Résoudre équation différentielle à coefficient variable par un changement variable :

$$a(x).\frac{d^2y}{dx^2}+b(x).\frac{dy}{dx}+c(x).y=f(x)$$

Exercice 1 : $$x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}-4.y=4.x^2$$

On fait un changement variable , On pose : $x=e^t$

on dérive par rapporte t : $\frac{dx}{dt}=e^t$ Donc : $\boxed{\frac{dt}{dx}=e^{-t}}$

Calcule :

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}.e^{-t}}$$

et $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}.e^{-t}\right).\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[\frac{d^2y}{dt^2}.e^{-t}-e^{-t}.\frac{dy}{dt}\right].\left(e^{-t}\right)$$

Donc : $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}.e^{-2.t}-\frac{dy}{dt}.e^{-2.t}}$$

On remplace dans l'équation : $$x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}-4.y=4.x^2$$

$$e^{2.t}.\left[\frac{d^2y}{dt^2}.e^{-2.t}-\frac{dy}{dt}.e^{-2.t}\right]+e^t.\left[\frac{dy}{dt}.e^{-t}\right]-4.y=4.e^{2.t}$$

Donc l'équation revient : $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}-4.y=4.e^{2.t}}$$

Exercice 1 : $$(1-x^2).\frac{d^2y}{dx^2}+-x.\frac{dy}{dx}+y=f(x)$$

On fait un changement variable, On pose : $x=\cos(t)$

On dérive par rapporte t : $\frac{dx}{dt}=-\sin(t)$ Donc : $\boxed{\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin(t)}}$

Calcule :

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=-\frac{dy}{dt}.\frac{1}{\sin(t)}}$$

Et $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dt}.\frac{1}{\sin(t)}\right).\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{1}{\sin(t)}+\frac{dy}{dt}.\frac{0-\cos(t)}{\sin^2(t)}\right].\left(\frac{-1}{\sin(t)}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{1}{\sin^2(t)}+\frac{dy}{dt}.\frac{\cos(t)}{\sin^3(t)}}$$

On remplace dans l'équation : $$(1-x^2).\frac{d^2y}{dx^2}+-x.\frac{dy}{dx}+y=f(x)$$

$$(1-\cos^2(t)).\left[-\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{1}{\sin^2(t)}+\frac{dy}{dt}.\frac{0-\cos(t)}{\sin^3(t)}\right]-\cos(t).\left[-\frac{dy}{dt}.\frac{1}{\sin(t)}\right]+y=f(\cos(t))$$

On a : $\boxed{\cos^2(t)+\sin^2(t)=1 \;\rightarrow\; 1-\cos^2(t)=\sin^2(t)}$

Donc l'équation revient : $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+y=F(t)}$$

Exercice :

Calcule l'intégrale par changement variable :

$$A = \int \sqrt{e^x - 1}.dx$$

$$\sqrt{e^x - 1} = U \rightarrow e^x - 1 = U^2 \rightarrow e^x = U^2 + 1$$

On dérive /x : $\dfrac{dU}{dx} = \dfrac{e^x}{2.\sqrt{e^x - 1}} \rightarrow \dfrac{dU}{dx} = \dfrac{U^2 + 1}{2.U}$

$$\rightarrow dx = \frac{2.U}{U^2 + 1}.dU$$

On remplace on trouve :

$$A = \int \sqrt{e^x - 1}.dx = \int U.\frac{2.U}{U^2 + 1}.dU$$

$$A = 2.\int \frac{U^2 + 1 - 1}{U^2 + 1}.dU$$

$$A = 2.\int 1.dU - 2.\int \frac{1.dU}{U^2 + 1}$$

$$A = 2.U - \frac{2}{1} Arc\,\mathrm{Tan}\left(\frac{U}{1}\right) + c$$

$$A = 2.\sqrt{e^x - 1} - 2 Arc\,\mathrm{Tan}\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + c$$

Exemple :

$$\int \exp(\sqrt{x}).dx = ?$$

on pose

$$x = z^2 \xrightarrow{derive/z} \frac{dx}{dz} = 2.z$$

$$dx = 2.z.dz$$

on remplace :

$$\int \exp(\sqrt{x}).dx = \int 2.z.\exp(z).dz$$

$$= \exp(z).\left[\frac{2.z}{1} - \frac{2}{1^2}\right]$$

$$= \exp(z).[2.z - 2]$$

$$= \exp(\sqrt{x}).\left[2.\sqrt{x} - 2\right] + C$$