TP 5 Série de Fourier et résoudre EDP (équation la chaleur)

Soit f(x) une fonction périodique défini sur une période $x \in [-L, L]$ (la période égale (2.L))

On peut exprimer f(x) sous forme série trigonométrique (Série Fourier) comme suit :

$$f(x) = S(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n.\cos(n.\frac{\pi}{L}.x) + B_n.\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)\right] \quad ; \text{ tel que la période =2.L}$$

$$A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).dx \quad ; \quad A_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).\cos(n.\frac{\pi}{L}.x).dx \quad ; \quad B_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x).\sin(n.\frac{\pi}{L}.x).dx$$

<u>Remarque :</u> Soit G(x) fonction : G(x) est paire : $G(-x) = G(x) \Rightarrow \int_{-L}^{L} G(x).dx = 2.\int_{0}^{L} G(x).dx$

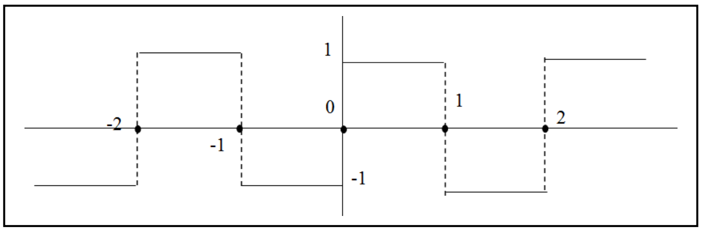
G(x) est impaire : $G(-x) = -G(x) \Rightarrow \int_{-L}^{L} G(x).dx = 0$

- $\cos(n.\frac{\pi}{L}.x)$ est paire et $\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)$ est impaire
- fonction périodique: F(x)=F(x+2L)
- dans le points de discontinuité x=c la série de Fourier est calculer par : $S(C) = \frac{F(C^-) + F(C^+)}{2}$

Exemple 1:

- tracer dans trois période la fonction f(x) ?
- développer en séries de Fourier :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0] \\ +1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$



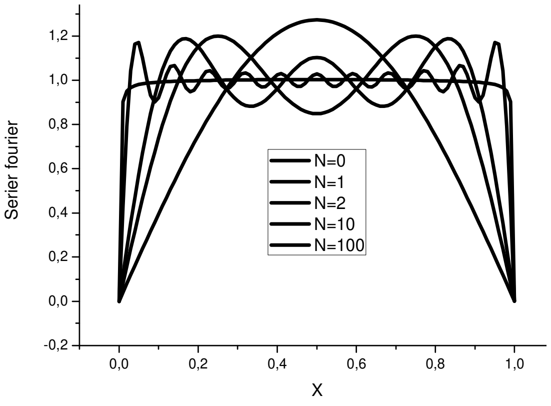
F(x) : c'une fonction périodique de période (2.L=2) donc L=1 . la fonction f(x) est impaire Donc

$$A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x) = \frac{1}{1}.\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{impaire} = 0 \quad \text{et} \quad A_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\cos(n.\frac{\pi}{L}.x)}_{impaire}.dx = 0$$

$$B_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)}_{paire}.dx = \frac{2}{1}.\int_{0}^{1} 1.\sin(n.\pi.x).dx \Rightarrow B_n = \frac{-2}{n.\pi}\cos(n.\pi.x)\Big|_0^1 = \frac{-2}{n.\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\Rightarrow B_n = \begin{cases} 0 & \rightarrow \quad n = 2.i \\ \dfrac{4}{\Pi(2*i+1)} & \rightarrow \quad n = 2.i+1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}.\sum_{K=0}^{N\inf}\left[\frac{1}{2.i+1}.\sin((2.i+1).\pi.x)\right]$$




```
clc
clear all
ninf=[0,1,2,3,100]
x=0:0.01:1  ;
hold on
for j=1:length(ninf)
    s(1:length(x))=0 ;
   for  i=0:ninf(j)
   s(:)=s(:)+4*sin((2*i+1)*pi*x(:))/ ...
              (pi*(2*i+1));
   end
plot(x,s,'-*');
end
```

Exemple 2: $F(x) = x \quad ; \quad x \in [-\pi, \pi]$

$f(x) = S(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left[A_n.\cos(n.\frac{\pi}{L}.x) + B_n.\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)\right]$ F(x) : c'une fonction périodique de période ($2.L = 2.\pi$)

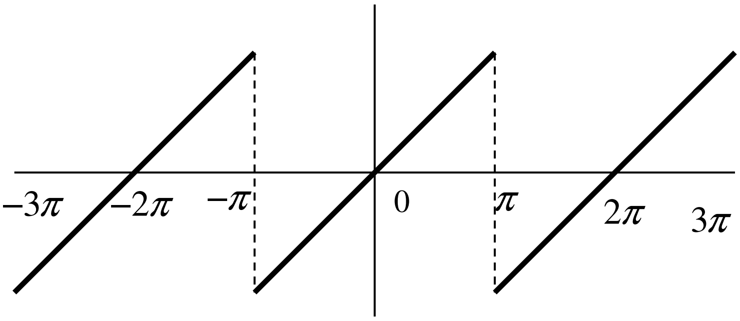
la fonction f(x) est impaire Donc: $A_0 = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} f(x) = \frac{1}{1}.\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{impaire} = 0$ $A_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\cos(n.\frac{\pi}{L}.x)}_{impaire}.dx = 0$

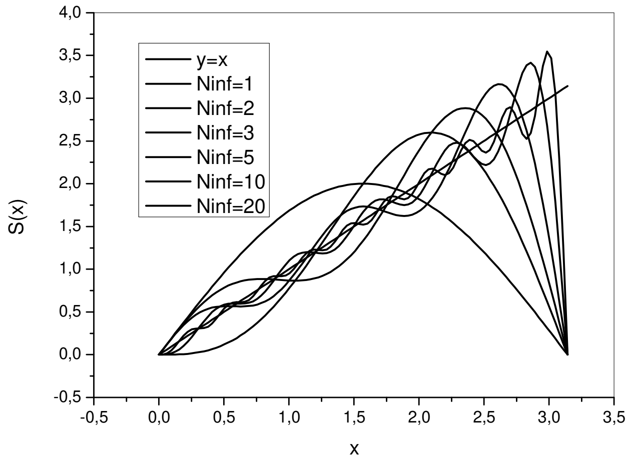
$$B_n = \frac{1}{L}.\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x).\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)}_{paire}.dx = \frac{2}{\pi}.\int_0^{\pi} x.\sin(n.x).dx$$

(intégrale par partie)

$$B_n = \frac{2}{\pi}.\int_0^{\pi} x.\sin(n.x).dx = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

$$x = \sum_1^{\infty} B_K.\sin(n.\frac{\pi}{L}.x) = -2.\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}.\sin(n.x)$$






```
clc
clear all
ninf=[0,1,2,3,10,100]
x=0:0.01:pi  ;
hold on
for j=1:length(ninf)
     s(1:length(x))=0 ;
   for  i=1:ninf(j)
   s(:)=s(:)-2*sin(i*x(:))*(-1)^i/i ;
   end
plot(x,s);
end
```

==

Résoudre L'équation La Chaleur Par La Méthode Séparation Des Variables

$\frac{\partial U}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ La solution sous : $U(t,x) = \theta(t).F(x) + C(x)$ *********(I)

Tel que C(x) vérifier équation de chaleur c'est-à-dire $\frac{\partial C(x)}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dC(x)}{dx} = K_7 \Leftrightarrow C(x) = K_7.x + K_8$

On remplace dans (I): $\overset{*}{\theta}(t).F(x) = D.\theta(t).\overset{**}{F}(x) \Leftrightarrow \frac{\overset{*}{\theta}(t)}{\theta(t)} = D.\frac{\overset{**}{F}(x)}{F(x)} = Cst$

$$\begin{cases} \frac{\overset{*}{\theta}(t)}{\theta(t)} = Cst \quad et \quad D.\frac{\overset{**}{F}(x)}{F(x)} = Cst \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = C^{st}.\theta(t) \text{***** (1)} \end{cases} \quad \text{et} \quad D.\frac{d^2F}{dx^2} - C^{st}.F(x) = 0 \text{ ***(2)}$$

On intègre l'équation (1) $\int \frac{d\theta}{\theta(t)} = \int C^{st}.dt + C1 \Leftrightarrow Ln(\theta(t)) = C^{st}.t + C1 \Leftrightarrow \theta(t) = K1.\exp(C^{st}.t)$

Pour une solution physique : $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0$ Donc $C^{st} \le 0 \Rightarrow C^{st} = -\lambda^2$ Donc $\theta(t) = K1.\exp(-\lambda^2.t)$

L'équation (2) : $D.\frac{d^2F}{dx^2} + \lambda^2.F(x) = 0$ (L'équation caractéristique)

$$D.r^2 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -\frac{\lambda^2}{D} = I^2\frac{\lambda^2}{D} \Leftrightarrow r_{1,2} = 0 \pm \frac{\lambda}{\sqrt{D}}.I \Leftrightarrow r_{1,2} = \alpha \pm \beta.I \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x) = e^{\alpha x}.\cos(\beta.x) \\ F_2(x) = e^{\alpha x}.\sin(\beta.x) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow F_1(x) = \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)$ et $F_2(x) = \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)$ La combinaison linéaire entre les deux solutions :

$F(x) = K_2.F_1 + K_3.F_2 = K_2.\cos(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x) + K_3.\sin(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x)$ La solution de l'équation **chaleur** est

$$U(t,x) = \theta(t).F(x) + C(x) \Leftrightarrow U(t,x) = \exp(-\lambda^2.t).\left[K4.\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right) + K5.\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)\right] + K_7.x + K_8$$

on pose $K1.K2 = K4$; $K1.K3 = K5$ Pour déterminer les constant $K4$; $K5$; λ; K_7; K_8 On utilise les conditions aux limites et initiale

Exemple 1:

$U(t,x=0)=1$	$\dfrac{\partial U(t,x=1)}{\partial x}=0$	$U(t=0,x)=0$

1^{ere} étape :

$U(t,x=0)=1=\exp(-\lambda^2.t).[K4]+K_8 \quad \Leftrightarrow \exp(-\lambda^2.t).[K4]+K_8=1+0.\exp(-\lambda^2.t) \quad \Leftrightarrow K8=1$ et $K4=0$

$$C(t,x)=K_5.\exp(-\lambda^2.t).\left[\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)\right]+K_7.x+1$$

2^{eme} étape : $\dfrac{\partial U(t,x=1)}{\partial x}=0=K_5.\exp(-\lambda^2.t).\dfrac{\lambda}{\sqrt{D}}.\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{D}}\right)+K_7$ Donc $K_7=0$ et $K.\dfrac{\lambda}{\sqrt{D}}\neq 0$

$\cos(\dfrac{\lambda}{\sqrt{D}})=0=\cos(\dfrac{\pi}{2}+n.\pi) \Rightarrow \dfrac{\lambda_n}{\sqrt{D}}=\dfrac{\pi}{2}(2.n+1)$ On trouve plusieurs solutions sous forme de sommation :

$$U(t,x)=\sum_0^n K_n.\exp(-\lambda_n{}^2.t).\left[\sin(\frac{\lambda_n}{\sqrt{D}}.x)\right]+1$$

3^{eme} étape : $U(t=0,x)=0=\sum_0^n K_n.\left[\sin(\dfrac{\pi(2.n+1)}{2}.x)\right]+1 \quad \Leftrightarrow \sum_0^n K_n.\left[\sin(\dfrac{\pi(2.n+1)}{2}.x)\right]=-1$

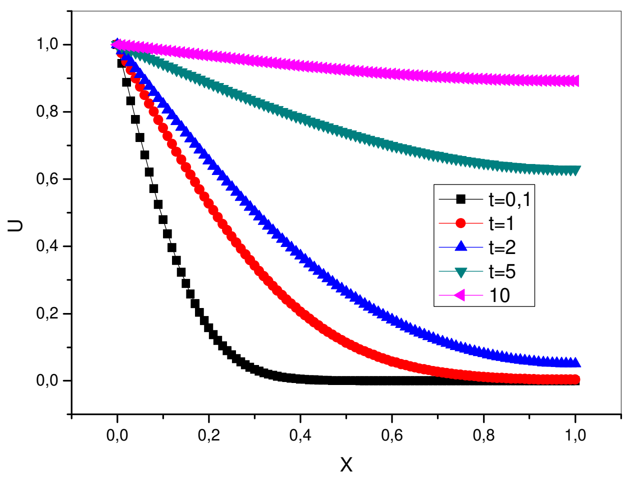
On détermine K_n par **les Série Fourier** . On pose $g(x)=-1$ fonction périodique est impaire

Et défini sur demi période $L=2$

Donc : $$g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_1^n\left[A_n.\cos((2.n+1).\frac{\pi}{L}.x)+B_n.\sin((2.n+1).\frac{\pi}{L}.x)\right]$$

$A_0=0$; $A_n=0$; $B_n=\dfrac{1}{2}.\int_{-2}^{2}g(x).\sin(\dfrac{\pi(2.n+1)}{2}.x).dx=\dfrac{2}{2}.\int_0^2-1.\sin(\dfrac{\pi(2.n+1)}{2}.x).dx=\dfrac{-4}{\pi(2.n+1)}=K_n$

$$U(t,x)=\sum_0^n\frac{-4.\exp(-(\lambda_i)^2.t)}{\pi(2.i+1)}.\left[\sin(\frac{\lambda_i}{\sqrt{D}}.x)\right]+1 \;;\Rightarrow \frac{\lambda_i}{\sqrt{D}}=\frac{\pi}{2}(2.i+1)$$




```
clc
clear all
d=0.1 ; ninf=1000;
t=[0.1,0.5,1,5,10];    x=0:0.01:1   ;
hold on
for j=1:length(t)
      s(1:length(x))=0 ;
      for  i=0:ninf
    lamd=0.5*pi*(2*i+1)*sqrt(d);
s(:)=s(:)+exp(-lamd^2*t(j))* ...
   sin(lamd*x(:)/sqrt(d))/(2*i+1);
    end
    u=-4*s/pi+1;     plot(x,u,'-*');
end
```

Exemple 2 :

$U(t,x=0)=1$	$U(t,x=1)=0$	$U(t=0,x)=0$

$$U(t,x)=\exp(-\lambda^2.t).\left[K4.\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)+K5.\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)\right]+K_7.x+K_8$$

1^{ere} étape : $U(t,x=0)=1 \Leftrightarrow \exp(-\lambda^2.t).[K4]+K_7=0.\exp(-\lambda^2.t)+1 \Rightarrow K4=0$ et $K8=1$

$$U(t,x)=K_5.\exp(-\lambda^2.t).\left[\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)\right]+1+K_7.x$$

2eme étape :

$$U(t,x=1)=0=K_5.e^{-\lambda^2.t}.\left[\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}\right)\right]+1+K_7=0.e^{-\lambda^2.t}+0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}\right)=0=\sin(n.\pi) \Leftrightarrow \frac{\lambda_n}{\sqrt{D}}=n.\pi \quad \text{et}$$

$1+K_7=0 \Rightarrow K_7=-1$ Donc $U(t,x)=\sum_1^{\infty}\left(K_n.\exp(-\lambda_n{}^2.t).\sin(n.\pi.x)\right)+1-x$

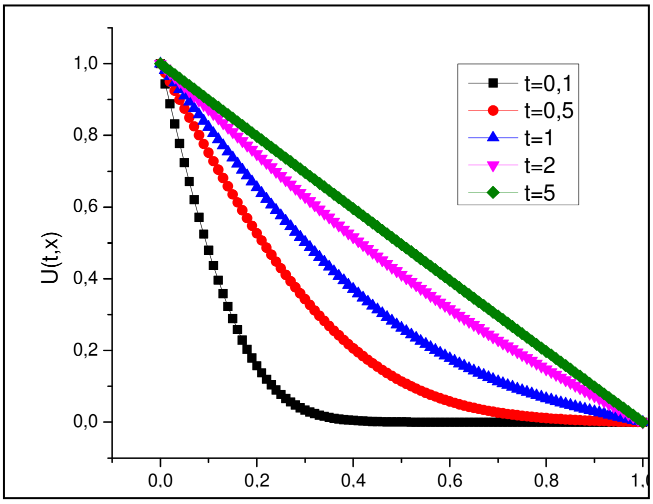
3eme étape : $U(t=0,x)=0 \Leftrightarrow \sum_1^{\infty}\left(K_n.\sin(n.\pi.x)\right)+1-x=0 \quad \Leftrightarrow \sum_1^{\infty}\left(K_n.\sin(n.\pi.x)\right)=x-1$

On détermine K_n par **les Série Fourier** On pose $g(x)=x-1$ fonction périodique est impaire Et défini sur demi période $L=1$ Donc :

$$g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_1^{n}\left[A_n.\cos(n.\frac{\pi}{L}.x)+B_n.\sin(n.\frac{\pi}{L}.x)\right]$$

$$A_0=0\ ;\quad A_n=0\ ;\ B_n=\frac{1}{1}.\int_{-1}^{1}g(x).\sin(n.\pi.x).dx=\frac{2}{1}.\int_0^1(x-1).\sin(n.\pi.x).dx=\frac{2}{n.\pi}=K_n$$

$$U(t,x)=\sum_0^{\infty}\left(\frac{2}{i.\pi}\exp(-(\lambda_i)^2.t).\sin(\frac{\lambda_i}{\sqrt{D}}.x)\right)+1-x \qquad ; \qquad \frac{\lambda_i}{\sqrt{D}}=i.\pi$$



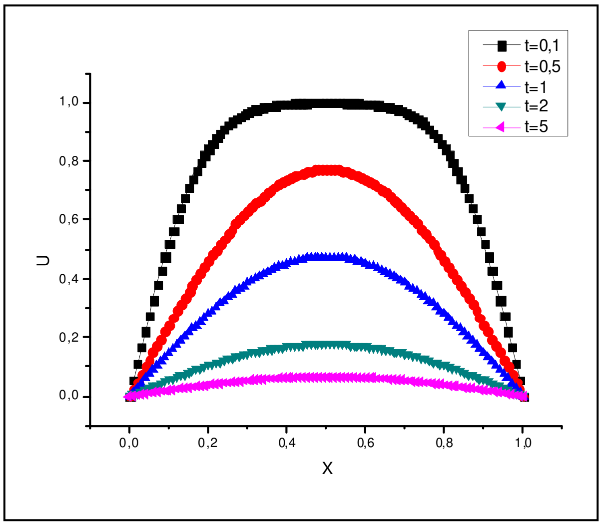

```
clc
clear all
d=0.1 ; ninf=1000;
t=[0.1,0.2,0.5,1,5];    x=0:0.01:1   ;
hold on
for j=1:length(t)
    s(1:length(x))=0 ;
    for  i=1:ninf
    lamd=pi*i*sqrt(d);
s(:)=s(:)+exp(-lamd^2*t(j))* ...
       sin(i*pi*x(:)) / i ;
   end
  u=-(2*s/pi)+1-x ; plot(x,u,'-*');
end
```

Exemple 3 :

$U(t,x=0)=0$	$U(t,x=1)=0$	$U(t=0,x)=1$

$$U(t,x)=\exp(-\lambda^2.t).\left[K4.\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)+K5.\sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{D}}.x\right)\right]+K_7.x+K_8$$

$$U(t,x)=\sum_0^{\infty}\left(\frac{4}{(2.i+1).\pi}\exp(-(\lambda_i)^2.t).\sin(\frac{\lambda_i}{\sqrt{D}}.x)\right) \quad \text{tel que} \quad \lambda_i=(2.i+1).\pi.\sqrt{D}$$




```
clc
clear all
d=0.1 ; ninf=1000;
t=[0.1,0.2,0.5,1,2,3];    x=0:0.01:1   ;
hold on
for j=1:length(t)
    s(1:length(x))=0 ;
    for  i=0:ninf
   lamd=pi*(2*i+1)*sqrt(d)
s(:)=s(:)+exp(-lamd^2*t(j))*  ...
    sin(lamd*x(:)/sqrt(d))/(2*i+1);
   end
  u=(4/pi)*s     ; plot(x,u,'-*');
end
```