Chapitre 2

Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace de probabilité.

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que X est une variable aléatoire réelle (on note v. a. r) si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$$

Exemple 2.1

1. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, X l'application constante définie sur Ω par $X(\omega) = \lambda$, pour tout $\omega \in \Omega$, alors X est une v. a. r. En effet soit $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} X^{-1}(]-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \quad / \quad X(\omega) \in]-\infty, x]\} \\ &= \{\omega \in \Omega \quad / \quad \lambda \in]-\infty, x]\} \\ &= \begin{cases} \Omega & \lambda \in]-\infty, x] \\ \varnothing & \lambda \notin]-\infty, x] \end{cases} \end{aligned}$$

alors, $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ puisque $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\varnothing \in \mathcal{F}$

2. *Soient $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A*

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

Posons $X = \mathbb{1}_A$, alors X est une v. a. r.
En effet soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} X^{-1}(]-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \quad / \quad X(w) \in]-\infty, x]\} \\ &= \{\omega \in \Omega \quad / \quad \mathbb{1}_A(\omega) \in]-\infty, x]\} \\ &= \begin{cases} \Omega & 1, 0 \in]-\infty, x] \\ \overline{A} & 0 \in]-\infty, x], 1 \notin]-\infty, x] \\ \varnothing & 1, 0 \notin]-\infty, x] \end{cases} \end{aligned}$$

alors, $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ puisque $\Omega \in \mathcal{F}$, $\varnothing \in \mathcal{F}$ et $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

3. *Soient $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, \{a\}, \{b, c, d\}\}$ et soit X l'application définie sur Ω par $X(a) = 1, X(b) = X(c) = 0$ et $X(d) = 50$. On remarque $\exists x = 0 \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} X^{-1}(]-\infty, 0]) &= \{\omega \in \Omega \quad / \quad X(\omega) \in]-\infty, 0]\} \\ &= \{\omega \in \Omega \quad / \quad X(\omega) = 0\} \\ &= \{b, c\} \notin \mathcal{F} \end{aligned}$$

alors, X n'est pas une v. a. r.

Remarque 2.1 *Soient X une variable aléatoire réelle, $x \in \mathbb{R}$. A partir de maintenant, la notation $\mathbb{P}(X \leq x)$ désignera $\mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x]))$ et pour tout $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est la tribu définie sur $\mathbb{R}$) la notation $\mathbb{P}(\{X \in A\})$ désignera $\mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\})$.*

Définition 2.2 *Soit X une v. a. r définie sur Ω, la fonction de répartition F_X associée à X est définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} F_X & : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & F_X(x) \end{array}$$

avec

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(]-\infty, x])\right) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Exemple 2.2 *Déterminons la fonction de répartition associées aux deux v. a. r de l'exemple 2.1.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons $X(\omega) = \lambda$ pour tout $\omega \in \Omega$*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < \lambda \\ 1 & si \quad \lambda \leq x \end{cases}$$

2. *Soit $A \in \mathcal{F}$ et posons $X = \mathbb{1}_A$, la fonction indicatrice de A. On a*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \mathbb{P}(\overline{A}) & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \end{cases}$$

La fonction de répartition associée à une variable aléatoire réelle jouit des propriétés suivantes :

Proposition 2.1 *Soient X une v. a. r, F_X sa fonction de répartition, alors on a les propriétés suivantes :*

1. ***L'image de F_X :***

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1.$$

2. ***Le comportement à l'infini :***

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

3. ***La croissance :** La fonction F_X est croissante.*

4. ***La continuité à droite :** La fonction F_X est continue à droite,*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a).$$

La fonction de répartition est très utile pour calculer la probabilité attachée à un intervalle, en effet

Théorème 2.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, X une v. a. r et F_X sa fonction de répartition, alors on a :*

1. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

2. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}(X = a)$.

3. $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - \mathbb{P}(X = b)$.

4. $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}(X = a) - \mathbb{P}(X = b)$.

preuve *On montre seulement la première égalité. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors on a :*

$$X^{-1}(]-\infty, b]) = X^{-1}(]-\infty, a]) \cup X^{-1}(]a, b]),$$

de plus, les ensembles $X^{-1}(]-\infty, a])$ et $X^{-1}(]a, b])$ sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned} F_X(b) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(]-\infty, b])\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(]-\infty, a]) \cup X^{-1}(]a, b])\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(]-\infty, a])\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(]a, b])\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= F_X(a) + \mathbb{P}(a < X \leq b) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Théorème 2.2 *Soit X une v. a. r définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathbb{P}_X$, l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X & : & \mathcal{F}_{\mathbb{R}} & \to & [0,1] \\ & & A & \mapsto & \mathbb{P}_X(A) \end{array}$$

avec

$$\forall A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\})$$

. $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$, elle est appelée ***la loi de*** *X.*

Remarque 2.2 *Il faut bien noter la différence entre les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_X$, la première est définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, c'est la probabilité de référence et elle est indépendante de la v. a. r X, alors que la seconde est construite sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ en faisant appel à la variable X*

Les variables aléatoires réelles se décomposent en deux : les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires absolument continues,

2.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 2.3 *On dit qu'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est discret si il est fini ou infini dénombrable.*

Définition 2.4 *Soit X une v. a. r définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.*

1. *On dit que X est une v. a. r discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble discret.*

2. *Le sous ensemble $X(\Omega)$ est appelé le support de X, c'est l'ensemble qui contient les valeurs prises par la v. a. r X avec une probabilité strictement positive.*

Remarque 2.3 *Une variable aléatoire discrète est tout simplement une application qui prend des valeurs discrètes $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.*

Définition 2.5 *Soit X une v. a. r discrète, on appelle* ***fonction de masse*** *de X, la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccc} p_X & : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & p_X(x) \end{array}$$

avec

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) & si \quad x \in X(\Omega) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Exemple 2.3 *Déterminons les fonctions de masse associées aux deux variables aléatoires discrètes de l'exemple 2.1.*

1. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X(\omega) = \lambda$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors X est une v. a. r discrète, $X(\Omega) = \{\lambda\}$ et sa fonction de masse est donnée par :*

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = \lambda \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. *Soient $A \in \mathcal{F}$, $X = \mathbb{1}_A$, la fonction indicatrice de A, alors la fonction de masse de X est donnée par*

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(A) & si \quad x = 1 \\ \mathbb{P}(\overline{A}) & si \quad .x = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Proposition 2.2 *Soient X une v. a. r discrète, p_X sa fonction de masse. Alors p_X vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in X(\Omega)$, $0 \leq p_X(x) \leq 1$*
2. $\sum_{k \in X(\Omega)} p_X(k) = 1$

La relation entre la fonction de masse et la fonction de répartition dans le cas d'une variable aléatoire discrète est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 2.3 *Soient X une v. a. r discrète, F_X sa fonction de répartition et p_X sa fonction de masse. Pour $x \in X(\Omega)$, posons $F_X(x^-) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$. Alors :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-).$$
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k).$$

2.2.1 Espérance

Définition 2.6 *On appelle **espérance mathématique** ou **moyenne** d'une variable aléatoire réelle discrète X, la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_X(k).$$

où p_X est la fonction de masse de X.

Remarque 2.4 *Soit X une v. a. r discrète.*

1. *L'espérance de X est définie par une somme qui peut être infinie, c'est pour cette raison qu'elle appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en général.*
2. *Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est centrée.*
3. *Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors*

$$\min_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq \mathbb{E}(X) \leq \max_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Proposition 2.3 *Soient X une variable discrète, p_X sa fonction de masse et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons $Y = g(X)$, alors Y est encore une v. a. r discrète et*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) p_X(k).$$

Définition 2.7 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}(\mid X \mid) < \infty$.*

Proposition 2.4 *Soient X, Y deux variables aléatoire discrète, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors*

1. ***Linéarité :*** $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$
2. ***Positivité :*** *si X est une v. a. r positive, alors* $\mathbb{E}(X) \geq 0$

2.2.2 Variance et Ecart-type

Définition 2.8 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète.*

1. *On appelle **variance** de X, la quantité notée $Var(X)$ et définie par :*
$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - \mathbb{E}(X))^2 p_X(k).$$
2. *On appelle **écart-type** de X, la quantité notée $\sigma(X)$ et définie par :*
$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Remarque 2.5 *La variance d'une v. a. r discrète est définie par la somme (éventuellement infinie) de quantités positives, par conséquent $Var(X) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.*

Proposition 2.5 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète, alors :*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 p_X(k) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 2.6 *Soient X est une variable aléatoire réelle discrète, $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
2. $Var(X + b) = Var(X)$.

Définition 2.9 *Soient X une variable aléatoire réelle discrète, p_X sa fonction de masse et $r \in \mathbb{N}^*$.*

1. *On appelle **moment centré d'ordre** r , la quantité :*
$$\mu_r = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^r\right] = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - \mathbb{E}(X))^r p_X(k).$$
2. *On appelle **moment d'ordre** r, la quantité :*
$$\nu_r = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r p_X(k).$$

Remarque 2.6 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète.*

1. *Le moment centré d'ordre 2 de X est exactement sa variance.*
2. *Le moments et les moments centrés d'une v. a. r discrète, appartiennent en général à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

2.3 Variables aléatoires absolument continues

Définition 2.10 *Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une variable* ***absolument continue*** *s'il existe une fonction réelle notée f_X qui vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

La fonction f_X est appelée ***la fonction de densité de*** *X.*

Un critère simple pour vérifier si une v. a. r est absolument continue est donné par le résultat suivant :

Proposition 2.7 *Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle, F_X sa fonction de répartition. Si F_X est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (sauf peut être en un nombre fini de points), alors X est une variable absolument continue. De plus, si on pose*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, \quad t \to F_X(t) \quad \textit{est dérivable au point } t = x\},$$

alors la fonction de densité f_X peut être définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \textit{si} \quad x \in \mathcal{D} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Proposition 2.8 *Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle absolument continue et f_X sa densité. Alors On a :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) \geq 0.$*
2. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$*

Exemple 2.4 *Soient $c \in \mathbb{R}$, f la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 2ce^{-\dfrac{x}{3}} & \textit{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Sous quelle condition la fonction f est la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle ?
Solution : *Pour que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire il faut quelle soit :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0.$*

   On a $2ce^{-\dfrac{x}{3}} \geq 0$ si $c \geq 0$. De plus,
2. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$*
   On a
   $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\dfrac{x}{3}} dx = 6c,$$
   alors $c = \dfrac{1}{6}$

Ainsi, f est la fonction de densité d'une variable aléatoire si et seulement si $c = \dfrac{1}{6}$.

Proposition 2.9 *Soit X une variable aléatoire absolument continue, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

preuve *Soient $\epsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et soient F_X la fonction de répartition de X, f_X sa fonction de densité. Remarquons tout d'abord que :*

$$\mathbb{P}(X = x) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(x - \epsilon < X \leq x + \epsilon),$$

et par le théorème 2.1, on a

$$\mathbb{P}(x - \epsilon < X \leq x + \epsilon) = F_X(x + \epsilon) - F_x(x - \epsilon),$$

ainsi, d'après la proposition 2.7 on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(x - \epsilon < X \leq x + \epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} [F_X(x + \epsilon) - F_x(x - \epsilon)] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f_X(t)dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposition 2.10 *Soient X une variable aléatoire absolument continue, f_X sa fonction de densité et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On a :*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$$

Remarque 2.7 *On obtient comme conséquence immédiate de la proposition 2.9 et la proposition 2.10 : pour une variable aléatoire absolument continue X, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, les quantités*

$$\mathbb{P}(a < X \leq b), \mathbb{P}(a \leq X \leq b), \mathbb{P}(a < X < b), \mathbb{P}(a \leq X < b)$$

sont toute égales à

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt$$

2.4 Espérance

Définition 2.11 *On appelle **espérance mathématique** ou **moyenne** d'une variable aléatoire réelle absolument continue X, la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et définie par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$$

où f_X est la fonction de densité de X.

Remarque 2.8

1. *Il faut remarquer que l'espérance d'une v. a. r absolument continue est définie par une intégrale sur $\mathbb{R}$, par conséquent $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en général.*
2. *Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est centrée.*

Proposition 2.11 *Soient X une variable aléatoire réelle absolument continue, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, posons $Y = g(X)$, alors Y est encore une v. a. r absolument continue et*

$$\mathbb{E}(X)(Y) = E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)dx.$$

Définition 2.12 *Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue. On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.*

Proposition 2.12 *Soient X, Y deux variables aléatoire absolument continues, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors*

1. ***Linéarité :** $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathbb{E}(X) + \beta\mathbb{E}(Y)$*
2. ***Positivité :** si X est une v. a. r positive, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$*

2.5 Variance et Ecart-type

Définition 2.13 *Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue*

1. *On appelle* **variance** *de X, la quantité notée $Var(X)$ et définie par*

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)dx.$$

2. *On appelle* **écart-type** *de X, la quantité notée $\sigma(X)$ et définie par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Remarque 2.9

Remarque 2.10 *La variance d'une v. a. r absolument continue est définie par l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction positive, par conséquent $Var(X) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.*

Proposition 2.13 *Si X est une variable aléatoire réelle absolument continue, alors :*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 2.14 *Soient X est une variable aléatoire réelle absolument continue, $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
2. $Var(X + b) = Var(X)$.

Définition 2.14 *Soient X une variable aléatoire réelle absolument continue, f_X sa densité et $r \in \mathbb{N}^*$.*

1. *On appelle* **moment centré d'ordre** r *, la quantité :*

$$\mu_r = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^r\right] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^r f_X(x)dx.$$

2. *On appelle* **moment d'ordre** r*, la quantité :*

$$\nu_r = \mathbb{E}(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x)dx.$$

Remarque 2.11 *Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue.*

1. *Le moment centré d'ordre 2 de X est exactement sa variance.*
2. *Le moments et les moments centrés d'une v. a. r absolument continue, appartiennent en général à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

2.5.1 Fonction génératrice des moments

Pour une variable aléatoire X, posons

$$\mathcal{H} = \{t \in \mathbb{R} \quad / \quad \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty\}.$$

L'ensemble $\mathcal{H}$ est tout simplement le domaine de définition de la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$, il faut remarquer que cet ensemble ne peut pas être vide puisque $0 \in \mathcal{H}$.

Définition 2.15 *Soit X une variable aléatoire réelle, la fonction M_X définie par*

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}), \quad t \in \mathcal{H}$$

*est appelée **la fonction génératrice des moments** de la variable X.*

Exemple 2.5 *Calculons la fonction génératrice des moments pour :*

1. *Soit X la v. a. r discrète qui prends les valeurs $+1$ et -1 avec une probabilité $1/2$, alors la fonction génératrice des moments est égale à :*

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = e^{t\times(+1)} \times 1/2 + e^{t\times(-1)} \times 1/2 = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

2. *oient $\lambda > 0$, X la v. a. r absolument continue de fonction de densité :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x)dx = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx$$

Remarquons d'abord que, pour $t = \lambda$, $\quad M_X(\lambda) = +\infty$. Supposons donc que $t \neq \lambda$. On a :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx \\ &= \frac{\lambda}{t-\lambda}\left[e^{(t-\lambda)x}\right]_0^\infty \end{aligned}$$

Par suite

$$MY(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{t-\lambda} & si \quad t < \lambda \\ +\infty & t \geq \lambda \end{cases}$$

Ceci implique que $\mathcal{H} =]-\infty, \lambda[$ et

$$\forall t \in \mathcal{H}, \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}.$$

La fonction génératrice des moments permet d'identifier la loi d'une variable aléatoire, en effet

Théorème 2.4 *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles, M_X, M_Y leur fonctions génératrices, alors*

$$[\quad X \quad et \quad Y \quad ont\ même\ loi \quad] \Leftrightarrow [M_X \equiv M_Y]$$

Une autre propriété importante de la fonction génératrice des moments est qu'elle permet de calculer les moments d'une v. a. r lorsqu'un calcul direct s'avère difficile, en effet :

Théorème 2.5 *Soient X une variables aléatoire réelle, M_X sa fonction génératrice des moments. Si la fonction $t \mapsto M_X(t)$ est définie sur un intervalle ouvert et contenant 0, alors elle admet le développement en série entière suivant :*

$$M_X(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}(X^n)}{n!} t^n,$$

pour tout t dans un voisinage de 0.
En particulier, si $n \geq 1$, alors

$$\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0),$$

où $M_X^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de M_X.

Exemple 2.6 *Calculons la moyenne et la variance pour les variables de l'exemple 2.5. On a :*

1. $$t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

   on remarque que cette fonction génératrice des moments vérifie les condition du théorème 2.5, d'où

   $$\mathbb{E}(X) = M_X^{'}(0) = 0, \quad \mathbb{E}(X^2) = M_X^{''}(0) = 1,$$

   Par suite $Var(X) = 1$

2. $$\forall t \in \left]-\infty, \lambda\right[, \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{t - \lambda}.$$

   Aussi cette fonction génératrice des moments vérifie les condition du théorème 2.5, d'où

   $$\mathbb{E}(X) = M_X^{'}(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{E}(X^2) = M_X^{''}(0) = \frac{2}{\lambda^2},$$

   Par suite $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

2.6 Fonction caractéristique

Dans ce paragraphe $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Définition 2.16 *Soit X une variable aléatoire réelle, la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ définie par :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R}$$

*est appelée **la fonction caractéristique** de la variable X.*

Contrairement à la fonction génératrice qui peut être infinie, la fonction caractéristique est toujours finie, mieux elle est bornée, en effet

Proposition 2.15 *Sot X une v. a. r, La fonction caractéristique φ_X de la variable X vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\varphi_X(0) = 1$ et $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_X(t)| \leq 1$.*
2. *La fonction $t \mapsto \varphi_X(t)$ est uniformément continue.*
3. *X est une v. a. r symétrique, si et seulement si φ_X est une fonction réelle paire*

4. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et posons* $Y = aX + b$, *alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at).$$

Exemple 2.7 *Calculer la fonction caractéristique des variables suivantes :*

1. *Soit* X *la v. a. r qui prends les valeurs* $+1$ *et* -1 *avec une probabilité* $1/2$, *alors un petit calcul donne :*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

2. *Soit* Y *la v. a. r absolument continue de fonction de densité*

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Pour $t = 0$, *on a* $\varphi_Y(0) = 1$. *Si* $t \neq 0$, *alors*

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) = \int_0^1 e^{ity}dy = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Donc

$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it} - 1}{it} & si \quad t \neq 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

La fonction génératrice, permet d'identifier la loi d'une variable aléatoire en effet :

Théorème 2.6 *Soient* X, Y *deux variables aléatoires,* φ_X, φ_Y *leur fonctions caractéristiques, alors*

$$[\quad X \quad et \quad Y \quad ont\ même\ loi \quad] \Leftrightarrow [M_X \equiv M_Y]$$

Comme la fonction génératrice des moments, la fonction caractéristique permet de calculer les moments d'une variable réelle lorsque le calcul directe est difficile.

Théorème 2.7 *Soient* X *une variable aléatoire,* φ_X *sa fonction caractéristique et* $n \geq 1$. *Supposons que* $\mathbb{E}(X^n) < \infty$, *alors la fonction* φ_X *est* n *fois dérivable, de plus*

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathbb{E}(X^k) = (-i)^k\varphi_X^{(k)}(0),$$

où $\varphi_X^{(k)}$ *est la dérivée d'ordre* k *de* φ_X.

Exemple 2.8 *calculer l'espérance et la variance des variable aléatoire de l'exemple 2.7*

1. $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. *En appliquant le théorème 2.7, on a :*

$$\varphi_X^{'}(0) = 0, \quad et \quad \varphi_X^{''}(0) = -1$$

par suite

$$\mathbb{E}(X) = -i\varphi_X^{'}(0) = 0, \quad et \quad \mathbb{E}(X^2) = -\varphi_X^{''}(0) = 1.$$

Par conséquent

$$Var(X) = 1$$

2.

$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it}-1}{it} & si \quad t \neq 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

En appliquant le théorème 2.7, on a :

$$\varphi_Y^{'}(0) = \frac{i}{2}, \quad et \quad \varphi_Y^{''}(0) = -\frac{1}{3}$$

par suite

$$\mathbb{E}(Y) = -i\varphi_Y^{'}(0) = \frac{1}{2}, \quad et \quad \mathbb{E}(Y^2) = -\varphi_Y^{''}(0) = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent

$$Var(Y) = \frac{1}{12}.$$

2.7 Trois inégalités utiles

Dans ce paragraphe on donne trois inégalités qu'on utilisera dans les chapitres suivants, ces inégalités sont valables pour les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires absolument continues, leur intérêt réside dans le fait qu'elle ne font pas appel à la loi de la variable aléatoire considérée.

2.7.1 Inégalité de Jensen

Définition 2.17 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe sur I si*

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

.

Exemple 2.9 *La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$*

En général, il est difficile de vérifier qu'une fonction donnée est convexe en utilisant juste la définition, cependant si cette fonction est deux fois dérivable, alors

Proposition 2.16 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I, alors*

$$f \text{ convexe sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I, f^{''}(x) \geq 0.$$

Comme conséquence de ce résultat, on a

Corollaire 2.1 *Soient $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

1. *$x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.*
2. *$x \mapsto x^{2n}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*
3. *$x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

A présent on peut énoncer l'inégalité de Jensen :

Proposition 2.17 *Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe, X une variable aléatoire réelle. Supposons que $\mathbb{E}(|f(X)|) < \infty$, alors on a* ***l'inégalité de Jensen*** *:*

$$f\left(\mathbb{E}(X)\right) \leq \mathbb{E}\left(f(X)\right)$$

En appliquant ce résultat à des fonctions convexes particulières, on a

Corollaire 2.2 *Soient X une variable aléatoire réelle, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors*
$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}\left(|X|\right).$$
2. *Si $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$, alors*
$$\left(\mathbb{E}(X)\right)^{2n} \leq \mathbb{E}\left(X^{2n}\right).$$
3. *Si X est positive et si $\mathbb{E}(X^n) < \infty$, alors*
$$\left(\mathbb{E}(X)\right)^{n} \leq \mathbb{E}\left(X^{n}\right).$$
4. *Si $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) < \infty$, alors*
$$e^{\lambda \mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right).$$

2.7.2 Inégalité de Markov

La deuxième inégalité est utile pour estimer la quantité $\mathbb{P}(|X| > \lambda)$ lorsqu'on connait pas la loi de la variable aléatoire X, elle est connue sous le nom inégalité de Markov :

Proposition 2.18 *Soient $\lambda > 0$, X une variable aléatoire réelle, avec $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors on a* ***inégalité de Markov*** *:*

$$\mathbb{P}(|X| > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\lambda}$$

2.7.3 Inégalité de Tchebycheff

La dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité de Markov, elle appelée inégalité de Tchebycheff :

Proposition 2.19 *Soient $\lambda > 0$, X une variable aléatoire réelle, avec $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, alors on a* ***inégalité de Tchebycheff*** *:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}.$$