TP 4: Equation différentielle partielle EDP :

Résoudre équation de la chaleur (1D) par méthode des différences finies (Schéma explicite)

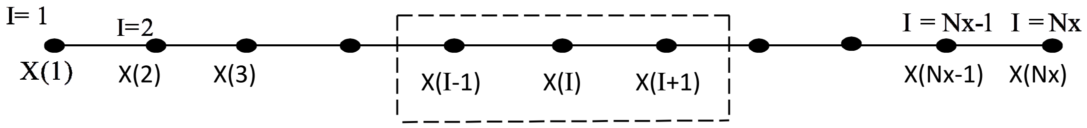
$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad \text{Tel que } x \in [0, x_{\max}] \text{ et } \quad t \geq 0$$

- ✓ **Condition initiale :** $U(t=0,x) = g(x)$
- ✓ **Condition aux limites au point** : $x=0 \quad \rightarrow \quad (a_1.\frac{dU(x)}{dx} + b_1 U(x) = c_1)_{t,x=0}$
- ✓ **Condition aux limites au point** : $x = x\max \rightarrow (a_2.\frac{dU(x)}{dx} + b_2 U(x) = c_2)_{t,x=x\max}$

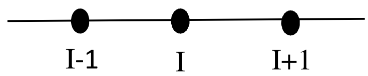
Divisons l'intervalle $[0, x\max]$ en ($Nx-1$) parties égales de longueur $\Delta x = \frac{x_{\max}}{(Nx-1)}$.

Construirons des suites de la forme pour *x*: $x(I) = \Delta x.(I-1)$; et pour le temps : $t(k) = \Delta t.(k-1)$

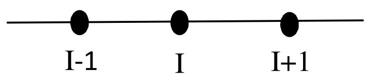
- ➢ On choisit un élément arbitraire à trois nœud sur le domaine $[0, x\max]$, pour définir la première et deuxième dérive. On basant sur les sérier Taylor :



Variable Connue au temps $t \rightarrow$ Schéma explicite



Variable inconnue au temps $t+\Delta t \rightarrow$ Schéma Implicite



La premier dérive / t :	La deuxième dérive schéma explicite /x:
$\left(\frac{dU}{dt}\right)_I^t = \frac{U_I^{t+\Delta t} - U_I^t}{\Delta t}$	$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_I^t = \frac{U_{I-1}^t - 2.U_I^t + U_{I+1}^t}{\Delta x^2}$

Les conditions aux limites :

La premier dérive / x au pour x=0 et I=1 $\rightarrow \left(\frac{dU}{dx}\right)_{I=1}^{t+\Delta t} = \frac{U_2^{t+\Delta t} - U_1^{t+\Delta t}}{\Delta x}$

La premier dérive / x au pour x=xmax et I=Nx $\rightarrow \left(\frac{dU}{dx}\right)_{I=Nx}^{t+\Delta t} = \frac{U_{Nx}^{t+\Delta t} - U_{Nx-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}$

- ➢ **En remplaçant dans le problème étudié on trouve :**

$$\begin{cases} (a_1.\frac{U_2^{t+\Delta t} - U_1^{t+\Delta t}}{dx} + b_1 U_1^{t+\Delta t} = c_1)_{t,x=0} & Pour\ I=1 \\ \frac{U_I^{t+\Delta t} - U_I^t}{\Delta t} = D.\frac{U_{I-1}^t - 2.U_I^t + U_{I+1}^t}{\Delta x^2} & Pour\ I = 2 \rightarrow Nx-1 \\ (a_2.\frac{U_{Nx}^{t+\Delta t} - U_{Nx-1}^{t+\Delta t}}{dx} + b_2.U_{Nx}^{t+\Delta t} = c_2)_{t,x=x\max} & Pour\ I = Nx \end{cases} \rightarrow$$

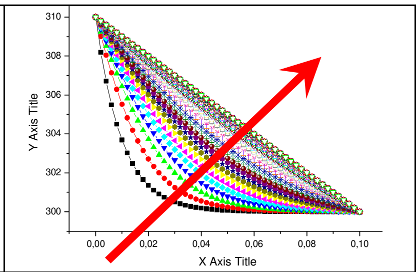
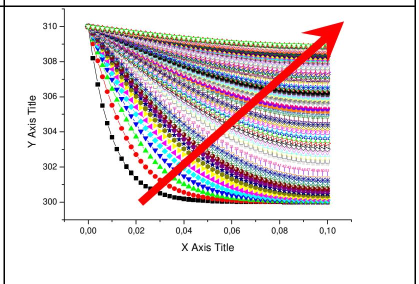
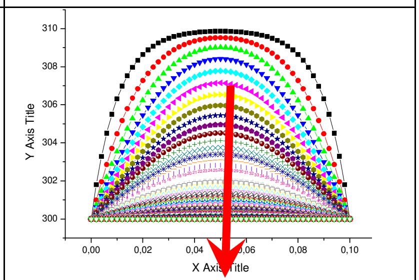
$$Pour\ K = 1 \rightarrow Nt-1$$
$$\begin{cases} Pour\ I = 2 \rightarrow Nx-1 \\ U_I^{t+\Delta t} = \frac{D.\Delta t}{\Delta x^2}.\left(U_{I-1}^t - 2.U_I^t + U_{I+1}^t\right) + U_I^t \\ Fin \\ U_1^{t+\Delta t} = \left(c1 - \left(\frac{a_1}{\Delta x}\right) U_2^{t+\Delta t}\right) / \left(-\frac{a_1}{\Delta x} + b1\right) \\ U_{Nx}^{t+\Delta t} = \left(c_2 + \left(\frac{a_2}{\Delta x}\right) U_{Nx-1}^{t+\Delta t}\right) / \left(\frac{a_2}{\Delta x} + b_2\right) \end{cases}$$
$$Fin$$

Remarque

- On note $R = \frac{D.\Delta t}{\Delta x^2}$, pour la stabilité de schéma explicite R doit être inferieur 0.5

- Dans le schéma explicite on ne trouve pas la résolution du système d'équation
  $U_I^t \rightarrow U(I)$ et $U_I^{t+\Delta t} \rightarrow U1(I)$

```
clc  ; clear all
nt=3000 ;   nx=51 ; xmax=1 ;  dx=xmax/(nx-1) ;
r=0.45  ;  d=1.e-1   ;   dt= r*dx^2/d ;
x(1:nx)=0:dx:xmax   ;
a1=0 ;b1=1  ;c1=310 ; % condition au limite x=0
a2=0 ;b2=1  ;c2=300 ; % condition au limite x=xmax
t=0 ; u(1:nx)=300 ;   %  condition initiale  t=0
%===================================================
figure ; hold on
% calcul par Schéma  schéma explicite
for k=1:nt-1 % boucle de temps
        for i=2:nx-1
        u1(i)= r*(u(i-1)-2* u(i)+ u(i+1) )+ u(i);
        end
        u1(1) =(c1-a1*u1(2)/dx ) /(b1-a1/dx);
        u1(nx)=(c2+a2*u1(nx-1)/dx ) /(b2+a2/dx);
        u=u1 ;        t=t+dt ;
  if(mod(k,100)==0) plot(x,u,'-*') ; end ;
end % fin boucle de temps
```

Condition initiale : U(t=0,x)=300 $\rightarrow$ U(1,1:nx)=300 Condition aux limites : u(t,x=0)=310 $\rightarrow$ a1=0 ;b1=1 ;c1=310 Condition aux limites : u(t,x=1)=300 $\rightarrow$ a2=0 ;b2=1 ;c2=300	
Condition initiale : U(t=0,x)=300 $\rightarrow$ U(1,1:nx)=300 Condition aux limites : u(t,x=0)=310 $\rightarrow$ a1=0 ;b1=1 ;c1=310 Condition aux limites : t,x=1 $\rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial x}=0\right) \rightarrow$ a2=1 ;b2=0 ;c2=0	
Condition initiale : U(t=0,x)=310 $\rightarrow$ U(1,1:nx)=310 Condition aux limites : u(t,x=0)=300 $\rightarrow$ a1=0 ;b1=1 ;c1=300 Condition aux limites : u(t,x=1)=300 $\rightarrow$ a2=0 ;b2=1 ;c2=300	
Condition initiale : U(t=0,x)=310 $\rightarrow$ U(1,1:nx)=310 Condition aux limites : t,x=0 $\rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial x}=-100\right) \rightarrow$ a1=1 ;b1=0 ;c1=-100 Condition aux limites : t,x=1 $\rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial x}=0\right) \rightarrow$ a2=1 ;b2=0 ;c2=0