Université Batna 2 -Mostefa Ben Boulaïd

- Faculté de Technologie –

Département D'Electronique

3ème Année Licence Télécommunication 2016-2017

Nom :

Prénom :

Solution EXAMEN

Codage et Théorie de l'Information

Date : 05 JUIN 2017 - Durée 1.5 heures - Calculatrices permises

Responsable : Dr. Hadef Mahmoud

Exercice 01 (8 points)

Soit une source (S) à 11 symboles (s_1 à s_{11}) définie par les probabilités suivantes :

S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}
P_i	0.22	0.15	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04	0.03	0.02

1. Calculez l'entropie de la source. **1 point**

S	p_i	$-\log_2(p_i)$	$-p_i \log_2(p_i)$
s_1	0.22	2.184	0.481
s_2	0.15	2.737	0.411
s_3	0.12	3.059	0.367
s_4	0.11	3.184	0.350
s_5	0.10	3.322	0.332
s_6	0.08	3.644	0.292
s_7	0.07	3.837	0.269
s_8	0.06	4.059	0.244
s_9	0.04	4.644	0.186
s_{10}	0.03	5.059	0.152
s_{11}	0.02	5.644	0.113
			$H(S)$ = 3.197 sh

2. Que vaudrait l'entropie si tous les symboles étaient équiprobables ?**1 point**

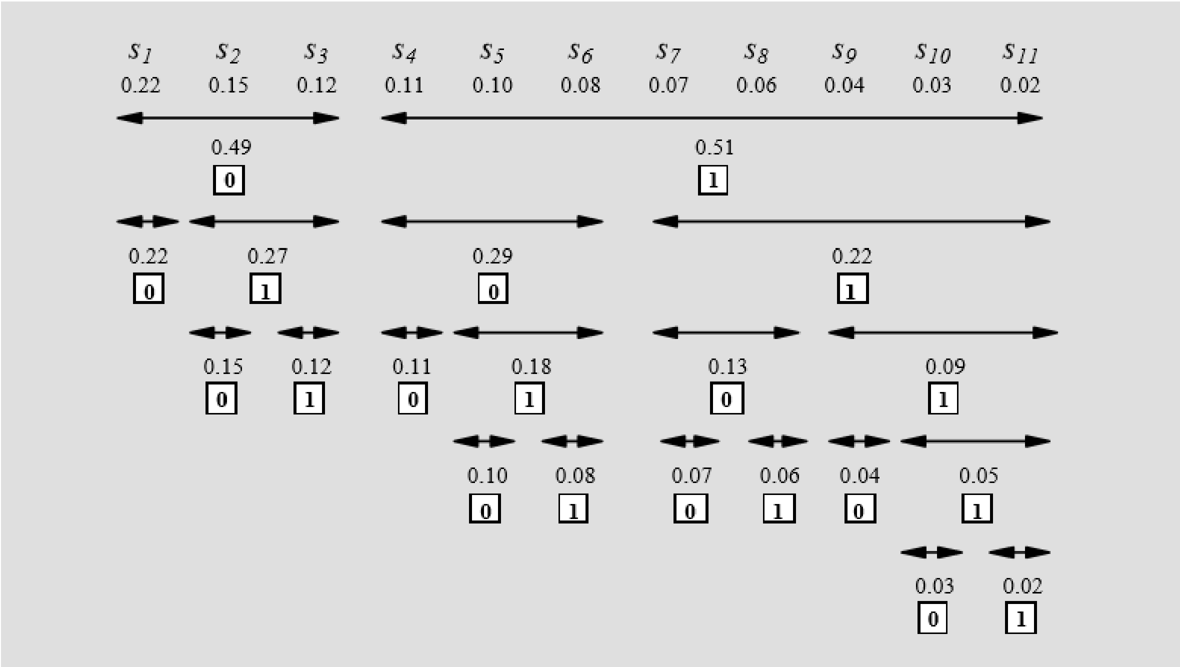
Dans le cas de l'équiprobabilité :

$$p_i = \frac{1}{11}$$

et $\quad \boldsymbol{H(S)} = -\log_2(\frac{1}{11}) = 3.459$

On constate bien que l'entropie est supérieure dans le cas de l'équiprobabilité des symboles.

3. Donner un code binaire pour la source ci-dessus en appliquant la méthode de Fano-Shannon, et calculez sa longueur moyenne. **2.5 points**



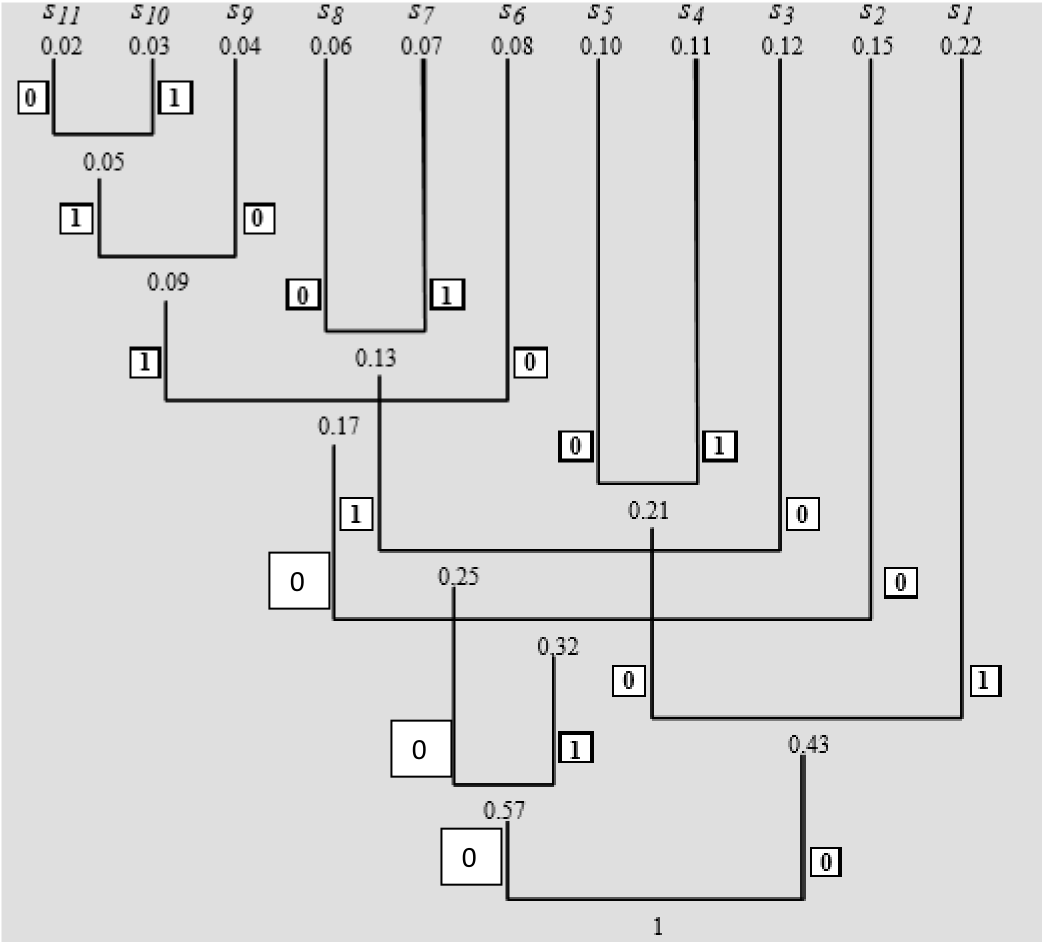
Donc

S	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11
code	00	010	011	100	1010	1011	1100	1101	1110	1111 0	1111 1

Avec

S	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	
p_i	0.22	0.15	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04	0.03	0.02	
l_i	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	
$l_i\, p_i$	0.44	0.45	0.36	0.33	0.40	0.32	0.28	0.24	0.16	0.15	0.10	$l_{moy} = 3.23$

4. Construisez un code de Huffman binaire pour la source ci-dessus. Quel est sa longueur moyenne ? **2.5 points**



Le codage obtenu est le suivant :

S	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11
code	01	110	100	001	000	1110	1011	1010	11110	111111	111110

Donc

S	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	
p_i	0.22	0.15	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07	0.06	0.04	0.03	0.02	
l_i	2	3	3	3	3	4	4	4	5	6	6	
$l_i\,p_i$	0.44	0.45	0.36	0.33	0.30	0.32	0.28	0.24	0.20	0.18	0.12	$l_{moy} = 3.22$

Exercice 02 (6 points)

1. Calculez la distance minimale du code suivant
   C = {0000000, 0000101, 0011000, 0111011, 1100000, 1101011, 1110000, 1111011}
   D(0000000, 0000101)=2, D(0000000, 0011000)=2, D(0000000, 0111011)=5
   D(0000000, 1100000)=2, D(0000000, 1101011)=5, D(0000000, 1110000)=3

D(0000000, 1111011)=6, D(0000101, 0011000)=4, D(0000101, 0111011)=5
D(0000101, 1100000)=4, D(0000101, 1101011)=5, D(0000101, 1110000)=5
D(0000101, 1111011)=6, D(0011000, 0111011)=3, D(0011000, 1100000)=4
D(0011000, 1101011)=5, D(0011000, 1110000)=3, D(0011000, 1111011)=4
D(0111011, 1100000)=5, D(0111011, 1101011)=2, D(0111011, 1110000)=4
D(0111011, 1111011)=1, D(1100000, 1101011)=3, **D(1100000, 1110000)=1**
D(1100000, 1111011)=4, D(1101011, 1110000)=4, **D(1101011, 1111011)=1**
D(1110000, 1111011)=3
La distance minimal est D_{min}=1 **1 point**

2. Sachant que Le mot $\hat{z}_1$ = (1110111) a été reçu après une transmission de l'un des mots du code C. Utiliser le décodage à distance minimale pour décoder $\hat{z}_1$.
D(0000000, 1110111)=6
D(0000101, 1110111)=4
D(0011000, 1110111)=6
D(0111011, 1110111)=3
D(1100000, 1110111)=4
D(1101011, 1110111)=3
D(1110000, 1110111)=3
D(1111011, 1110111)=2 **1.5 point**
Le résultat du décodage à distance minimale pour décoder $\hat{z}_1$ est 1111011

3. Considérons le code binaire de Hamming (7,4).
   a. Construisez sa matrice de vérification H **1 point**

   0 0 0 1 1 1 1
   H=0 1 1 0 0 1 1
   1 0 1 0 1 0 1

   b. Le mot $\hat{z}_2$ = (0110101) a été reçu. A partir de la matrice de de vérification H corriger l'erreur s'il y en a une et vérifier que la correction est valide.
   Calcule du syndrome
   $S_2 = \hat{z}_2 H^T$ =[0 1 1] donc l'erreur est dans le troisieme bit le mot transmit est donc z2=(0100101) **1 point** pour vérifier
   $z_2 H^T$=(0 0 0). **0.5 point**

4. Donnez une matrice de vérification pour le code linéaire dont la matrice de codage sous forme systématique est **1 point**

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H=[$-P^T$ I_3]

1 1 0 1 1 0 0
Hsys= 0 1 1 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 1

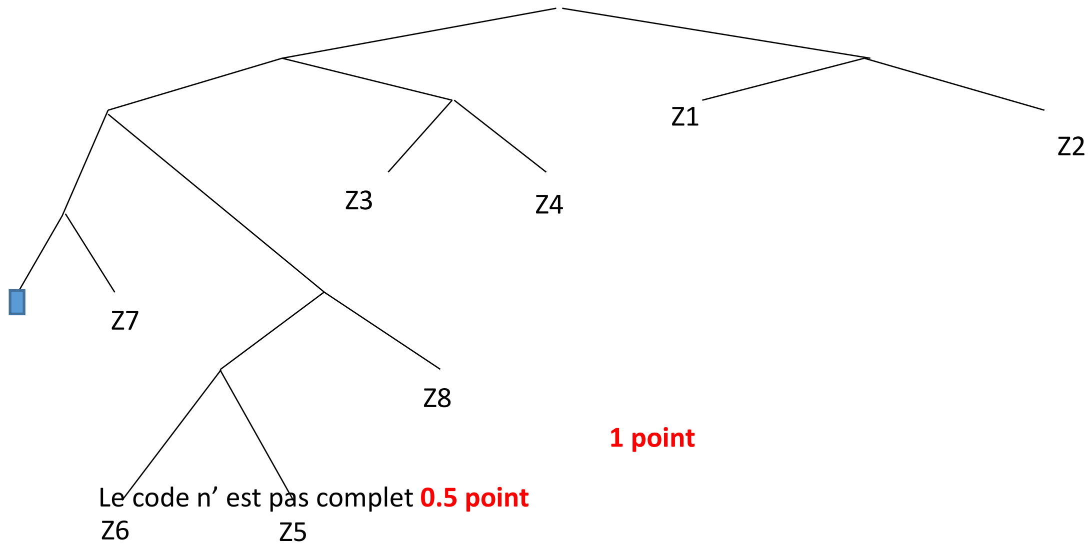
<u>Exercice 03 (6 points)</u>

Pour les codes suivants, déterminez si le code est sans préfixe, et/ou non-ambigu.

- Si le code est sans préfixe
  - Dessinez l'arbre de codage correspondant
  - Est-ce que le code est complet ?
- Si le code est ambigu, donnez une séquence de symboles qui pourraient être décodés en deux messages-sources différents.

1. z1=10, z2=11, z3=010, z4=011, z5=00101, z6=00100, z7=0001, z8=0011

   On observe qu'aucun mot est un préfix d'un autre donc le code est sans préfix → le code est non ambigu **0.5 point**

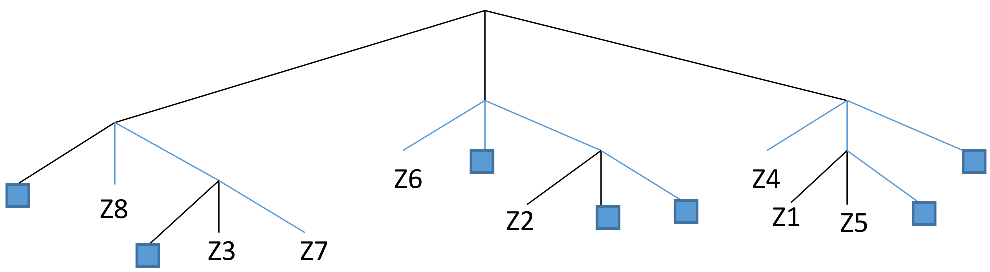


1 point

Le code n' est pas complet **0.5 point**

2. z1=cba, z2=bca, z3=acb, z4=ca, z5=cbb, z6=ba, z7=acc, z8=ab

   On observe qu'aucun mot est un préfix d'un autre donc le code est sans préfix → le code est non ambigu **0.5 point**



1 point

Le code n' est pas complet **0.5 point**

3. z1=101, z2=10, z3=110, z4=011, z5=00101, z6=00100, z7=1101, z8=0011

   Le code n' est pas sans-préfix → z2 est le préfix de z1 **0.5 point**

Le code est ambigu → z1z2 peut le décodé comme z2z3 **0.5 point**

4. z1=cba, z2=bca, z3=acb, z4=cb, z5=cca, z6=bbc

Le code n' est pas sans-préfix → z4 est le préfix de z1 **0.5 point**

Le code est ambigu → z1z4 peut le décodé comme z4z3 **0.5 point**

Bon Courage