Modélisation de système par Chaîne de Markov

Considérons un système composé de n composants, chaque composant ayant un nombre fini d'états de fonctionnement et de panne ; ce système est supposé réparable et chaque composant est réparé après constatation de la panne. Le système est donc compose :

- **états de fonctionnement** : un état de bon fonctionnement ou tous les composants fonctionnent, et des états ou certains composants sont en panne mais le système reste fonctionnel,
- **états de pannes :** où suffisamment de composants sont en panne pour affecter le système global.

La construction du modèle se fait en 3 étapes :

1. recensement de tous les états du système. Si chaque composant a 2 états (ok ou ko) et si le système à n composants, le nombre maximal d'états est 2^n. Au cours de la vie du système, des états de panne peuvent apparaitre à la suite de défaillance ou disparaitre à la suite de réparation.
2. recensement de toutes les transitions possibles entre ces différents états et l'identification de toutes les causes de ces transitions. Les causes des transitions sont généralement des défaillances des composants ou la réparation de composants ;
3. calcul des probabilités de se trouver dans les différents états au cours d'une période de vie du système, calcul de temps moyens MTTF

1) Méthodologie

Pour établir un graph d'état d'un système, il faut prendre en considération :
Le nombre de composants qui constituent le système ;   La structure du système ;
Le nombre de réparateur ;   La politique de maintenance.

2) Système à 1 entité

Tous les systèmes dont l'état de fonctionnement futur ne dépend que de l'état présent peuvent être décrits par un processus de Markov et en particulier, ceux pour les lesquels les probabilités de transition entre 2 états quelconques ne sont pas affectés par le temps. Il est alors homogène. C'est le cas de tous les phénomènes à distribution exponentielle.

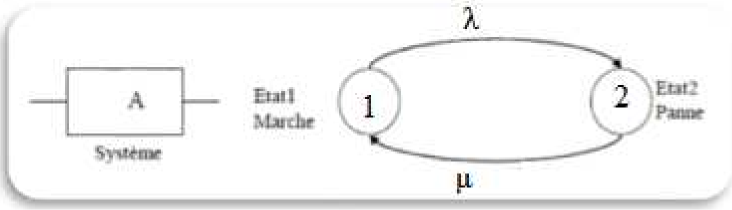


Figure 1 : Graphique d'état modélisent la disponibilité

Tel que les Taux de transition
$\boldsymbol{\lambda}$ **:** le Taux de transition de défaillance en fonctionnement.
μ : le Taux de transition de réparation.

- Chaque état du système est un **sommet** du graphe. Il est représenté par un cercle. A chaque état Ei est associée une probabilité qui dépend du temps :

$$Pi\ (t) = P(E(t) = Ei\ )$$

- Chaque transition est symbolisée par une **flèche** dirigée de l'état initial vers l'état final. A chaque transition est associé un taux défini par la probabilité conditionnelle d'occurrence de la transition :

3) Matrice de taux de transition

On considère le système simple à deux états présenté à la figure (1)
Conditions initiales au départ le système fonctionne P1(0) =1 et P2(0) = 0.

Rappel : $\Sigma\ Pi = 1$ ou $1 + P2 = 1\ \forall t\ ou\ \frac{dP_1(t)}{dt} + \frac{dP_2(t)}{dt} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda.P_1(t) + \mu.P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda.P_1(t) - \mu.P_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{dP_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{dP\ (t)}{dt} = Q.P$$

Cette nouvelle matrice Q, appelée **matrice des taux de transition** : $\boxed{Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu\end{bmatrix}}$

La somme des probabilités de chaque collons est toujours nulle.

- ✓ On peut construire la **matrice des probabilités** qui caractérise le système :

$$\frac{dP(t)}{dt}=Q.P \rightarrow \frac{P(t+dt)-P(t)}{dt}=Q.P(t) \rightarrow \ P(t+dt)=P(t)+Q.dt.P(t) \ \rightarrow P(t+dt)=\left(I+Q.dt\right).P(t)$$

La matrice des probabilités $\boxed{M=I+Q.dt=\begin{bmatrix}1-\lambda.dt & \mu.dt \\ \lambda.dt & 1-\mu.dt\end{bmatrix}}$

4) Résolution des équations différentielles

Les équations obtenues par le graphe d'état de Markov sont : $\begin{cases}\dfrac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda.P_1(t)+\mu.P_2(t) & {*}{*}{*}{*}{*}{*}(1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt}=\lambda.P_1(t)-\mu.P_2(t) & {*}{*}{*}{*}{*}{*}(2)\end{cases}$

Nous savons que $P_1(t)+P_2(t)=1$ Donc $P_2(t)=1-P_1(t)$ …. (1)

Si en remplaçant (1) en (2) nous obtenons ce qui suit :

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda.P_1(t)+\mu.P_2(t) \ \rightarrow \ \frac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda.P_1(t)+\mu.\left(1-P_1(t)\right) \ \rightarrow \ \frac{dP_1(t)}{dt}+(\lambda+\mu).P_1(t)=\mu$$

Ce type d'équation est sous la forme linéaire.

On cherche la solution homogène $P_1^H=? \rightarrow$ résoudre l'équation sans second Membre E.S.S.M :

$$\frac{dP_1^H(t)}{dt}+(\lambda+\mu).P_1^H(t)=0 \rightarrow \int\frac{dP_1^H(t)}{P_1^H(t)}=-\int(\lambda+\mu).dt+C \ \rightarrow Ln\left(P_1^H(t)\right)=-(\lambda+\mu).t+C$$

$$e^{Ln\left(P_1^H(t)\right)}=e^{-(\lambda+\mu).t}.e^C \ \rightarrow \ P_1^H(t)=K.e^{-(\lambda+\mu).t}$$

On cherche la solution particulaire $P_1^P=? \rightarrow f(t)=\mu=C^{st}$ dans ce cas P_1^P est constant donc $P_1^P=A$

On Détermine la valeur de **A** :

On a $\dfrac{dP_1^P}{dt}=0$, On remplace dans l'équation principale : $\dfrac{dP_1^P(t)}{dt}+(\lambda+\mu).P_1^P(t)=\mu \ \rightarrow \ 0+(\lambda+\mu).A=\mu$

donc $\boxed{A=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}}$

La solution totale : $P_1(t)=P_1^H(t)+P_1^P(t)=K.e^{-(\lambda+\mu).t}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

On détermine la valeur *K à partir de condition initiale :*

$P_1(t=0)=1=K.e^0+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \ \rightarrow K=1-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \ \rightarrow \ K=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ Donc : $\boxed{P_1(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}.e^{-(\lambda+\mu).t}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}}$

On a $P_2(t)=1-P_1(t)=1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}.e^{-(\lambda+\mu).t}-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \ \rightarrow \ \boxed{P_2(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}.\left(1-e^{-(\lambda+\mu).t}\right)}$

5) Système à 2 entités $\lambda_1 + \lambda_2$

- **Dispositif non réparable**

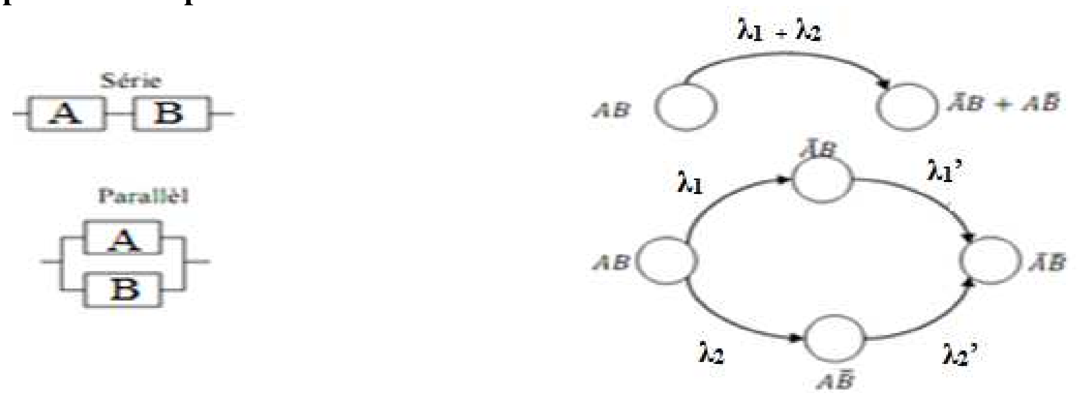


Figure 2 : Dispositif non réparable d'un système à deux entités

- **Dispositif réparable**

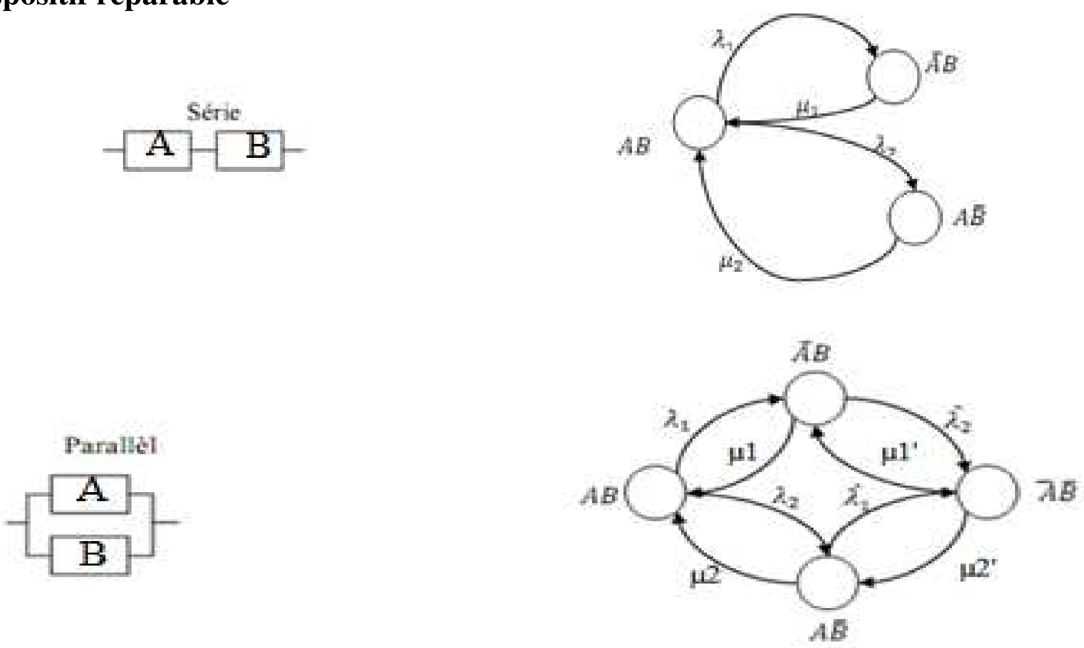
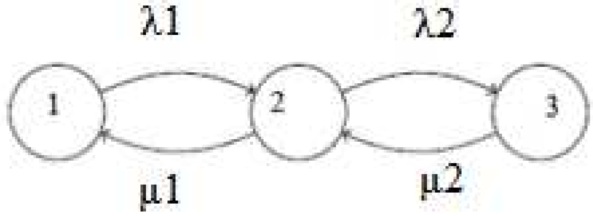


Figure 3 : Dispositif réparable d'un système à deux entités

- **Simplification**

Quand on modélise un système avec une chaîne de Markov, on rencontre le problème de l'explosion combinatoire des états puisque la chaîne a priori 2^n états pour un système de n éléments à 2 états. Il est néanmoins possible de réduire la taille de la chaîne en agglomérant des états. Cela suppose que les composants soient identiques avec les mêmes taux de défaillance et de réparation. Dans le cas d'un système à deux composants actifs, on peut simplifier les chaines comme ci-dessus :



Les équations du modèle de chaine de Markov est comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_1.P_1(t) + \mu_1.P_2(t) & *****(1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1.P_1(t) - (\lambda_2+\mu_1).P_2(t) + \mu_2.P_3(t) & *****(2) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2.P_2(t) - \mu_2.P_3(t) & *****(3) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{dP_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2-\mu_1 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow \dfrac{dP\,(t)}{dt} = Q.P$ (La somme des probabilités de chaque collons est toujours nulle).

Matrice des taux de transition $Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2-\mu_1 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\mu_2 \end{bmatrix}$

La matrice des probabilités $M = I + Q.dt = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1.dt & \mu_1.dt & 0 \\ \lambda_1.dt & 1-\lambda_2.dt-\mu_1.dt & \mu_2.dt \\ 0 & \lambda_2.dt & 1-\mu_2.dt \end{bmatrix}$

- **Résolution des équations différentielles**

On a les conditions initiale $P_1(0)=1$, $P_2(0)=0$ et $P_3(0)=0$

On a $\boxed{P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)=1 \rightarrow P_3(t)=1-P_1(t)-P_2(t)}$ on remplace dans l'équation (2) donc on peut écrire le système d'équation comme suit

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_1.P_1(t)+\mu_1.P_2(t) & ******(1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt}=(\lambda_1-\mu_2).P_1(t)-(\lambda_2+\mu_1+\mu_2).P_2(t)+\mu_2 & ******(4) \end{cases}}$$

L'équation (1) $\rightarrow$ $P_2(t)=\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{dP_1(t)}{dt}+\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}.P_1(t)$ on dérive /t $\dfrac{dP_2(t)}{dt}=\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{d^2P_1(t)}{dt^2}+\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}.\dfrac{dP_1(t)}{dt}$

On remplace dans l'équation (4) $\rightarrow$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{d^2P_1(t)}{dt^2}+\frac{\lambda_1}{\mu_1}.\frac{dP_1(t)}{dt}=(\lambda_1-\mu_2).P_1(t)-(\lambda_2+\mu_1+\mu_2).\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{dP_1(t)}{dt}+\frac{\lambda_1}{\mu_1}.P_1(t)\right)+\mu_2$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{d^2P_1(t)}{dt^2}+\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{(\lambda_2+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1}\right).\frac{dP_1(t)}{dt}+(-\lambda_1+\mu_2+\frac{\lambda_1.(\lambda_2+\mu_1+\mu_2)}{\mu_1}).P_1(t)=\mu_2$$

$$\boxed{\frac{d^2P_1(t)}{dt^2}+(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2).\frac{dP_1(t)}{dt}+(\lambda_1.\lambda_2+\lambda_1.\mu_2+\mu_2.\mu_1).P_1(t)=\mu_2.\mu_1 \quad ********(5)}$$

C'est une équation différentielle 2eme ordre de la forme : $a.\dfrac{d^2P_1(t)}{dt^2}+b.\dfrac{dP_1(t)}{dt}+c.P_1(t)=f(t)$

- **Recherche la solution homogène** $P_1^H(t)=?$: résoudre E.S.S.M $\rightarrow$ $\boxed{a.\dfrac{d^2P_1(t)}{dt^2}+b.\dfrac{dP_1(t)}{dt}+c.P_1(t)=0}$

- On donne l'équation caractéristique E.C : $\boxed{a.R^2+b.R+c=0}$

Résoudre E.C On calcule $\Delta=b^2-4.a.c$ Les solutions de E.C $R_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$ et $R_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$

$$\boxed{P_1^H(t)=C_1.e^{R_1.t}+C_2.e^{R_2.t}}$$

- **Recherche la solution particulière** $P_1^P(t)=? \rightarrow f(t)=\mu_1.\mu_2.e^{0.t}=q_N(t).e^{S.t}$, tel que $q_N(t)$ c'est un *polynôme ordre N, dans ce cas N=0 et S=0* donc $P_1^P(t)=a_N(t).e^{S.t}.t^m=a_0.e^{0.t}.t^m$

Le terme t^m est introduit pour **éviter** la répétition des solutions $\boxed{e^{R_1.t}}$ et $\boxed{e^{R_2.t}}$ de E.S.S.M dans la solution particulière $\boxed{y_P=e^{S.t}}$ c'est-à-dire $\boxed{\begin{cases} m=0 & \rightarrow S\neq R_1 \ \ et \ \ R_2 \\ m=1 & \rightarrow S=R_1 \ \ ou \ \ R_2 \\ m=2 & \rightarrow S=R_1 \ \ et \ \ R_2 \end{cases}}$

- **La Solution totale** $\boxed{P_1(t)=P_1^H(t)+P_1^P(t)=C_1.e^{R_1.t}+C_2.e^{R_2.t}+a_0.t^m}$

  Tel que C1 et C2 sont déterminé par les conditions initiales

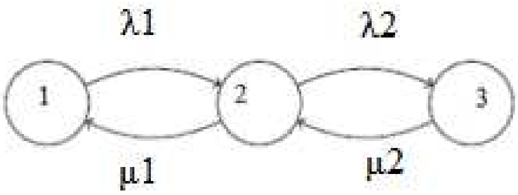
- On remplace dans $P_2(t)=\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{dP_1(t)}{dt}+\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}.P_1(t)$ on trouve,

$$\boxed{P_2(t)=\frac{1}{\mu_1}.\left[C_1.(\lambda_1+R_1).e^{R_1.t}+C_2.(\lambda_1+R_2).e^{R_2.t}+a_0.(\lambda_1.t^m+m.t^{m-1})\right]}$$

- Et on remplace dans $P_3(t)=1-P_1(t)-P_2(t)$ on trouve

$$\boxed{P_3(t)=1-\frac{1}{\mu_1}.\left[C_1.(\lambda_1+\mu_1+R_1).e^{R_1.t}+C_2.(\lambda_1+\mu_1+R_2).e^{R_2.t}+a_0.((\lambda_1+\mu_1).t^m+m.t^{m-1})\right]}$$

Application : on a un système à deux composants avec 3 états comme suite :



Les équations du modèle de chaine de Markov est comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_1.P_1(t) + \mu_1.P_2(t) & *****(1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1.P_1(t) - (\lambda_2+\mu_1).P_2(t) + \mu_2.P_3(t) & *****(2) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \qquad \lambda_2.P_2(t) - \mu_2.P_3(t) & *****(3) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{dP_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2-\mu_1 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

Calcul la disponibilité :

Si on considère (1) et (2) comme des états de marche la disponibilité du système D(t), est la probabilité que le système fonctionne à l'instant t, s'exprime par :

$D(t) = \sum_{i \in \text{état de fonctionnement}} P_i^D(t)$

Dans ce cas : $D(t) = P_1^D(t) + P_2^D(t)$

On a les conditions initiale $P_1^D(0) = 1$, $P_2^D(0) = 0$ et $P_3^D(0) = 0$

On donne : $\lambda_1 = 1.2$ $\lambda_2 = 0.6$ $\mu_1 = 0.3$ $\mu_2 = 0.3$

La solution de système est :

$$\boxed{\frac{d^2P_1(t)}{dt^2} + (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2).\frac{dP_1(t)}{dt} + (\lambda_1.\lambda_2+\lambda_1.\mu_2+\mu_2.\mu_1).P_1(t) = \mu_2.\mu_1 \quad ********(5)}$$

$$\frac{d^2P_1(t)}{dt^2} + 2.4*\frac{dP_1(t)}{dt} + 1.71*P_1(t) = 0.09$$

✓ **Recherche la solution homogène** $P_1^H(t) = ?$: résoudre E.S.S.M $\rightarrow$

$$\frac{d^2P_1(t)}{dt^2} + 2.4*\frac{dP_1(t)}{dt} + 1.71*P_1(t) = 0$$

✓ On donne l'équation caractéristique E.C : $\boxed{a.R^2 + b.R + c = 0 \rightarrow R^2 + 2.4*R + 1.17 = 0}$

Résoudre E.C On calcule $\Delta = b^2 - 4.a.c = 2.4^2 + 4*1*1.17 = 1.08$

Les solutions de E.C :

$$R_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-2.4-\sqrt{1.08}}{2} = \text{-1.7196} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-2.4+\sqrt{1.08}}{2} = \text{-0.6804}$$

$$\boxed{P_1^H(t) = C_1.e^{R_1.t} + C_2.e^{R_2.t}}$$

✓ **Recherche la solution particulière** $P_1^P(t) = ? \rightarrow f(t) = \mu_1.\mu_2.e^{0.t} = q_N(t).e^{S.t}$, tel que $q_N(t)$ c'est un *polynôme ordre N, dans ce cas N=0 et S=0* donc $P_1^P(t) = a_N(t).e^{S.t}.t^m = a_0.e^{0.t}.t^m$

On a $S \neq R_1$ *et* $R_2 \rightarrow m = 0$ donc $P_1^P(t) = a_0$

$$\boxed{P_1(t) = P_1^H(t) + P_1^P(t) = C_1.e^{R_1.t} + C_2.e^{R_2.t} + a_0}$$

✓ On remplace dans $P_2(t) = \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{dP_1(t)}{dt} + \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}.P_1(t)$ on trouve,

$$\boxed{P_2(t) = \frac{1}{\mu_1}.\left[C_1.(\lambda_1 + R_1).e^{R_1.t} + C_2.(\lambda_1 + R_2).e^{R_2.t} + a_0.\lambda_1\right]}$$

✓ Et on remplace dans $P_3(t) = 1 - P_1(t) - P_2(t)$ on trouve

$$\boxed{P_3(t) = 1 - \frac{1}{\mu_1}.\left[C_1.(\lambda_1 + \mu_1 + R_1).e^{R_1.t} + C_2.(\lambda_1 + \mu_1 + R_2).e^{R_2.t} + a_0.(\lambda_1 + \mu_1)\right]}$$

On a les conditions initiale $P_1^D(0) = 1$, $P_2^D(0) = 0$ et $P_3^D(0) = 0$

Calcul de la fiabilité

Pour calculer la fiabilité d'un système représente sous forme d'une chaîne de Markov, il faut modifier la chaîne de façon à éliminer toutes les transitions de réparation d'un état de panne vers un état de fonctionnement. Les états de panne deviennent alors absorbants.

Ainsi la nouvelle chaîne de Markov associée à un système en redondance active à 2 composants devient

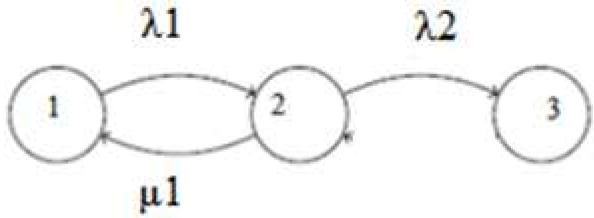


Figure : Chaine de Markov à deux composants pour calculer la fiabilité

La fiabilité du système est : $R(t) = \sum_{i \in \text{état de fonctionnement}} P_i^R(t)$

On a les conditions initiale $P_1^R(0) = 1$, $P_2^R(0) = 0$ et $P_3^R(0) = 0$

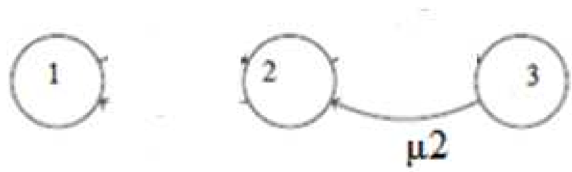
On donne : $\lambda_1 = 1.2$ $\lambda_2 = 0.6$ $\mu_1 = 0.3$

Les équations du modèle de chaine de Markov est comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_1.P_1(t) + \mu_1.P_2(t) & *****(1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1.P_1(t) - (\lambda_2 + \mu_1).P_2(t) & *****(2) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2.P_2(t) & *****(3) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{dP_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 - \mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

La maintenabilité

Probabilité que le système soit réparé dans l'intervalle [0,t] sachant qu'il était en panne à l'instant 0, se calcule en rendant absorbant les états de marche (1) et (2) :



$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = 0 & *****(1) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \mu_2.P_3(t) & *****(2) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -\mu_2.P_3(t) & *****(3) \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{dP_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

On a les conditions initiale $P_1^M(0) = 0$, $P_2^M(0) = 0$ et $P_3^M(0) = 1$, et On donne : $\mu_2 = 0.3$