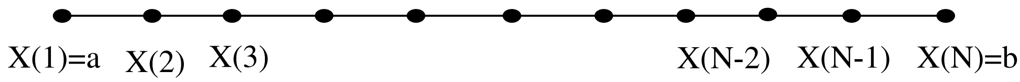
Chapitre 2 : (Intégration Numérique)

On veut calculer l'intégrale $\left(\int_a^b f(x).dx\right)$ numériquement : Les étapes de calcule :

- On construire une suite de la forme : $\boxed{x(k) = a + H*(k-1)}$; $k = 1 \to N$

Tel que le pas : $\boxed{H = (b-a)/(N-1)}$ et N: nombre de point est donner de tel sort H est très petit.

- Transforme la fonction f(x) vers un tableau $\boxed{y(k) = f(x(k))}$; $k = 1 \to N$



K	1	2	3	4		N-1	N
X(K)	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)		X(N-1)	X(N)
Y(K)	Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)		Y(N-1)	Y(N)

➢ La méthode trapèze :

La formule de trapèze peut être obtenue en approchant f(x) par le segment de droite joignant les deux points (x_1, y1) et (x_2, $y2$) :

$$f(x) = C_1 + C_2.x$$

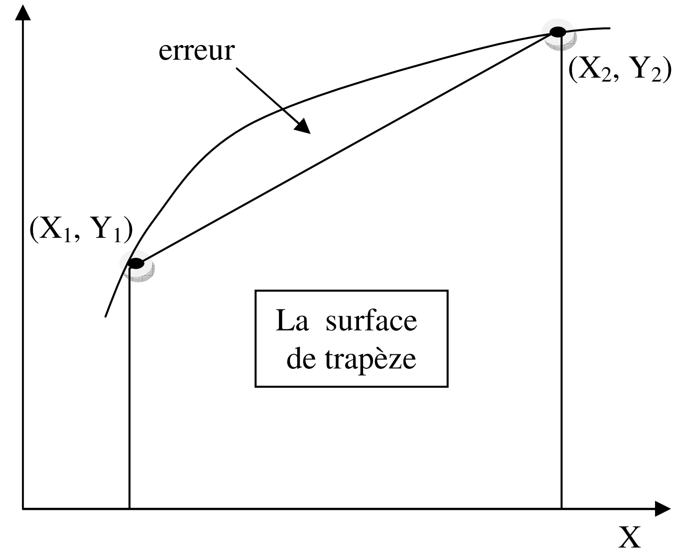
$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 = C_1 + C_2.x_1 \\ f(x_2) = y_2 = C_1 + C_2.x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

La solution du système est

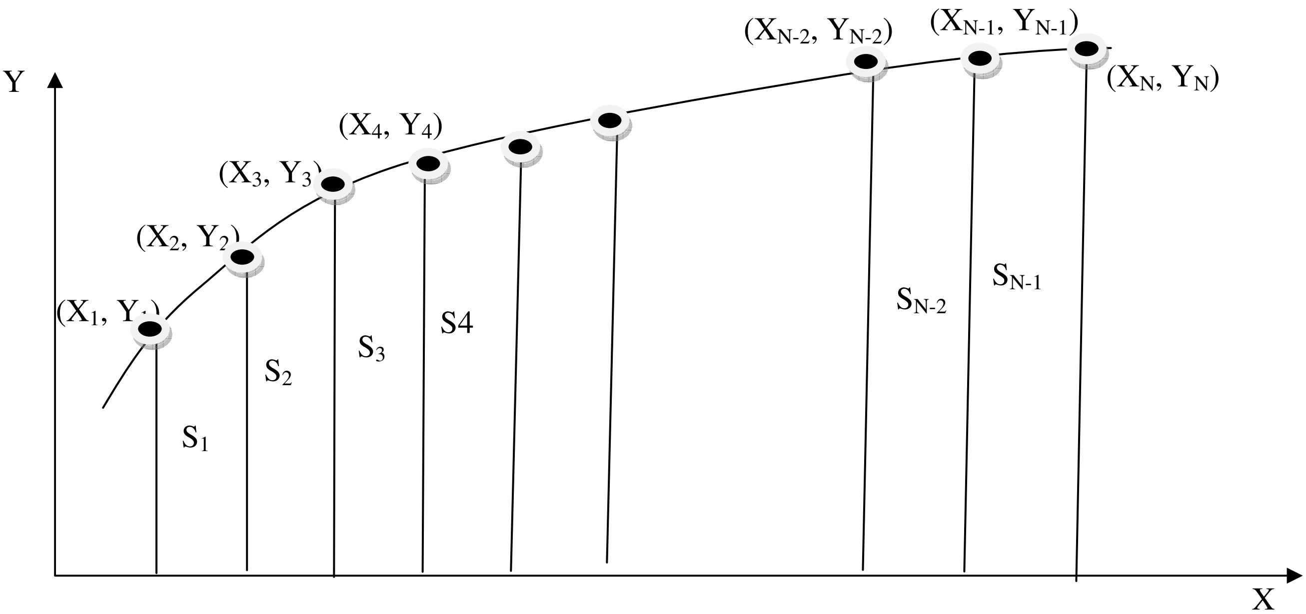
$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} ; \Delta_{C1} = \begin{bmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} ; \Delta_{C2} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\Delta_{C1}}{\Delta} = \dfrac{x_2.y_1 - x_1.y_2}{x_2 - x_1} \\ C_2 = \dfrac{\Delta_{C2}}{\Delta} + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$



$$La\,surface\ \ de\ trapèze = \int_{X1}^{X2} f(x).dx = \int_{X1}^{X2} (C_1 + C_2.x).dx = \left(C_1.x + C_2.\frac{x^2}{2}\right)_{X1}^{X2} = \frac{X_2 - X_1}{2}.(Y_1 + Y_2) = \frac{H}{2}.(Y_1 + Y_2)$$

➢ La méthode trapèze généralise :



$$\text{La surface Total} = Trap = \sum_{K=1}^{N-1} S_K = S_1 + S_2 + S_3 + \dots\dots\dots + S_{N-2} + S_{N-1}$$

$$S_1 = \frac{H}{2}.(Y_1 + Y_2)\ ;\ S_2 = \frac{H}{2}.(Y_2 + Y_3)\ ;\ S_3 = \frac{H}{2}.(Y_3 + Y_4);\quad S_{N-2} = \frac{H}{2}.(Y_{N-2} + Y_{N-1})\ ;\ S_{N-1} = \frac{H}{2}.(Y_{N-1} + Y_N)$$

$$Trap = \int_{X1}^{XN} f(x).dx = \frac{H}{2}\big(y(1) + y(N) + 2.\big(y(2) + y(3) + \dots..y(\mathrm{N}-1)\big)\big) = \frac{H}{2}\left(y(1) + y(N) + 2.\sum_{K=2}^{N-1} y(k)\right)$$

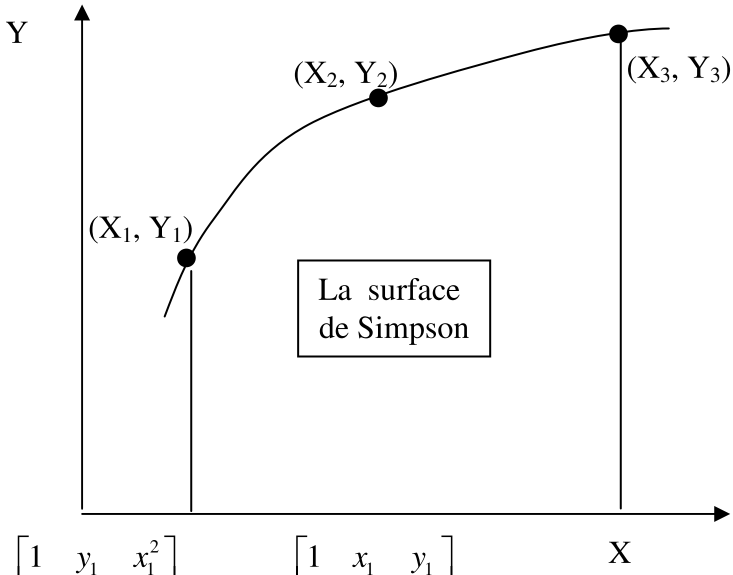
➢ La méthode Simpson:

En interpolant f(x) par un polynôme de degré 2 entre 3 points (x_1,y_1) , (x_2,y_2) et , (x_3,y_3) :

$$f(x) = C_1 + C_2.x + C_3.x^2$$

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 = C_1 + C_2.x_1 + C_3.x_1^2 \\ f(x_2) = y_2 = C_1 + C_2.x_2 + C_3.x_2^2 \\ f(x_3) = y_3 = C_1 + C_2.x_3 + C_3.x_3^2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$



La solution du système est :

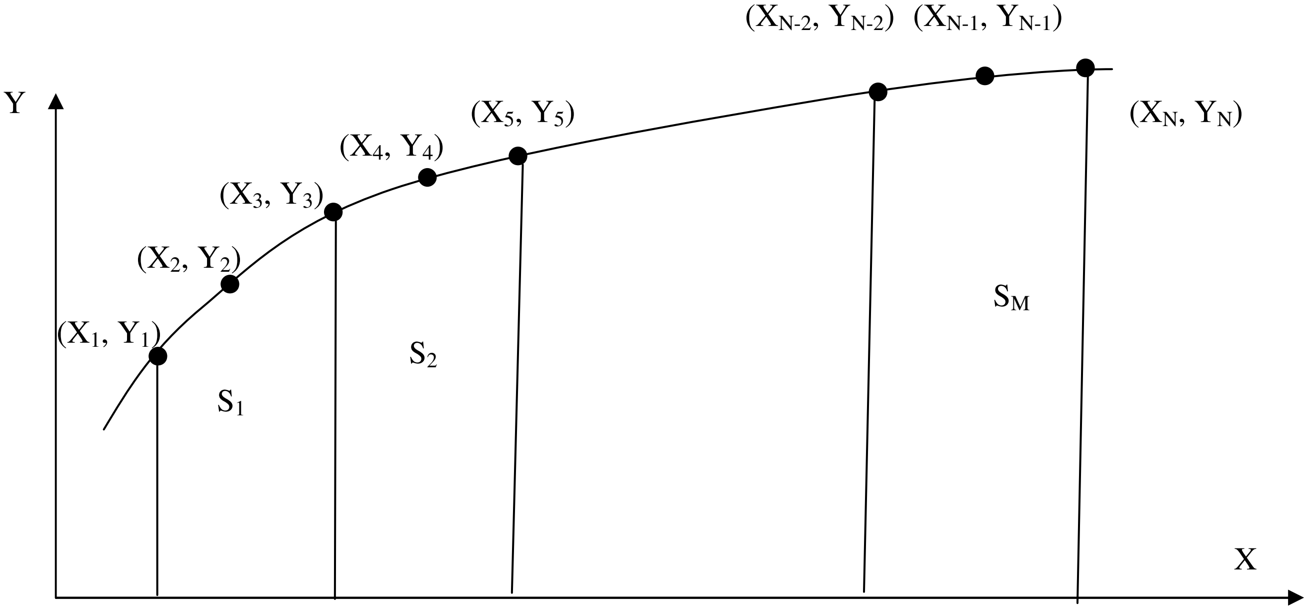
$$C_1 = \frac{\Delta_{C1}}{\Delta}\ ;\ C_2 = \frac{\Delta_{C2}}{\Delta}\ ;C_3 = \frac{\Delta_{C3}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}\ ;\ \Delta_{C1} = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}\ ;\ \Delta_{C2} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{vmatrix}\ ;\ \Delta_{C3} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$La\,surface = \int_{X1}^{X3} f(x).dx = \int_{X1}^{X3} \left(C_1 + C_2.x + C_3.x^2\right).dx = \left(C_1.x + C_2.\frac{x^2}{2} + C_3.\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{X1}^{X3} = \frac{H}{3}.(Y_1 + 4.Y_2 + Y_3)$$

On note : $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = H$ et $x_3 - x_1 = 2.H$

➢ La méthode Simpson généralise :



Remarque : Dans la méthode de Simpson, **N** est un Nombre impaire (N=2.M+1). Donc $M = (N-1)/2$

La surface Total $=S_1 + S_2 + S_3 + \dots\dots\dots + S_{M-1} + S_M$

$$S_1=\frac{H}{3}.\left(Y_1+4.Y_2+Y_3\right) \quad ; \quad S_2=\frac{H}{3}.\left(Y_3+4.Y_4+Y_5\right) \quad ; \quad S_3=\frac{H}{3}.\left(Y_5+4.Y_6+Y_7\right) \quad ;$$

$$S_{M-1}=\frac{H}{3}.\left(Y_{2M-3}+4.Y_{2M-2}+Y_{2M-1}\right) \quad ; \quad S_M=\frac{H}{3}.\left(Y_{2M-1}+4.Y_{2M}+Y_{2M+1}\right)$$

K	1	2	3					2M-1	2M	2M+1
X(k)	X(1)	X(2)	X(3)					X(2M-1)	X(2M)	X(2M+1)
Y(k)	Y(1)	Y(2)	Y(3)					Y(2M-1)	Y(2M)	Y(2M+1)

$$Simp=\int_{X1}^{XN} f(x).dx=\frac{H}{3}\left(y(1)+y(N)+4.\left(y_{(2)}+y_{(4)}+....+y_{(2.M)}\right)+2.\left(y_{(3)}+y_{(5)}+....+y_{(2.M-1)}\right)\right)$$

$$Simp=\frac{H}{3}\left(y(1)+y(N)+4.\underbrace{\sum_{K=2}^{2.M} y(k)}_{K \ paire}+2.\underbrace{\sum_{K=3}^{2.M-1} y(k)}_{K \ impaire}\right)$$

Exercice 1 Calcul intégrale $\int_1^4 \frac{dx}{x}=?$

Solution exacte $\int_1^4 \frac{dx}{x}=Ln(x)\Big|_1^4=Ln(4)-Ln(1)=1.3863$

On veut comparer avec les méthodes numériques

- Trapèze et Simpson

On a: $F(x)=\frac{1}{x}$ ⟶ `f=@(x) 1./x ;`

et $x \to [A,B]=[1,4]$; $N=3$; $H=\frac{B-A}{N-1}=1.5$

K	1	2	3	$Trap=\frac{H}{2}\left[y_1+y_3+2.\left(y_2\right)\right]$
X(K)	1	2.5	4	
Y(K)	1	0.4	0.25	$Simp=\frac{H}{3}\left[y_1+y_3+4.\left(y_2\right)\right]$

trap = 1.5375
simp = 1.4250
Exact = 1.3863

==

$x \to [A,B]=[1,4]$; $N=5$; $H=\frac{B-A}{N-1}=0.75$

K	1	2	3	4	5
X(k)	1	1.75	2.5	3.25	4
Y(k)	1	0.571	0.4	0.308	0.25

$$Trap=\frac{H}{2}\left[y_1+y_5+2.\left(y_2+y_3+y_4\right)\right]$$

$$Simp=\frac{H}{3}\left[y_1+y_5+4.\left(y_2+y_4\right)+2.\left(y_3\right)\right]$$

Trap = 1.4281
Simp = 1.3916
Exact = 1.3863

==

$x \to [A,B]=[1,4]$; $N=9$; $H=\frac{B-A}{N-1}=0.375$

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X(k)	1	1.375	1.75	2.125	2.5	2.875	3.25	3.625	4
Y(k)	1	0.727	0.571	0.471	0.4	0.348	0.308	0.276	0.25

$$Trap=\frac{H}{2}\left[y_1+y_9+2.\left(y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8\right)\right]$$

$$Simp=\frac{H}{3}\left[y_1+y_9+4.\left(y_2+y_4+y_6+y_8\right)+2.\left(y_3+y_5+y_7\right)\right]$$

trap = 1.3971
simp = 1.3868
Exact =1.3863

La méthode Simpson plus exacte que la méthode trapèze

```
clc ; clear all
f=@(x) 1./x ;
a=1 ; b=4 ; n=9 ; m=(n-1)/2; h=(b-a)/(n-1);
fprintf('     X        Y=f(X)\n')
for k=1:n
x(k)=a+(k-1)*h  ;
y(k)=f(x(k)) ;
fprintf('%10.3f %10.3f\n',x(k),y(k))
end
trap=h*(y(1)+y(n)+2*sum(y(2:n-1)))/2
simp=h*(y(1)+y(n)+4*sum(y(2:2:2*m))+2*sum(y(3:2:2*m-1)))/3
syms x ;
exact =vpa(int(f,x,a,b),10)
```

exercice 2

Calculez l'intégrale

$\int_0^2 \exp(x^2).dx =$ 16.453 (Calculer par langage Matlab)

On a : $F(x) = \exp(x^2)$ ⟶ **f=@(x) exp(x.^2) ;**

$$x \to [A,B] = [0,2]\,; \quad N = 3\,; \quad H = \frac{B-A}{N-1} = 1$$

K	1	2	3	
X(K)	0	1	2	$Trap = \frac{H}{2}\left[y_1 + y_3 + 2.(y_2)\right]$
Y(K)	1	2.718	54.598	$Simp = \frac{H}{3}\left[y_1 + y_3 + 4.(y_2)\right]$

TRAP= 30.517
SIMP= 22.157
EXACT= 16.453

==

$$x \to [A,B] = [0,2]\,; \quad N = 5\,; \quad H = \frac{B-A}{N-1} = 0.5$$

K	1	2	3	4	5
X(K)	0	0.5	1	1.5	2
Y(K)	1	1.284	2.718	9.488	54.598

$$Trap = \frac{H}{2}\left[y_1 + y_5 + 2.(y_2 + y_3 + y_4)\right]$$

$$Simp = \frac{H}{3}\left[y_1 + y_5 + 4.(y_2 + y_4) + 2.(y_3)\right]$$

TRAP= 20.645
SIMP= 17.354
EXACT= 16.453

==

$$x \to [A,B] = [0,2]\,; \quad N = 9\,; \quad H = \frac{B-A}{N-1} = 0.25$$

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X(K)	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
Y(K)	1	1.064	1.284	1.755	2.718	4.771	9.488	21.381	54.598

$$Trap = \frac{H}{2}\left[y_1 + y_9 + 2.(y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8)\right]$$

$$Simp = \frac{H}{3}\left[y_1 + y_9 + 4.(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 2.(y_3 + y_5 + y_7)\right]$$

TRAP= 17.565
SIMP= 16.539
EXACT= 16.453