LOIS NORMALES

1. LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** sur $\mathbb{R}$ (notée $\mathscr{N}(0;1)$) si sa densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cela signifie que, pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$:

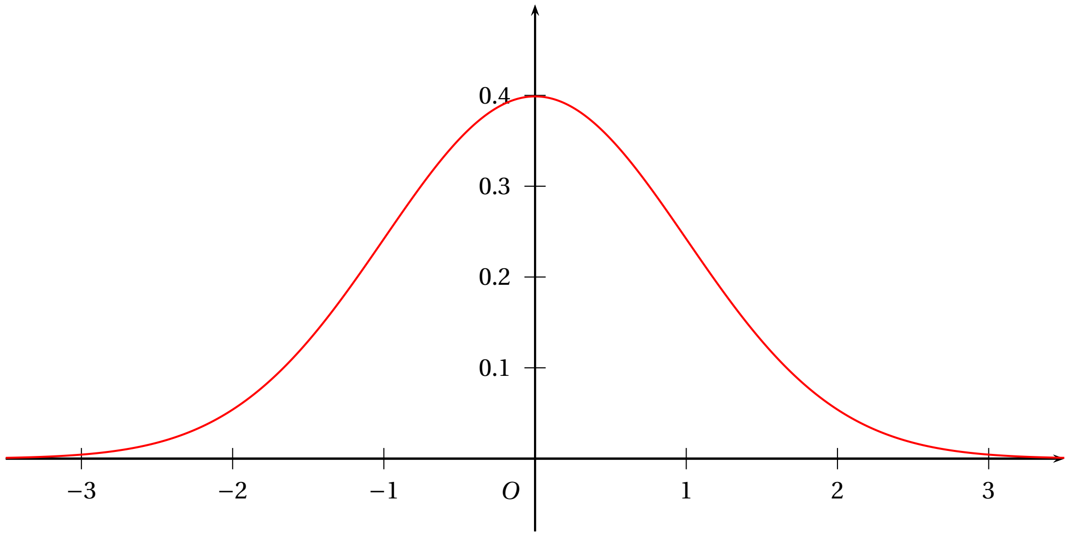
$$p(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

REMARQUES

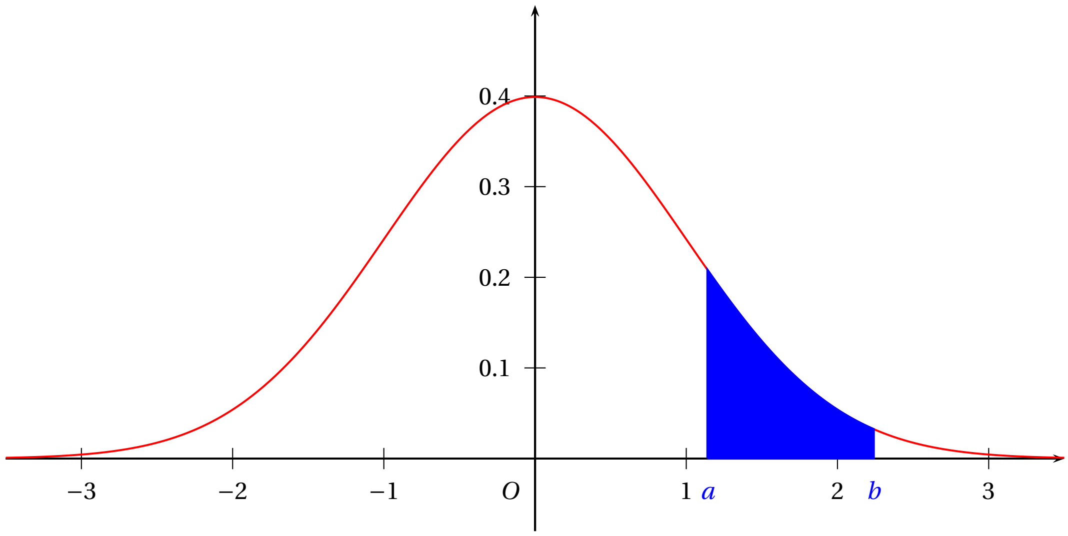
- On admet que f définit bien une densité, c'est à dire que l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f est égale à 1
- On a également :
  $p(X \geqslant a) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (limite que l'on peut noter : $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$)
  $p(X \leqslant b) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (limite que l'on peut noter : $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$)
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, paire, positive, son tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0

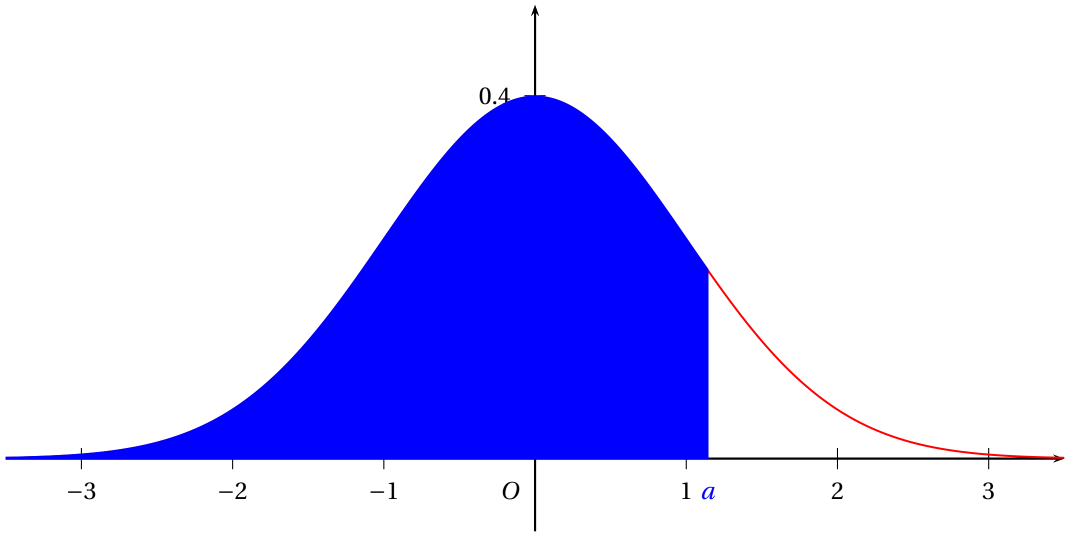
  et sa courbe représentative :



- $p\,(a \leqslant X \leqslant b)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



- $p\,(X \leqslant a)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite :

- L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0$ (loi *centrée*) ;
- La variance de X est $\sigma(X) = 1$ (loi *réduite*).

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et a un réel quelconque :

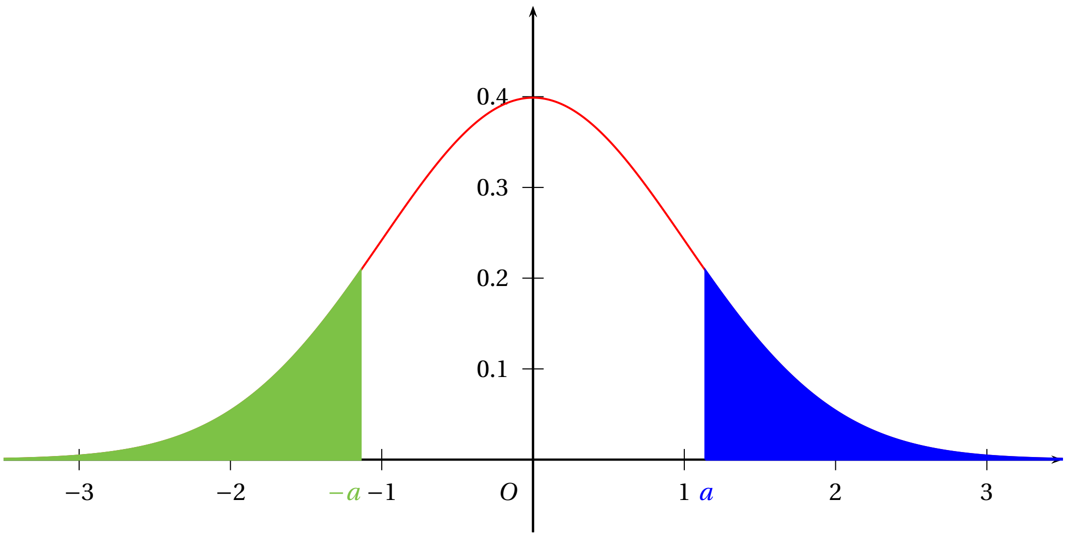
- $p(X \leqslant 0) = p(X \geqslant 0) = 0,5$
- $p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$
- $p(-a \leqslant X \leqslant a) = 1 - 2 \times p(X \geqslant a) = 2 \times p(X \leqslant a) - 1$

REMARQUE

Ces propriétés résultent du fait que :

- la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe est égale à 1.

On retrouve facilement ces propriétés à l'aide d'une figure par exemple pour la seconde formule :



$p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$

PROPRIÉTÉ («LOI NORMALE INVERSE»)

Soient X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et un réel $k \in]0;1[$.

Il existe un **unique** réel m_k tel que $p(X \leqslant m_k) = k$.

REMARQUE

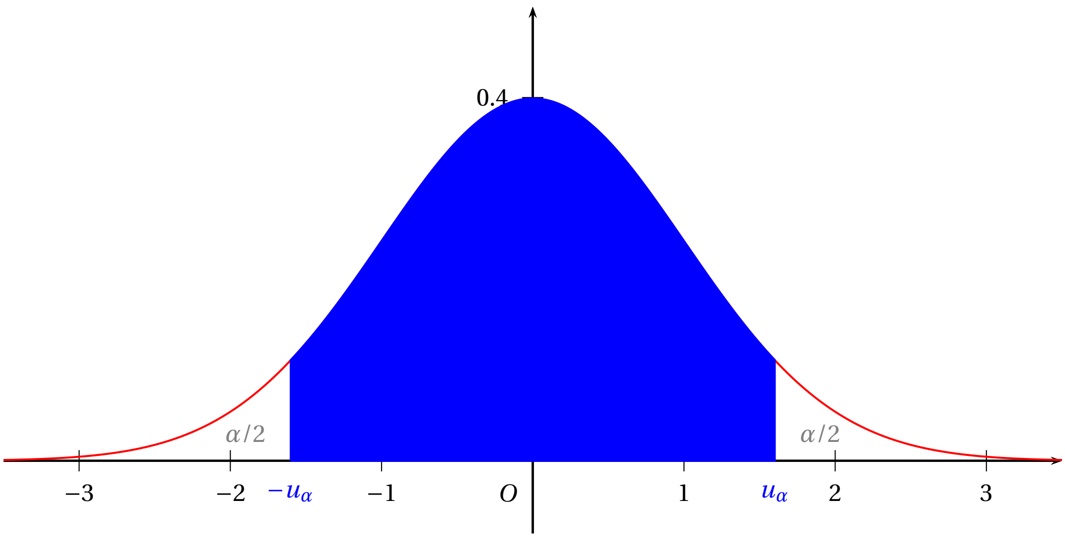
On peut calculer les valeurs de m_k à la calculatrice.

THÉORÈME

Soient X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et un réel $\alpha \in]0;1[$.

Il existe un **unique** réel u_α tel que :

$$p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha.$$



$$p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

REMARQUES

- En utilisant la formule $p(-a \leqslant X \leqslant a) = 2 \times p(X \leqslant a) - 1$ et la «*loi normale inverse*» on peut calculer les valeurs de u_α à la calculatrice.
- Deux valeurs à retenir :
  $u_{0,05} = 1,96$ c'est à dire que $p(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0,95$
  $u_{0,01} = 2,58$ c'est à dire que $p(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) = 0,99$

2. LOI NORMALE D'ESPÉRANCE μ ET D'ÉCART-TYPE σ

DÉFINITION ET THÉORÈME

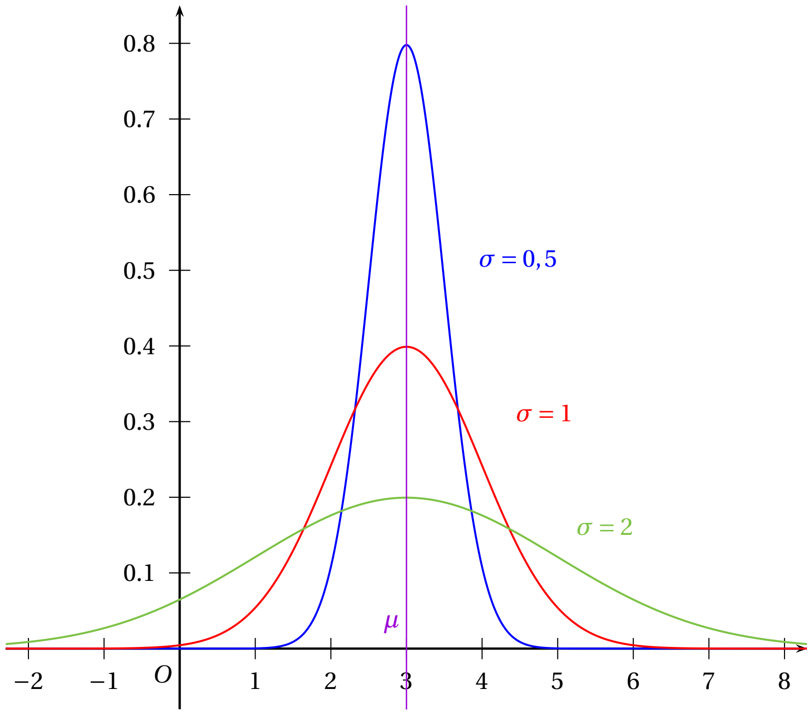
Soient deux réels μ et $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale de paramètres** μ **et** σ^2 (notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$) si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

L'espérance mathématique de X est μ et son écart-type σ (et donc sa variance σ^2).

REMARQUE

La courbe représentative de la distribution d'une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ est une courbe « en cloche » qui admet la droite d'équation $x = \mu$ comme axe de symétrie. Elle est plus ou moins « étirée » selon les valeurs de σ



$\mu = 3$ et $\sigma = 0,5 ; 1 ; 2$

PROPRIÉTÉ (RÈGLE DES TROIS SIGMAS)

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors :

- $p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$ (à 10^{-2} près)
- $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0,95$ (à 10^{-2} près)
- $p(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0,997$ (à 10^{-3} près)

EXEMPLE

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(11;3^2\right)$ alors :

$p\left(5 \leqslant X \leqslant 17\right) \approx 0,95$

3. THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

THÉORÈME (MOIVRE-LAPLACE)

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi **binomiale** $\mathscr{B}\left(n;p\right)$.

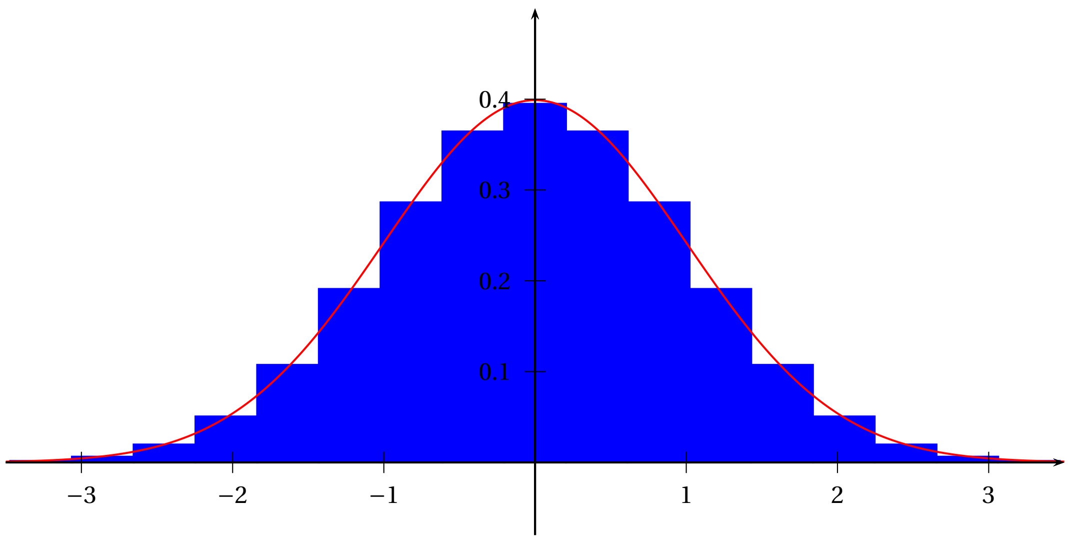
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - E\left(X_n\right)}{\sigma\left(X_n\right)}$.

Alors pour tous réels a et b :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(a \leqslant Z_n \leqslant b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

REMARQUES

- On rappelle que pour une loi binomiale X de paramètres n et p :$E\left(X\right) = np$ et $\sigma\left(X\right)^2 = np\left(1-p\right)$.
  Z_n peut donc aussi s'écrire : $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}$
- Ce théorème signifie que pour n élevé, la loi de Z_n est proche de la loi normale centrée réduite :



Histogramme de Z_n pour $n = 24$ et $p = 0,5$ et loi $\mathcal{N}\left(0;1\right)$

- En pratique, on considèrera que «n est suffisamment élevé» si $n \geqslant 30$; $np \geqslant 5$; $n\left(1-p\right) \geqslant 5$.
  La loi binomiale X pourra alors être approximée par la loi normale $\mathcal{N}\left(E\left(X\right);\sigma\left(X\right)^2\right)$

EXEMPLE

X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(30;0,4)$.

On cherche à calculer $p(7 < X \leqslant 17)$.

Posons $Z = \dfrac{X - 30 \times 0.4}{\sqrt{30 \times 0.4 \times 0.6}} = \dfrac{X-12}{\sqrt{7,2}}$. Alors :

$7 < X \leqslant 17 \Leftrightarrow -5 < X - 12 \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow -\dfrac{5}{\sqrt{7,2}} < \dfrac{X-12}{\sqrt{7,2}} \leqslant \dfrac{5}{\sqrt{7,2}} \quad \Leftrightarrow -1,86 < Z \leqslant 1,86$ On a bien $n \geqslant 30$; $np \geqslant 5$; $n\left(1-p\right) \geqslant 5$. On peut donc approximer Z par une loi normale centrée réduite.

A la calculatrice on trouve alors :

$p(-1,86 < Z \leqslant 1,86) \approx 0,937$(un calcul direct avec la loi binomiale donne $0,935$)