Transformation Laplace

Soit f(t) fonction défini sur l'intervalle $[0,\infty[$,

on appelle TL(f(t)) l'intégrale de Laplace ou (transformé de Laplace) $TL(f(t))=\int_0^\infty f(t)*\exp(-P.t).dt$

exemple:

$TL(a)=\frac{a}{P}$	$TL(\exp(a.t))=\frac{1}{P-a}$	$TL(t)=\frac{1}{P^2}$	$TL(t^n)=\frac{n!}{P^{n+1}}$
$TL(t^n.\exp(a.t))=\frac{n!}{(P-a)^{n+1}}$	$TL(e^{a.t}*\cos(b.t))=\frac{P-a}{(P-a)^2+b^2}$	$TL(e^{a.t}*\cos(b.t))=\frac{b}{(P-a)^2+b^2}$	
$TL(\frac{df(t)}{dt})=P.TL(f(t))-f(0)$	$TL(\frac{d^2f(t)}{dt^2})=P^2.TL(f(t))-P.f(0)-\frac{df(0)}{dt}$		
$TL(\frac{d^nf(t)}{dt^n})=P^n.TL(f(t))-P^{n-1}.f(0)-\ P^{n-2}\frac{df(0)}{dt}-...-\frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}$			
$TL\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi.D.t^3}}.\exp\left(\frac{-x^2}{4.D.t}\right)\right)=\exp(-x.\sqrt{\frac{P}{D}})$	$TL\left(erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D.t}}\right)\right)=\exp\left(-x.\sqrt{\frac{P}{D}}\right)/P$		
$TL\left(\sqrt{\frac{D}{\pi.t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4.D.t}\right)\right)=\sqrt{\frac{D}{P}}.\exp\left(-x.\sqrt{\frac{P}{D}}\right)$			

Remarque : $erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_0^z \exp(-u^2).du$ et $erfc(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_z^\infty \exp(-u^2).du=1-erf(z)$

résoudre équation la chaleur par la méthode <u>Transformation Laplace :</u> $\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=D.\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}$

on introduire le TL sur les deux membre : $TL\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}\right)=TL\left(D.\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}\right)$

$P.TL(\varphi(t,x))-\varphi(0,x)=D.\frac{\partial^2 TL(\varphi(t,x))}{\partial x^2}$; On pose $TL(\varphi(t,x))=\Phi(P,x)$

$D.\frac{\partial^2\Phi(P,x)}{\partial x^2}-P.\Phi(P,x)=-\varphi(0,x)$ ******** (I) (Equation deuxième ordre un seul variable x)

On Cherche La Solution Homogène $\Phi_H(P,x)=?\rightarrow D.\frac{\partial^2\Phi_H(P,x)}{\partial x^2}-P.\Phi_H(P,x)=0$

Equation caractéristique : $D.r^2-P=0\Rightarrow r^2=\frac{P}{D}\Rightarrow r_1=-\sqrt{\frac{P}{D}}$ *et* $r_2=+\sqrt{\frac{P}{D}}$

$\Phi_H(S,x)=K1.\exp\left(-\sqrt{\frac{S}{D}}.x\right)+K2.\exp\left(\sqrt{\frac{S}{D}}.x\right)$

On Cherche La solution particulaire $\Phi_P(P,x)=?$

On pose $\varphi(0,x)=C_{in}\Rightarrow\Phi_P(P,x)=C^{st}=A$ On remplace dans l'équation (I) : $\rightarrow 0-P.A=-C_{in}\Rightarrow A=\frac{C_{in}}{P}$

Donc la solution totale : $\Phi_T(P,x)=\Phi_H(P,x)+\Phi_P(P,x)\ =K1.\exp\left(-\sqrt{\frac{P}{D}}.x\right)+K2.\exp\left(\sqrt{\frac{P}{D}}.x\right)+\frac{C_{in}}{P}$

Détermination les constant K1,K2

exemple 1

$$\begin{cases} \varphi(t,x=\infty)=C_{in} \rightarrow \Phi(P,x=L=\infty)=\dfrac{C_{in}}{P} \\ \varphi(t,x=0)=C_0 \Rightarrow \Phi(P,x=0)=\dfrac{C_0}{P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K1.\exp\left(-\sqrt{\dfrac{P}{D}}.L\right)+K2.\exp\left(\sqrt{\dfrac{P}{D}}.L\right)+\dfrac{C_{in}}{P}=\dfrac{C_{in}}{P} \text{******}(1) \\ K1+K2+\dfrac{C_{in}}{P}=\dfrac{\mathrm{C}_0}{\mathrm{P}} \qquad \text{*********}(2) \end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow \quad K1.\exp\left(-\sqrt{\frac{P}{D}}.\infty\right)+K2.\exp\left(\sqrt{\frac{P}{D}}.\infty\right)=0 \;\Rightarrow\; K2.\exp\left(\sqrt{\frac{P}{D}}.\infty\right)=0 \;\Rightarrow\; K2=0$$

$$(2) \;\Rightarrow\; K1+K2+\frac{C_{in}}{P}=\frac{\mathrm{C}_0}{\mathrm{P}} \;\Rightarrow K1=\frac{\mathrm{C}_0-C_{in}}{P}$$

Donc la solution est $\Phi(P,x)=\left(\dfrac{C_0-C_{in}}{P}\right).\exp\left(-\sqrt{\dfrac{P}{D}}.x\right)+\dfrac{C_{in}}{P}$

on applique le transformé inverse

$$\boxed{\varphi(t,x)=TL^{-1}\left(\Phi(P,x)\right)=\left(C_0-C_{in}\right).erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D.t}}\right)+C_{in}}$$