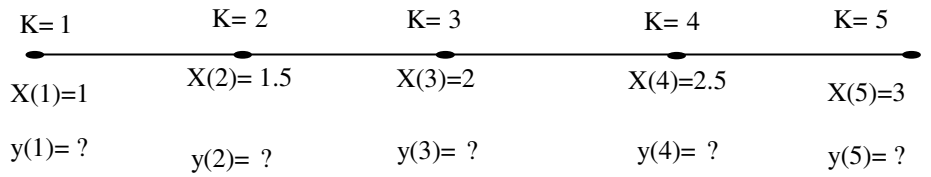


Suite TD 4

Exercice 1:

Résoudre l'équation différentielle par la méthode différence finies dans l'intervalle $x \in [1,3]$ Avec Nombre de points $N=5$, et le pas $H=(3-1)/(5-1)=0.5$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 4.y = 1 & ; & x = 1 \\ (2-x). \frac{d^2 y}{dx^2} + 3. \frac{dy}{dx} + x.y = 4.x^2 \\ \frac{dy}{dx} + 2.y = 5 & ; & x = 3 \end{cases}$$



➤ En remplaçant par les lois de la méthode différence finies on trouve :

$$\begin{cases} K=1 \rightarrow \left(\quad \right) y(1) + \left(\quad \right) y(2) = \left(\quad \right) \\ K=2,3,4 \rightarrow \left(\quad \right) y_{K-1} + \left(\quad \right) y_K + \left(\quad \right) y_{K+1} = 4.x_K^2 \\ K=5 \rightarrow \left(\quad \right) y(4) + \left(\quad \right) y(5) = \left(\quad \right) \end{cases}$$

➤ construire le système tri-diagonal :

$$\begin{matrix} K=1 \rightarrow \\ K=2 \rightarrow \\ K=3 \rightarrow \\ K=4 \rightarrow \\ K=5 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \\ y5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \end{Bmatrix}$$

➤ en utilisant la méthode de Gauss pour résoudre le système d'équation :

Le système après transformation :

$$\begin{matrix} K=1 \rightarrow \\ K=2 \rightarrow \\ K=3 \rightarrow \\ K=4 \rightarrow \\ K=5 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\quad \right) & \left(\quad \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\quad \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \\ y5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \\ \left(\quad \right) \end{Bmatrix}$$

➤ La solution de système est:

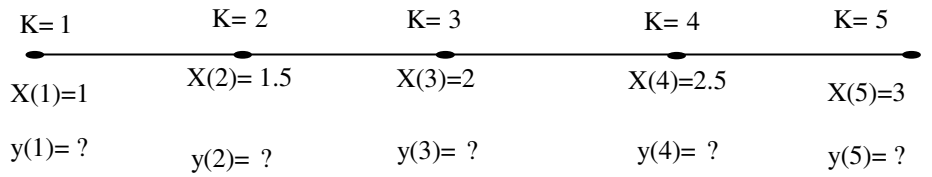
Y1	Y2	Y3	Y4	Y5

Solution :

Exercice 1:

Résoudre l'équation différentielle par la méthode différence finies dans l'intervalle $x \in [1,3]$ Avec Nombre de points $N=5$, et le pas $H=(3-1)/(5-1)=0.5$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 4.y = 1 & ; & x = 1 \\ (2-x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \cdot \frac{dy}{dx} + x.y = 4.x^2 \\ \frac{dy}{dx} + 2.y = 5 & ; & x = 3 \end{cases}$$



➤ En remplaçant par les lois de la méthode différence finies on trouve :

$$\begin{cases} K=1 \rightarrow \left(-\frac{1}{H} + 4 \right) y_{(1)} + \left(\frac{1}{H} \right) y_{(2)} = (1) \\ K=2,3,4 \rightarrow \left(\frac{2-x_K}{H^2} - \frac{3}{2H} \right) y_{(K-1)} + \left(-2 \cdot \frac{2-x_K}{H^2} + x_K \right) y_{(K)} + \left(\frac{2-x_K}{H^2} + \frac{3}{2H} \right) y_{(K+1)} = 4.x_K^2 \\ K=5 \rightarrow \left(-\frac{1}{H} \right) y_{(4)} + \left(\frac{1}{H} + 2 \right) y_{(5)} = (5) \end{cases}$$

➤ construire le système tri-diagonal :

$$\begin{matrix} K=1 \rightarrow \\ K=2 \rightarrow \\ K=3 \rightarrow \\ K=4 \rightarrow \\ K=5 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} (2) & (2) & 0 & 0 & 0 \\ (-1) & (-2.5) & (5) & 0 & 0 \\ 0 & (-3) & (2) & (3) & 0 \\ 0 & 0 & (-5) & (6.5) & (1) \\ 0 & 0 & 0 & (-2) & (4) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1) \\ (9) \\ (16) \\ (25) \\ (5) \end{Bmatrix}$$

Résoudre le système tri diagonale par La méthode de Gauss, on doit éliminer la diagonale inferieure.

On crée des zéro dans $Di(K+1)$ solen les étapes suivant : pour $K = 1 \rightarrow N - 1$

	$R = \frac{Di_{K+1}}{Dp_K^*}$	$Di_{K+1}^* = 0$	$Dp_{K+1}^* = Dp_{K+1} - R \cdot Ds_K$	$Ds_{K+1}^* = Ds_{K+1}$	$f_{K+1}^* = f_{K+1} - R \cdot f_K^*$
K=1	$R = \frac{2}{-1}$	$Di_2^* = 0$	$Dp_2^* = -2.5 - \frac{2}{-1} \cdot 2 = -1.5$	$Ds_2^* = 5$	$f_2^* = 9 - \frac{2}{-1} \cdot 1 = 9.5$
K=2	$R = \frac{-3}{1.5}$	$Di_3^* = 0$	$Dp_3^* = 2 - \frac{3}{1.5} \cdot (5) = -8$	$Ds_3^* = 3$	$f_3^* = 16 - \frac{3}{1.5} \cdot 9.5 = -3$
K=3	$R = \frac{-5}{-8}$	$Di_4^* = 0$	$Dp_4^* = 6.5 - \frac{-5}{-8} \cdot 3 = 4.625$	$Ds_4^* = 1$	$f_4^* = 25 - \frac{-5}{-8} \cdot (-3) = 26.875$
K=4	$R = \frac{-2}{4.625}$	$Di_5^* = 0$	$Dp_5^* = 4 - \frac{-2}{4.625} \cdot 1 = 4.4324$	/	$f_5^* = 5 - \frac{-2}{4.625} \cdot (26.875) = 16.6216$

➤ en utilisant la méthode de Gauss pour résoudre le système d'équation :

Le système après transformation :

$$\begin{array}{l}
 K=1 \rightarrow \\
 K=2 \rightarrow \\
 K=3 \rightarrow \\
 K=4 \rightarrow \\
 K=5 \rightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 (2) & (2) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & (-1.5) & (5) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (-8) & (3) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & (4.625) & (1) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (4.4324)
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l}
 y1 \\
 y2 \\
 y3 \\
 y4 \\
 y5
 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l}
 (1) \\
 (9.5) \\
 (-3) \\
 (26.875) \\
 (16.6216)
 \end{array} \right\}$$

La solution du système est : Pour $K=N=5$: $y_5 = \frac{f_5^*}{Dp_5^*} = \frac{16.6216}{4.4324} = 3.75$

	$y_K = \frac{f_K^* - Ds_K \cdot y_{K+1}}{Dp_K^*} ; K = N - 1 \rightarrow 1$
K=4	$y_4 = (26.875 - 1 \cdot y_5) / (4.625) = 5$
K=3	$y_3 = (-3 - 3 \cdot y_4) / (-8) = 2.25$
K=2	$y_2 = (9.5 - 5 \cdot y_3) / (-1.5) = 1.1667$
K=1	$y_1 = (1 - 2 \cdot y_2) / (2) = -0.6667$

➤ La solution de système est:

Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
-0.6667	1.1667	2.25	5	3.75