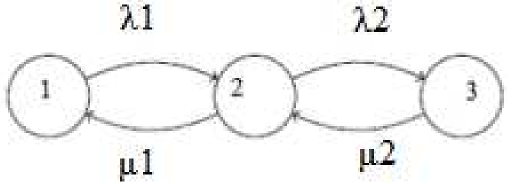
TP 01 : Modélisation de système par Chaîne de Markov

On a un système à deux composants avec 3 états comme suite :



Calcul la disponibilité :

Si on considère (1) et (2) comme des états de marche la disponibilité du système D(t), est la probabilité que le système fonctionne à l'instant t, s'exprime par :

$D(t) = \sum_{i \in \text{état de fonctionnement}} P_i^D(t)$ Dans ce cas : $D(t) = P_1^D(t) + P_2^D(t)$

On a les conditions initiale $P_1^D(0) = 1$, $P_2^D(0) = 0$ et $P_3^D(0) = 0$

Les équations du modèle de chaine de Markov est comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_1.P_1(t) + \mu_1.P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1.P_1(t) - (\lambda_2 + \mu_1).P_2(t) + \mu_2.P_3(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_2.P_2(t) - \mu_2.P_3(t) \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \end{cases} \rightarrow$$

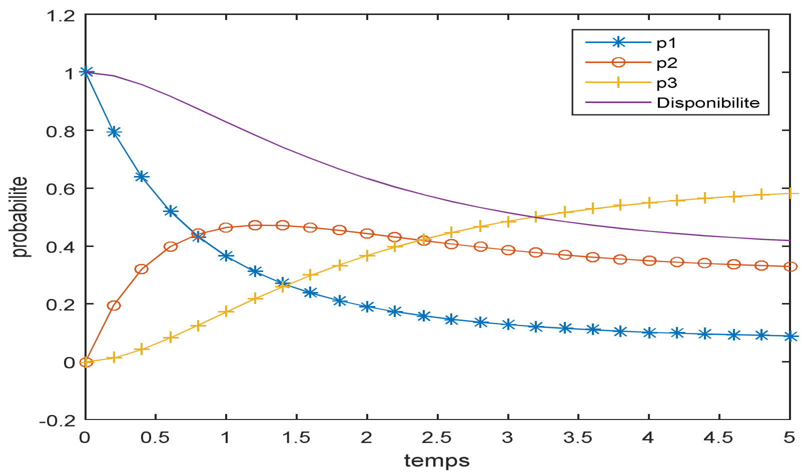
Le problème doit simplifies comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\lambda_1.P_1 + \mu_1.P_2 \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1.P_1 - (\lambda_2 + \mu_1).P_2 + \mu_2.(1 - P_1 - P_2) \end{cases}$$

```
clc ; clear all
lamd1=1.2 ; lamd2=0.6 ; mu1=0.3 ; mu2=0.3 ;
%======resoudre le system d'equation =====================
syms p1(t) p2(t)  p3(t)
sol = dsolve(diff(p1) == -lamd1*p1 +  mu1*p2                          ,...
          diff(p2) ==  lamd1*p1 -(lamd2+ mu1)*p2+mu2*(1-p1-p2) , ...
          p1(0)==1 , p2(0)==0) ;
%======== calcule sous forme des formule
p1=vpa(simplify(sol.p1),3)
p2=vpa(simplify(sol.p2),3)
p3=vpa(1-p1-p2 ,3)
D=vpa(p1+p2,3) %  la disponibilité
%======== calcul numerique (substitution Symbolic)
t=[0:0.2:5] ;
p=vpa(subs([p1 ; p2 ; p3]),3)  ;
Dc=vpa(subs(D),3) ;
%============  affichage des courbes
plot(t,p(1,:),'-*',t,p(2,:),'-o', t,p(3,:),'-+',t,Dc)
xlabel('temps') ; ylabel('probabilite') ;   egend('p1','p2','p3','D');
```

Résultat de Matlab

```
p1 =0.55*exp(-1.72*t) + 0.373*exp(-0.68*t) + 0.0769
p2 =0.646*exp(-0.68*t) - 0.953*exp(-1.72*t) + 0.308
p3 =0.403*exp(-1.72*t) - 1.02*exp(-0.68*t) + 0.615
D  =1.02*exp(-0.68*t) - 0.403*exp(-1.72*t) + 0.385
```



==

Calcul de la fiabilité

Pour calculer la fiabilité d'un système représente sous forme d'une chaîne de Markov, il faut modifier la chaîne de façon à éliminer toutes les transitions de réparation d'un état de panne vers un état de fonctionnement. Les états de panne deviennent alors absorbants. Ainsi la nouvelle chaîne de Markov associée à un système en redondance active à 2 composants devient

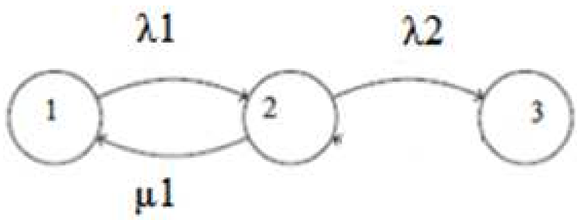


Figure : Chaine de Markov à deux composants pour calculer la fiabilité

La fiabilité du système est : $R(t)=\sum_{i\in état\, de\, fonctionnement} P_i^R(t)$ Dans ce cas : $R(t)=P_1^R(t)+P_2^R(t)$

On a les conditions initiale $P_1^R(0)=1$, $P_2^R(0)=0$ et $P_3^R(0)=0$ On donne : $\lambda_1=1.2$ $\lambda_2=0.6$ $\mu_1=0.3$

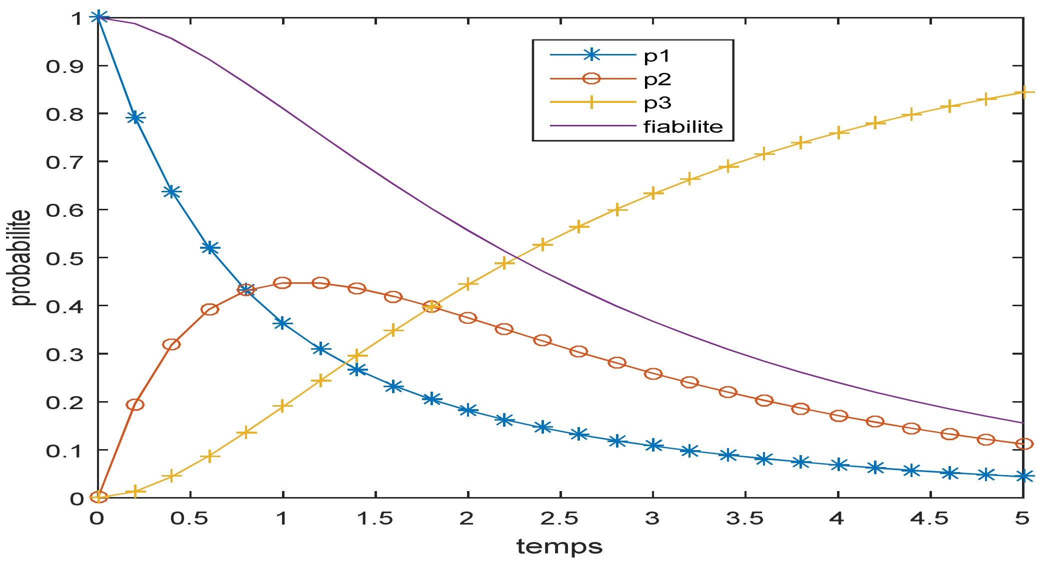
Les équations du modèle de chaine de Markov est comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_1.P_1(t)+\mu_1.P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt}=\lambda_1.P_1(t)-(\lambda_2+\mu_1).P_2(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt}= \qquad\qquad \lambda_2.P_2(t) \\ P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt}=-\lambda_1.P_1(t)+\mu_1.P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt}=\lambda_1.P_1(t)-(\lambda_2+\mu_1).P_2(t) \end{cases}$$

En utilisant le même programme Matlab , on fait un changement $\mu_2=0$, et on remplace le variable D par un autre variable R

Résultat de Matlab

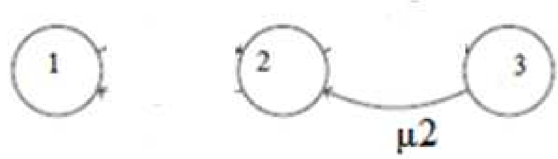
```
p1 =0.379*exp(-0.432*t) + 0.621*exp(-1.67*t)
p2 =0.97*exp(-1.67*t)*(exp(1.24*t) - 1.0)
p3 =1.0 - 0.621*exp(-1.67*t) - 0.97*exp(-1.67*t)*(exp(1.24*t) - 1.0)
 - 0.379*exp(-0.432*t)
R =0.379*exp(-0.432*t) + 0.621*exp(-1.67*t) +
    0.97*exp(-1.67*t)*(exp(1.24*t) - 1.0)
```



===

La maintenabilité

Probabilité que le système soit réparé dans l'intervalle [0,t] sachant qu'il était en panne à l'instant 0, se calcule en rendant absorbant les états de marche (1) et (2) :



$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \mu_2.P_3(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -\mu_2.P_3(t) \\ P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \mu_2.P_3(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -\mu_2.P_3(t) \end{cases}$$

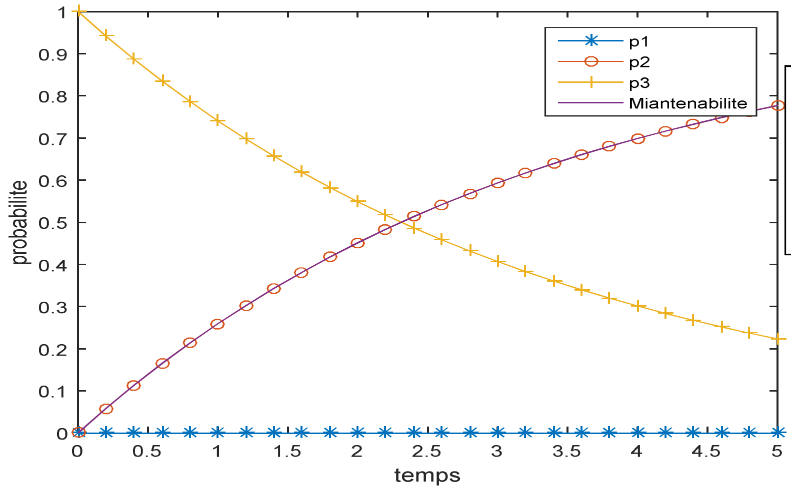
On a les conditions initiale $P_1^M(0) = 0$, $P_2^M(0) = 0$ et $P_3^M(0) = 1$, et On donne : $\mu_2 = 0.3$

La Maintenbilité du système est : $M(t) = \sum_{i \in \text{état de fonctionnement}} P_i^M(t)$

Dans ce cas : $M(t) = P_1^M(t) + P_2^M(t)$

```
clc ; clear all
lamd1=1.2 ; lamd2=0.6 ; mu1=0.3 ; mu2=0.3;
%======resoudre le system d'equation ======================
syms p1(t) p2(t)  p3(t)
sol = dsolve(diff(p2) == mu2*p3 ,diff(p3) == - mu2*p3 , ...
           p2(0)==0  , p3(0)==1) ;
%======== calcule sous forme des formule
p2=vpa(simplify(sol.p2),3)
p3=vpa(simplify(sol.p3),3)
p1=vpa(1-p2-p3 ,3)
M=vpa(p1+p2,3) %  la Miantebilité
%======== calcul numerique (substitution Symbolic)
t=[0:0.2:5] ; p=vpa(subs([p1 ; p2 ; p3]),3); Mc=vpa(subs(M),3) ;
%=============  trace des courbe
plot(t,p(1,:),'-*',t,p(2,:),'-o', t,p(3,:),'-+',t,Mc)
xlabel('temps') ; ylabel('probabilite') ;
legend('p1','p2','p3','Miantenabilite');
```

Résultat de Matlab




```
p2 =1.0-1.0*exp(-0.3*t)
p3 =exp(-0.3*t)
p1 = 0.0
M =1.0 - 1.0*exp(-0.3*t)
```

==

TP 2 : optimisation

Ecrire un programme Matlab qui fait l'optimisation d'un problème de maximisation, En utilisant la command **fmincon()**

$$\max(z) = 4.x_1 + 5.x_2$$
$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 \leq 8 \\ 1.x_1 + 2.x_2 \leq 7 \\ 0.x_1 + 1.x_2 \leq 4 \end{cases}$$
$$Telque: \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$\rightarrow$

```
clc ; clear all
z =@(x) -(4*x(1) +5*x(2) ) ;
A = [2   1 ;      1  2;       0  1 ];
b = [  8 ;       7 ;          3 ];
x0 = [0 ; 0 ];
[x,zmax] = fmincon(z,x0,A,b)
```

```
x =     3    2
zmax =  -22.0000
```