Semestre : 6

Unité d’enseignement : UEF 3.2.2

Codage et Théorie de l’information

Dr Mahmoud Hadef

Objectif de la Matière

L’étudiant va devoir apprendre à partir de ce module les fondements de base pour

- ✓ Mesure quantitative de l’information
- ✓ Sources et codage de sources
- ✓ Canal et codage de canal

Contenu de la Matière

Partie 1 : Introduction a la théorie de l’information :

Entropie et notion de quantité d’information, mesure de l’information, information mutuelle.

Partie 2 : Canal de transmission :

Définition d’un canal de transmission, la capacité du canal, exemples de calcul de capacité.

Partie 3: Codage de source :

Codage de Shannon-Fanno et algorithmes de Huffman.

Contenu de la Matière (2)

Partie 4: Codes correcteurs d’erreurs :

Décodage hard et soft, notion d’une distance minimale d’un code, Décodage complet et incomplet, Exemple code de Hamming.

Partie 5 : Codage canal :

Principes, théorème de codage de canal de Shannon, Codage en bloc et codage convolutif

Horaires et Evaluation

- **Cours Jeudi: 08:00 – 09:30**
- **TD Jeudi: 12:30 – 14:00**
- **Crédit: 4**
- **Coefficient: 2**
- **Mode d'Evaluation**:

60% Examen + 40% Contrôle continu

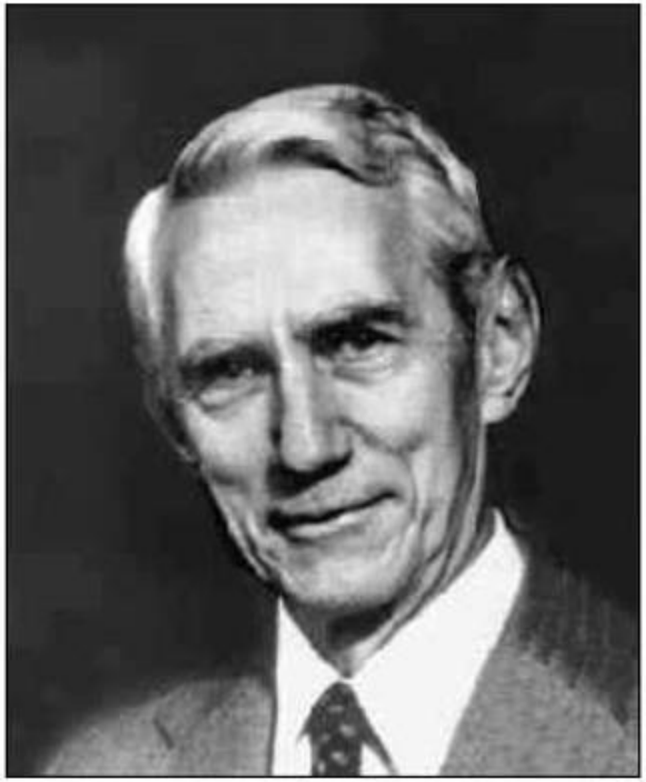
Références

- F. Bavaud , J.-C. Chappelier , J. Kohlas ; Introduction à la Théorie de l'Information et ses applications ; Université de Fribourg.
- O. Rioul ; Théorie de l’information et du codage ; Lavoisier, 2007.
- Y. Mori ; Théorie de l'information et du codage : signal analogique, signal numérique et applications en télécommunications ; Hermès Science, 2006.
- T. M. Cover and J. A. Thomas; Elements of information theory, 2nd edition, Wiley Series in telecommunications and signal Processing, 2006.

Théorie de l'information

Partie 1: Introduction
a la théorie de l'information

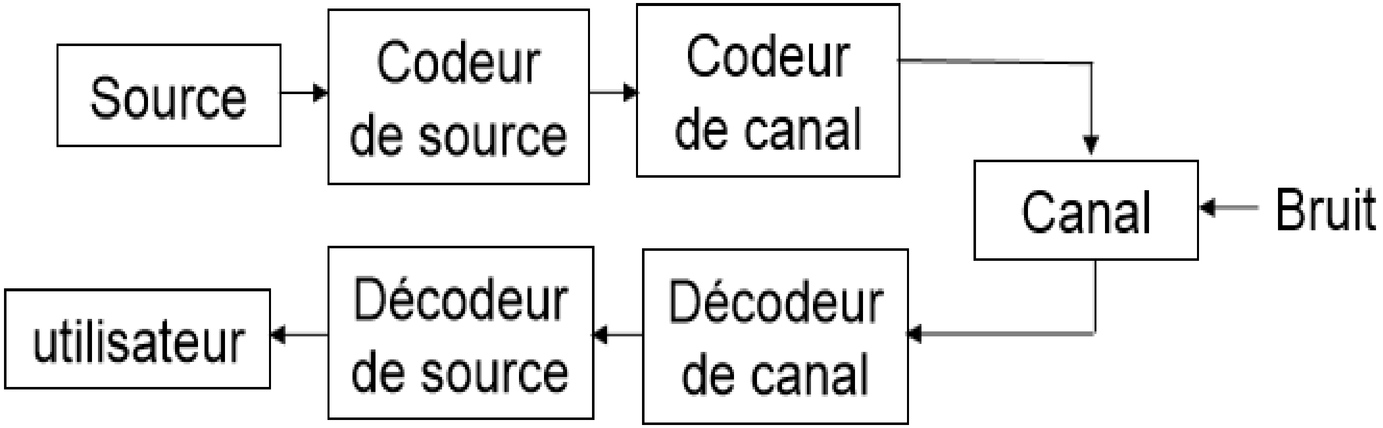
- **Entropie et Information**
- mesure de l'information
- information mutuelle



Claude Elwood SHANNON
30 Avril 1916 / 24 Février 2001

Théorie de l'information

Objectif → maximiser la **quantité** et la **qualité** de l information transmise depuis une source jusqu'à un utilisateur



Solution → Inclusions des **codeurs** de source et codeurs de canaux

Entropie et Information

- Pourquoi il est important de mesurer le degré d'**incertitude** dans une situation de choix ?

- En quoi l'**entropie** est une bonne unité de mesure de l'incertitude?

- En quoi l'**information** et l'incertitude sont liées et, par conséquent, pourquoi l'entropie a un rôle important dans la mesure de l'information?

Entropie et Information

Comment décrire formellement une situation de choix?

Situation de choix → Ensemble de possibilités

$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ → un schéma de choix

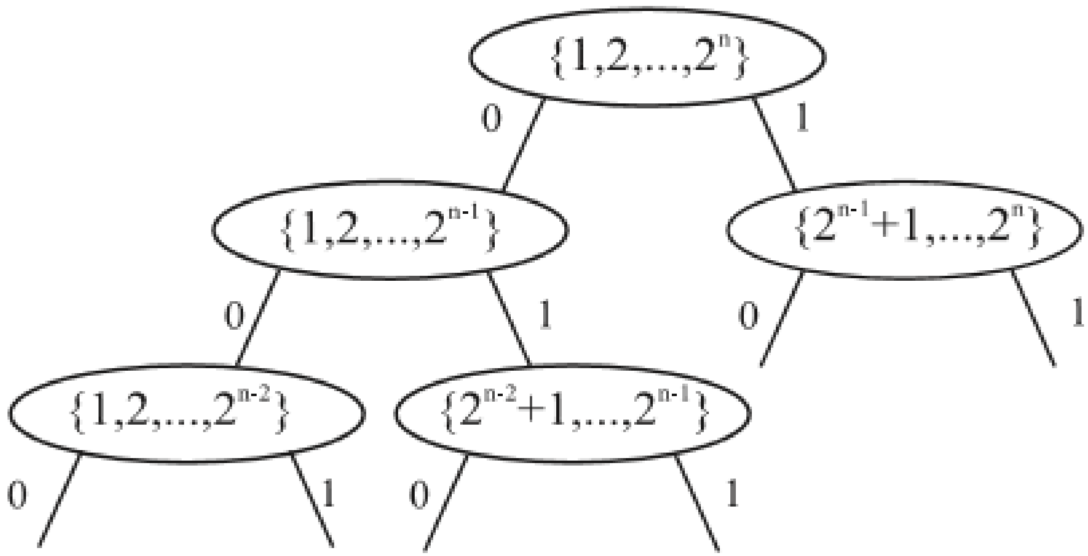
Cardinalité $|S|$ de S → le nombre d'éléments de S

Comprendre comment un jeu de questions-réponses mène à une mesure de la quantité d'incertitude dans une situation de choix

Questions simples→ si le nombre est 1, si non, si c'est 2, etc → besoin des m questions pour découvrir mon choix → pourqoi pas une mesure de l'incertitude? → n'est pas une méthode optimale !!!

Entropie et Information

Mais si vous demandez si le nombre est inférieur à m/2 → ma réponse vous permettra de limiter la suite de votre investigation à la moitié des possibilités



L'arbre des questions-réponses pour la recherche binaire d'un choix inconnu parmi les éléments $m=2^n$

Entropie et Information

La quantité d'incertitude d'un schéma de choix C'est:

$$h(|S|) = \log_2|S|$$

On peut généraliser:

$$h(|S|) = \log_k|S|$$

Mais l'unité de mesure est différente:

- $\log_2$ → bit ou Shannon (Sh)
- $\log_e$ → nat et pour
- $\log_{10}$ → dit ou hartley

Exemple: Dans un échiquier vide, il existe exactement m = 64 = 2^6 possibilités de placer une pièce dessus. Calculer la quantité d'incertitude du placement d'une pièce sur un échiquier

Entropie et Information

Propriétés de l'incertitude h(|S|)

- S1 et S2 sont deux systèmes de choix avec |S1| = |S2|, alors h(|S1|) = h(|S2|) → Seul le nombre de possibilités importe dans un système de choix, et non leur nature.
- S1 et S2 sont deux systèmes de choix avec |S1| < |S2|, alors h(|S1|) < h(|S2|) → l'incertitude augmente avec le nombre de possibilités d'un choix
- Si S est un système de choix avec seulement deux possibilités, alors, avec la base 2 pour le logarithme, h(|S|) = log2 2 = 1 → Cette unité de mesure est appelée un bit (binary information unit).

Entropie et Information

Additivité de l'incertitude

L'incertitude du système de choix indépendants est la somme de l'incertitude des deux systèmes simples.

$$h(|S1 \times S2|) = h(|S1|) + h(|S2|)$$

Exemple: Lançons un dé m fois et considérons que les lancers sont indépendants. Calculer la quantité de l'incertitude de cette opération

Entropie et Information

Choix avec probabilité connue

Dans certaines situations, les probabilités des différentes possibilités qui pourraient se produire sont connues

$$\mathbf{S = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \text{ et } P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}}$$

Avec

$0 \leq p_i \leq 1$ pour i=1,2, ..m et $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

La paire (S,P) est appelée un système de choix probabiliste

Entropie

Définition

La quantité d'incertitude dans un système de choix probabiliste (S,P) est donnée par

$$H(P) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \, log_2(p_i)$$

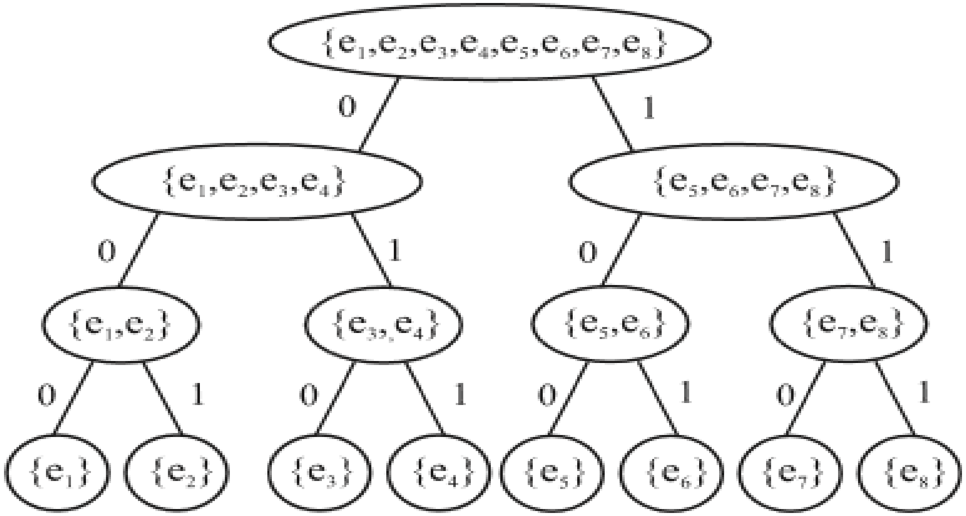
C'est l'entropie !!

Entropie

Exemple

un système de choix probabiliste (S,P) définie par S = $\{e_1,e_2,\ldots,e_8\}$ et

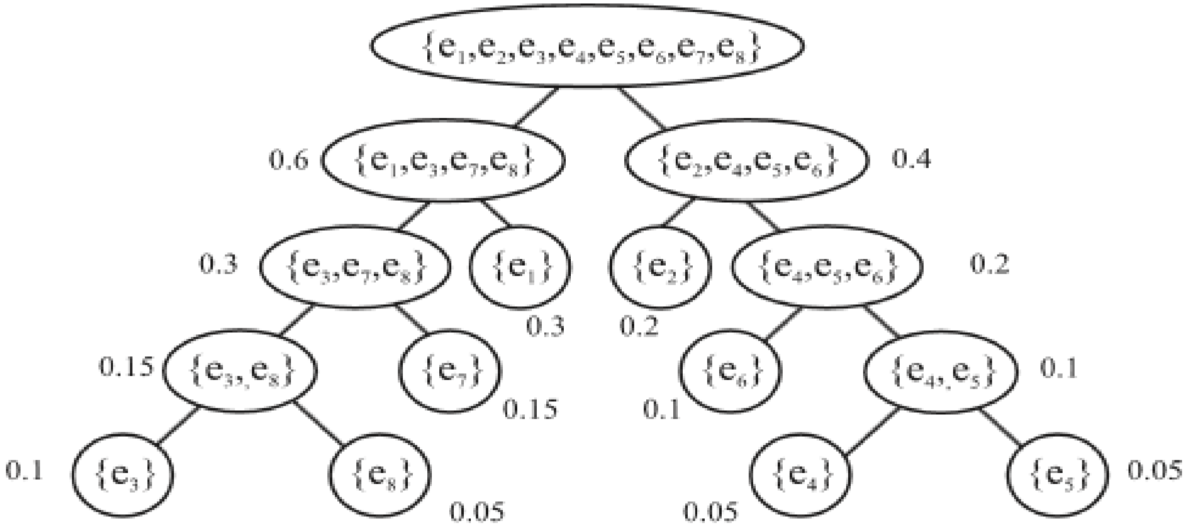
P = {0.3,0.2,0.1,0.05,0.05,0.1,0.15,0.05}.



Arbre 1

Entropie

Exemple



Arbre 2

- Calculer les longueurs moyennes des mots pour les deux arbres 1 et 2
- Calculer l' entropie du system

Entropie

Propriété 1

L'entropie de la distribution de probabilité uniforme égale la mesure de l'incertitude du système correspondant de choix sans probabilité.

Propriété 2

Sur un système de choix S avec nous avons une incertitude maximale si nous ne connaissons pas les probabilités, ou si nous avons des probabilités uniformes (égales) sur toutes les possibilités

$$H(P) \leq h(|S|)$$

Entropie

Propriété 3

Si $P1 = P2 \rightarrow H(P1) = H(P2)$

L'entropie dépend uniquement de la distribution de probabilités, et non pas de la nature des possibilités.

Propriété 4

$$H(p1,p2,\ldots,pn) = H(p1,p2,\ldots,pn,0)$$

qui résulte de la convention $0 \cdot \log 0 = 0$ $\rightarrow$ les possibilités à probabilité tendant vers zéro importent rien pour la quantité d'incertitude

Entropie

Propriétés Avancées

- $H(p_1,p_2,...,p_n) = H(p_{\pi(1)},p_{\pi(2)},...,p_{\pi(n)})$ pour chaque permutation π
- $H(p_1,p_2,...,p_n)$ est continue dans toutes ses variables.
- $H(p_1,p_2,...,p_n) = H(p_1+p_2,...,p_n) +(p_1 + p_2)H(p_1/(p_1 + p_2)$,

$p_2 /(p_1 + p_2))$, pour chaque distribution de probabilité $p_1,...,p_n$ avec $n \geq 2$. 4

- $H(1/n,..., 1/n)$ est croissant avec n