construire système de dérive des constatant

$$\begin{cases} y_1.C_1'+y_2.C_2'+y_3.C_3'=0 \\ y_1'.C_1'+y_2'.C_2'+y_3'.C_3'=0 \\ y_1''.C_1'+y_2''.C_2'+y_3''.C_3'=F(x)/\mathrm{a}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}.\left(C_1'+x.C_2'+x^2.C_3'\right)=0 \\ e^{-x}.\left(-C_1'+(1-x).C_2'+(2.x-x^2).C_3'\right)=0 \\ e^{-x}\left(C_1'+(-2+x).C_2'+(2-4.x+x^2).C_3'\right)=e^{-x} \end{cases}$$

Tel que (a_3) est le coefficient de la troisième dérive.

$$\Rightarrow\begin{cases} C_1'+x.C_2'+x^2.C_3'=0 \\ -C_1'+(1-x).C_2'+(2.x-x^2).C_3'=0 \\ C_1'+(-2+x).C_2'+(2-4.x+x^2).C_3'=1 \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}=\dfrac{1}{2}.x^2 \\ \dfrac{dC_2}{dx}=-x \\ \dfrac{dC_3}{dx}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} C_1=\dfrac{1}{6}.x^3+K_1 \\ C_2=-\dfrac{1}{2}x^2+K_2 \\ C_3=\dfrac{1}{2}.x+K_3 \end{cases}$$

$$y_T(x)=\left((\frac{1}{6}.x^3+K_1) \;+\; (-\frac{1}{2}x^2+K_2).x \;+\; (\frac{1}{2}.x+K_3).x^2)\right).e^{-x}$$

$$y_T(x)=\left(K_1+K_2.x+K_3.x^2\right).e^{-x}+\frac{1}{6}.x^3.e^{-x}=y_H+y_P$$

Exercice 2

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{dx}^4}+2.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{dx}^2}+y \quad = \quad x^2.\sin(x)$$

- **E.S.S.M (Recherche la solution homogène) :**

$$\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{dx}^4}+2.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{dx}^2}+y=0$$

Équation caractéristique : $\boxed{R^4+2.R^2+1=0}$ $\Rightarrow (R^2+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} R^2+1=0 \\ R^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2=-1=I^2 \\ R^2=-1=I^2 \end{cases}$

Donc on a des Solutions complexe double : $\begin{cases} R_{1,2}=0\pm 1.I=\alpha\pm\beta.I \\ R_{3,4}=0\pm 1.I=\alpha\pm\beta.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=\cos(x) \\ y_2=e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)=\sin(x) \\ y_3=x.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=x.\cos(x) \\ y_4=x.e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)=x.\sin(x) \end{cases}$

$$y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4$$
$$y_H(x)=(C_1+C_3.x).\cos(x)+(C_2+C_4.x).\sin(x)$$

- **Recherche la solution particulière :**

$y_P=?\rightarrow f(x)=x^2.\sin(x)$

$$f(x)=\mathrm{e}^{0.x}.(0.\cos(1.x)+x^2.Sin(1.x))$$
$$f(x)=e^{S.x}.(P_{N1}(x).\cos(\gamma.x)+Q_{N2}(x).\sin(\gamma.x))$$

Donc $\quad yp=e^{S.x}.(a_{N3}(x).\cos(\gamma.x)+b_{N3}(x).\sin(\gamma.x)).x^m$

On a N1=0 et N2=2 => N3 = **MAX** (N1, N2) = 2 ;

On a $S=0$; $\gamma=1 \rightarrow S+\gamma.I=0+1.I = R_1 \; et \; R_3$ (Deux solution répétée) $\rightarrow m=2$

$$\boxed{\rightarrow \quad yp=e^{0.x}.((a_0+a_1.x+a_2.x^2).\cos(1.x)+(b_0+b_1.x+b_2.x^2).\sin(1.x)).x^2}$$

Solution totale : $\quad y_T=y_H+y_P$

Exercice 3 :

On donne $\begin{cases} -3-4.I=(1-2.I)^2 \\ -3+4.I=(1+2.I)^2 \end{cases}$

Résoudre l'équation différentielle suivante : $\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{dx}^4}+6.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{dx}^2}+25.y=0$

Équation caractéristique E.C : $R^4+6.R^2+25=0$; On pose $R^2=Z \rightarrow R^4=Z^2$

E.C : $Z^2+6.Z+25=0$; on calcul $\Delta=b^2-4.a.c=6^2-4.1.25=-64=I^2.64$

$$\begin{cases} Z_1=\frac{-6-8.I}{2}=-3-4.I=(1-2.I)^2=R^2 \text{..........................(1)} \\ Z_2=\frac{-6+8.I}{2}=-3+4.I=(1+2.I)^2=R^2 \text{..........................(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1=-(1-2.I)=-1+2.I \\ R_2=+(1-2.I)=+1-2.I \\ R_3=-(1+2.I)=-1-2.I \\ R_4=+(1+2.I)=+1+2.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{1,\,3}=-1\pm 2.I \\ R_{2,\,4}=+1\pm 2.I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\exp(-x).\cos(2.x) \\ y_3=\exp(-x).\sin(2.x) \\ y_2=\exp(+x).\cos(2.x) \\ y_4=\exp(+x).\sin(2.x) \end{cases}$$

La solution est Homogène est :

$$\Rightarrow y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4$$

$$\boxed{y_H(x)=\mathrm{e}^{-x}.\left(C_1.\cos(2.x)+C_3.\sin(2.x)\right)+e^x.\left(C_2.\cos(2.x)+C_4.\sin(2.x)\right)}$$

<u>Exercice4</u> : Résoudre l'équation différentielle suivante :

- $\frac{d^4 y}{dx^4}+4.\frac{d^3 y}{dx^3}+6.\frac{d^2 y}{dx^2}+4.\frac{dy}{dx}+5.y=0$

Remarque: on donne (R_1= -2+ I) comme une solution de l'équation caractéristique.

Solution :

- l'équation caractéristique :

$$\boxed{R^4+4.R^3+6.R^2+4.R+5=0}$$

On a (R_1= -2+ I) Donc même (R_2= -2- I) c'est une solution conjugue de E.C. Dans ce cas on a connu deux solutions comme suit : (R +2- I).(R +2+ I)=$R^2+4.R+5$

On fait la division euclidienne : $\boxed{\frac{R^4+4.R^3+6.R^2+4.R+5}{\mathrm{R}^2+4.R+5}=R^2+1}$

$R^2+1=0 \rightarrow R^2=-1=I^2 \rightarrow R_{3,4}=0\pm 1.I$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{1,2}=-2\pm I \\ R_{3,4}=+0\pm I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\exp(-2.x).\cos(x) \\ y_2=\exp(-2.x).\sin(x) \\ y_3=\exp(0.x).\cos(x) \\ y_4=\exp(0.x).\sin(x) \end{cases}$$

$$y_H(x)=C_1.y_1+C_2.y_2+C_3.y_3+C_4.y_4$$

$$\boxed{y_H(x)=\exp(-2.x)(C_1.\cos(x)+C_2.\sin(x)) + \; C_3.\cos(.x)+C_4.\sin(x)}$$

Exercice5 :

- On donne la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant ordre N par :

$$y(x) = y_H = \left(C_1 + C_2.x\right).e^{x} + \left(C_3 + C_4.x\right).e^{2.x}$$

  - Déduire les solutions **y_1 , y_2 ,....., y_N** de l'équation E.S.S.M .
  - Trouvez l'équation caractéristique (E.C) d'E.S.S.M ?
  - Déduire l'équation différentielle sans second membre (E.S.S.M)?

Solution :

- On donne la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant par :

$$y(x) = y_H = \left(C_1 + C_2.x\right).e^{x} + \left(C_3 + C_4.x\right).e^{2.x}$$

- Déduire l'équation caractéristique (E.C) d'E.S.S.M ?

$y_H(x) = C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 + C_4.y_4$ Par identification :

$$\begin{cases} y_1 = e^{x} \\ y_2 = x.e^{x} \\ y_3 = e^{2.x} \\ y_4 = x.e^{2.x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 1 \\ R_2 = 1 \\ R_3 = 2 \\ R_4 = 2 \end{cases}$$

on fait le produit des racines :

$$(R-1).(R-1).(R-2).(R-2) = 0$$
$$\left(R^2 - 2.R + 1\right).\left(R^2 - 4.R + 4\right) = 0$$

donc équations caractéristique E.C : $\boxed{R^4 - 6.R^3 + 13.R^2 - 12.R + 4 = 0}$

- Déduire équation différentielle sans second membre **(E.S.S.M)?**

$$\boxed{\frac{d^4y}{dx^4} - 6.\frac{d^3y}{dx^3} + 13.\frac{d^2y}{dx^2} - 12.\frac{dy}{dx} + 4.y = 0}$$

Exercice6:

- Développez le polynôme suivant : $\Psi(z) = \left(z^2 - 1\right).\left(z^2 + 2.z + 5\right)$
- Résoudre les équations différentielles suivantes : $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2.\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4.\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2.\dfrac{d\ y}{dx} - 5.y = 0$

Solution :

Développez le polynôme suivant : $\Psi(z) = \left(z^2 - 1\right).\left(z^2 + 2.z + 5\right) \rightarrow \boxed{\Psi(z) = z^4 + 2.z^3 + 4.z^2 - 2.z - 5}$

- Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2.\frac{d^3y}{dx^3} + 4.\frac{d^2y}{dx^2} - 2.\frac{d\ y}{dx} - 5.y = 0$$

; Résoudre E.S.S.M $\rightarrow y_H = ?$

E.C $\rightarrow R^4 + 2.R^3 + 4.R^2 - 2.R - 5 = 0 \quad \rightarrow \left(R^2 - 1\right).\left(R^2 + 2.R + 5\right) = 0$

$$R^2 - 1 = 0 \rightarrow R^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} R_1 = -1 \\ R_2 = +1 \end{cases}$$

$R^2 + 2.R + 5 = 0$; $\Delta = 2^2 - 4.1.5 = -16 = (4.I)^2$

$$R_{3,4} = \frac{-2 \pm 4.I}{2} = -1 \pm 2.I$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = e^{+x} \\ y_3 = e^{-x}.\cos(2.x) \\ y_4 = e^{-x}.\sin(2.x) \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} y_H &= C_1.y_1 + C_2.y_2 + C_3.y_3 + C_4.y_4 \\ y_H &= C_1.e^{-x} + C_2.e^{+x} + e^{-x}.\left(C_3.\cos(2.x) + C_4.\sin(2.x)\right) \end{aligned}$$