Chapitre 4 : Résoudre Equation différentielle 2eme ordre par la Méthodes des différences finies :

Soit le problème de condition aux limites suivant :

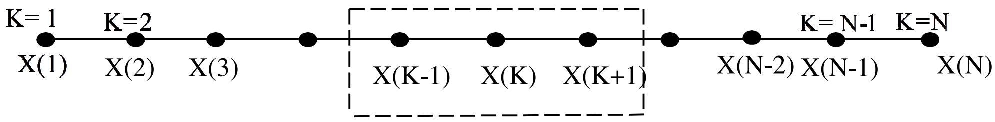
$$a(x).\frac{d^2y}{dx^2}+b(x).\frac{dy}{dx}+c(x).y=f(x) \qquad x=\left]x_1,x_N\right[\qquad (1)$$

Condition aux limites au point : $x=x_1 \quad \rightarrow \left(a_1\dfrac{dy}{dx}+b_1y=f_1\right)_{x=x1}$ (2)

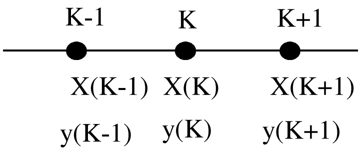
Condition aux limites au point : $x=x_N \quad \rightarrow \left(a_n.\dfrac{dy}{dx}+b_n.y=f_n\right)_{x=xN}$ (3)

Pour obtenir une solution approchée de la solution $y(x)$ du problème, on procède de la manière suivante

- Divisons l'intervalle $\left[x_1,x_N\right]$ en (N-1*)* parties égales de longueur : $H=\dfrac{x_N-x_1}{(N-1)}$.



- On Construire une suite de la forme : $x(k)=x_1+H.(k-1)$
- On choisit un élément arbitraire à trois nœud sur le domaine $\left[x_1,x_N\right]$ pour définir la première et deuxième dérive. On basant sur les sérier Taylor :



La première dérive	La deuxième dérive :
$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_K=\dfrac{y_{K+1}-y_{K-1}}{2.H}$	$\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_K=\dfrac{y_{K-1}-2.y_K+y_{K+1}}{H^2}$

En remplaçant dans l'équation (1) on trouve : $\left(a(x).\dfrac{d^2y}{dx^2}+b(x).\dfrac{dy}{dx}+c(x).y=f(x)\right)_K$

$$\rightarrow \boxed{a(K)*\frac{y_{K-1}-2.y_K+y_{K+1}}{H^2}+b(K)*\frac{y_{K+1}-y_{K-1}}{2.H}+C(K)*y_K=f(K)}$$

$$\rightarrow \boxed{(+\frac{a(k)}{H^2}-\frac{b(k)}{2.H}).y_{K-1}+(-2.\frac{a(k)}{H^2}+c(k)).y_K+(\frac{a(k)}{H^2}+\frac{b(k)}{2.H}).y_{K+1}=f(k)}$$

$$\rightarrow \boxed{Di(K).y_{K-1}+Dp(K).y_K+DS(K).y_{K+1}=f(K)} \quad ; \quad K=2\rightarrow N-1 \qquad (4)$$

L'équation (4) contient (N) variable Avec (N-2) équation, il est valable pour n'importe quelle indice dans Le tableau y_K, sauf les conditions aux limites c'est-à-dire pour K=1 et pour K=N.

Donc doit être utilisé les formules (2), (3) pour calculer ces conditions :

Pour $x=x_1$ **, K=1 on utilise la formule (2) :**

$$a_1.\frac{y_2-y_1}{H}+b_1.y_1=f_1 \rightarrow \left(\frac{-a_1}{H}+b_1\right).y_1+\left(\frac{a_1}{H}\right).y_2=f_1 \rightarrow \boxed{Dp(1).y_1+Ds(1).y_2=f(1)} \qquad (5)$$

Pour $x=x_N$ **, K=N on utilise la formule (3) :**

$$a_N\frac{y_N-y_{N-1}}{H}+b_N.y_N=f_N \rightarrow \left(\frac{-a_N}{H}\right)y_{N-1}+\left(b_N+\frac{a_N}{H}\right).y_N=f_N \rightarrow \boxed{Di(N).y_{N-1}+Dp(N).y_N=f(N)} \qquad (6)$$

A partir des équations (5), (4) et (6) on obtient le système tri diagonal suivant :

$$
\begin{bmatrix}
Dp_1 & Ds_1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
Di_2 & Dp_2 & Ds_2 & 0 & 0 & & & & & 0 \\
0 & Di_3 & Dp_3 & Ds_3 & 0 & & & & & \\
. & 0 & . & . & . & & & & & \\
. & & & . & . & . & & & & \\
. & & & & . & . & . & & & \\
. & & & & & . & . & . & 0 & \\
. & & & & & & Di_{N-2} & Dp_{N-2} & Ds_{N-2} & 0 \\
0 & & & & & & 0 & Di_{N-1} & Dp_{N-1} & Ds_{N-1} \\
0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & Di_N & Dp_N
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \\ y_N \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \end{Bmatrix}
$$

On peut résoudre ce système par la méthode de Gauss. on obtient les résulta sous forme d'un tableau.

$x(K)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$					$x(N)$
$y(K)$	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$					$y(N)$

La méthode de Gauss consiste a transformé le système linéaire vers un système triangulaire supérieure. Dans le cas d'un système tri diagonale, on doit éliminer la diagonale inferieure, Selon les étapes suivant :

On crée un zéro dans *Di(2)* :

$$L_2^* = L_2 - \frac{Di_2}{Dp_1}.L_1 = \left(Di_2,\ Dp_2,\ Ds_2,\ 0,0,....,0,\right) - \frac{Di_2}{Dp_1}.\left(Dp_1,\ Ds_1,\ 0,0,....,0\right)$$

$$\boxed{L_2^* = \left(0,\quad Dp_2 - \frac{Di_2}{Dp_1}.Ds_1,\quad Ds_2\ ,0,0,....,0,\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f_2^* = f_2 - \frac{Di_2}{Dp_1}.f_1}$$

On crée un zéro dans *Di(3)* :

$$L_3^* = L_3 - \frac{Di_3}{Dp_2^*}.L_2^* = \left(0, Di_3,\ Dp_3,\ Ds_3, 0,0,....,0\right) - \frac{Di_3}{Dp_2^*}.\left(0,\ Dp_2^*,\ Ds_2, 0,0,....,0\right)$$

$$\boxed{L_3^* = \left(0\ ,\ 0,\quad Dp_3 - \frac{Di_3}{Dp_2^*}.Ds_2\quad ,\ Ds_2\ ,0,0,....,0\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f_3^* = f_3 - \frac{Di_3}{Dp_2^*}.f_2^*}$$

On crée un zéro dans *Di(K+1)* : on calcule $R = \dfrac{Di_{K+1}}{Dp_K^*}$

$\boxed{Di_{K+1}^* = 0}$; $\boxed{Dp_{K+1}^* = Dp_{K+1} - R.Ds_K}$; $\boxed{Ds_{K+1}^* = Ds_{K+1}}$; $\boxed{f_{K+1}^* = f_{K+1} - R\ .\ f_K^*}$; $\boxed{K = 1 \rightarrow N-1}$

$$
\begin{bmatrix}
Dp_1 & Ds_1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & Dp_2^* & Ds_2 & 0 & 0 & & & & & 0 \\
0 & 0 & Dp_3^* & Ds_3 & 0 & & & & & \\
. & 0 & . & . & . & & & & & \\
. & & & . & . & . & & & & \\
. & & & & . & . & . & & & \\
. & & & & & . & . & . & 0 & \\
. & & & & & & 0 & Dp_{N-2}^* & Ds_{N-2} & 0 \\
0 & & & & & & 0 & 0 & Dp_{N-1}^* & Ds_{N-1} \\
0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & Dp_N^*
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \\ y_N \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2^* \\ f_3^* \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{N-2}^* \\ f_{N-1}^* \\ f_N^* \end{Bmatrix}
$$

Résoudre système triangulaire :

Pour K=N $\rightarrow Dp_N^*.y_N = f_N^* \quad \rightarrow y_N = \dfrac{f_N^*}{Dp_N^*}$

Pour K=N-1 $\rightarrow Dp_{N-1}^*.y_{N-1} + Ds_{N-1}.y_N = f_{N-1}^* \quad \rightarrow y_{N-1} = \dfrac{f_{N-1}^* - Ds_{N-1}.y_N}{Dp_{N-1}^*}$

Pour K=N-2 $\rightarrow Dp_{N-2}^*.y_{N-2} + Ds_{N-2}.y_{N-1} = f_{N-2}^* \quad \rightarrow y_{N-2} = \dfrac{f_{N-2}^* - Ds_{N-2}.y_{N-1}}{Dp_{N-2}^*}$

Pour K=2 $\rightarrow Dp_2^*.y_2 + Ds_2.y_3 = f_2^* \rightarrow y_2 = \dfrac{f_2^* - Ds_2.y_3}{Dp_2^*}$

Pour K=1 $\rightarrow Dp_1^*.y_1 + Ds_1.y_2 = f_1^* \rightarrow y_1 = \dfrac{f_1^* - Ds_1.y_2}{Dp_1^*}$

Formule générale : $\boxed{y_N = \dfrac{f_N^*}{Dp_N^*}}$ et $\boxed{y_K = \dfrac{f_K^* - Ds_K.y_{K+1}}{Dp_K^*} \quad ; \quad K = N-1 \rightarrow 1}$

Exercice 1 : résoudre l'équation différentielle par la méthode **différences** finies :

$x \in [0,1]$; N=5 ; H=(1-0)/(5-1)=1/4

K=1	K= 2	K= 3	K= 4	K= 5
X(1)= 0	X(2)= $\frac{1}{4}$	X(3)= $\frac{1}{2}$	X(4)= $\frac{3}{4}$	X(5)= 1
y(1)= ?	y(2)= ?	y(3)= ?	y(4)= ?	y(5)= ?

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y = 3 & \rightarrow x = 0 \\ x^2.\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3.x\dfrac{dy}{dx} + y = 1 & \rightarrow x \in]0,1[\\ \dfrac{dy}{dx} = 0 & \rightarrow x = 1 \end{cases}} \rightarrow \boxed{\begin{cases} K=1 \rightarrow \dfrac{y_2 - y_1}{H} + y_1 = 3 \rightarrow (1-\dfrac{1}{H}).y_1 + \dfrac{1}{H}.y_2 = 3 \\ K=2,3,4 \rightarrow x_K^2.\dfrac{y_{K-1} - 2.y_K + y_{K+1}}{H^2} - 3.x_K.\dfrac{y_{K+1} - y_{K-1}}{2.H} + y_K = 1 \\ K=5 \rightarrow \dfrac{y_5 - y_4}{H} = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} K=1 \rightarrow -3.y_1 + 4.y_2 = 3 \\ K=2,3,4 \rightarrow (\dfrac{x_K^2}{H^2} + \dfrac{3.x_K}{2.H}).y_{K-1} + (-2.\dfrac{x_K^2}{H^2} + 1).y_K + (\dfrac{x_K^2}{H^2} - \dfrac{3.x_K}{2.H}).y_{K+1} = 1 \\ K=5 \rightarrow -y_4 + y_5 = 0 \end{cases}}$$

Sous forme matrice :

$$\begin{array}{l} K=1,\ x_1=0 \rightarrow \\ K=2,\ x_2=0.25 \rightarrow \\ K=3,\ x_3=0.5 \rightarrow \\ K=4,\ x_4=0.75 \rightarrow \\ K=5,\ x_5=1 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & -1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13.5 & -17 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.33 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14.545 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3.5 \\ -9.501 \\ -22.318 \\ 1.534 \end{Bmatrix}$$

Résoudre le système tri diagonale par La méthode de Gauss, on doit éliminer la diagonale inferieure.
On crée des zéro dans ***Di(K+1)*** *solen les étapes suivant :* pour $K = 1 \rightarrow N-1$

	$R = \dfrac{Di_{K+1}}{Dp_K^*}$	$Di_{K+1}^* = 0$	$Dp_{K+1}^* = Dp_{K+1} - R.Ds_K$	$Ds_{K+1}^* = Ds_{K+1}$	$f_{K+1}^* = f_{K+1} - R\ .\ f_K^*$
K=1	$R = \dfrac{2.5}{-3}$	$Di_2^* = 0$	$Dp_2^* = -1 - \dfrac{2.5}{-3}.4 = 2.333$	$Ds_2^* = -0.5$	$f_2^* = 1 - \dfrac{2.5}{-3}.3 = 3.5$
K=2	$R = \dfrac{7}{2.333}$	$Di_3^* = 0$	$Dp_3^* = -7 - \dfrac{7}{2.333}.(-0.5) = -5.5$	$Ds_3^* = 1$	$f_3^* = 1 - \dfrac{7}{2.333} * 3.5 = -9.501$
K=3	$R = \dfrac{13.5}{-5.5}$	$Di_4^* = 0$	$Dp_4^* = -17 - \dfrac{13.5}{-5.5}.1 = -14.545$	$Ds_4^* = 4.5$	$f_4^* = 1 - \dfrac{13.5}{-5.5}.(-9.5) = -22.318$
K=4	$R = \dfrac{-1}{-14.545}$	$Di_5^* = 0$	$Dp_5^* = 1 - \dfrac{-1}{-14.545} * 4.5 = 0.691$	/	$f_5^* = 0 - \dfrac{-1}{-14.545}.(-22.318) = 1.534$

La solution du système est : Pour K=N=5 : $y_5 = \frac{f_5^*}{Dp_5^*} = \frac{1.534}{0.691} = 2.22$

	$y_K = \frac{f_K^* - Ds_K . y_{K+1}}{Dp_K^*}$; $K = N-1 \to 1$
K=4	$y_4 = (-22.318 - 4.5 . y_5)/(-14.545) = 2.22$
K=3	$y_3 = (-9.501 - y_4)/(-5.5) = 2.131$
K=2	$y_2 = (3.5 + 0.5 * y_3)/(2.333) = 1.957$
K=1	$y_1 = (3 - 4 . y_2)/(-3) = 1.609$

Remarque : pour exécuter le programme on doit écrire les coefficients des équations différentielles comme suite :

$$\Rightarrow \begin{cases} a(1)=1 \quad ; \ b(1)=1 \quad ; \ f(1)=3 \\ a(2:n-1)=x(2:n-1).\hat{}\,2 \quad ; \ b(2:n-1)=-3*x(2:n-1). \ ; \ C(2:n-1)=1; \ \ f(2:n-1)=1 \\ a(n)=1 \quad ; \ b(n)=0 \quad ; \ f(n)=0; \quad ; \end{cases}$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle par la méthode **différences** finies :

$$\begin{cases} y=1 \quad \to x=0 \\ \frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2*y=0 \quad \to x\in \,]0,2[\\ y=2 \quad \to x=2 \end{cases}$$

La solution est : $\boxed{y_5 = 2 \ ; y_4 = 4.111; \ \ y_3 = 6.333; \ \ y_2 = 6.667 \ ; \ y_1 = 1}$

écrire un programme qui résoudre équation différentielle générale 2[eme] ordre par Méthodes des différences finies :

```
clc  ;   clear all
x1=0 ;xn=1 ; n=5 ;  h=(xn-x1)/(n-1) ;  x(1:n)=[x1:h:xn];
a(1)=1    ;   b(1)=1  ;    f(1)=3 ;
a(2:n-1)=x(2:n-1).^2 ; b(2:n-1)=-3*x(2:n-1);c(2:n-1)=1;f(2:n-1)=1;
a(n)=1    ;   b(n)=0  ;    f(n)=0 ;
%========== resoudre equation diff 2emme ordre =========
%==========construire  le systeme tri-diagonal===========
dp(1)=b(1)-(a(1)/h)   ;   ds(1)=a(1)/h    ;
     for k=2:n-1
          di(k)=(a(k)/h^2)     -(0.5*b(k)/h) ;
          dp(k)=-(2*a(k)/h^2)  +c(k)         ;
          ds(k)=(a(k)/h^2)     +(0.5*b(k)/h) ;
     end
     di(n)=-a(n)/h  ; dp(n)=b(n)+(a(n)/h)    ;
%=========== resoudre le systeme tri-diagonal
    for k=1:n-1
r= di(k+1)/dp(k);
dp(k+1)=dp(k+1)-r*ds(k);
f(k+1)= f(k+1)-r* f(k);
    end
y(n)=f(n)/dp(n);
    for k=n-1:-1:1
      y(k)=(f(k)-ds(k)*y(k+1)) /dp(k);
    end
%================ affichage des résultats  =================
x
y
plot(x,y,'-*')
```