CHAPITRE 2

Les lois usuelles

1 A) Lois discrètes

Une loi de probabilité concentrée sur un ensemble discret E est dite une loi discrète.

1.1 Loi de Bernouilli

La variable aléatoire X définie sur (Ω, Q, P) suit une loi de Bernouilli si

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{0,1\} \\ X &= 0: \text{ échec, } X = 1 \text{ succès} \end{aligned}$$

Loi de probabilité de X :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= p \\ P(X=0) &= 1-p=q \end{aligned}$$

GRAPHE

on note

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \beta(p) \\ X &\longrightarrow \beta(1,p) \end{aligned}$$

1.1.1 Espérance mathématique et variance

1.1.2

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{2} x_i P(X=x_i) \\ &= 0P(X=0)+1P(X=1)=p \\ &\Longrightarrow E(X)=p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right)-[E(X)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2} x_i^2 P(X=x_i)-p^2 \\ &= p-p^2=p(1-p)=pq \\ &\Longrightarrow Var(X)=p(1-p)=pq \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{pq}$$

Exemple

on lance une pièce de monnaie, soit X la variable aléatoire définie comme suit:

$$X = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si pile est apparu} \\ 0 & \text{si face est apparu} \end{array} \right\}$$

on a:

$$P(X=1) = P(X=0) = \frac{1}{2} \qquad \left(p = \frac{1}{2}\right)$$

$$E(X) = p = \frac{1}{2}, \quad V(X) = p(1-p) = \frac{1}{4}, \quad \sigma_X = \frac{1}{2}$$

$$X \longrightarrow \beta\left(\frac{1}{2}\right)$$

1.1.3 Remarque:

Si on lance la pièce de monnaie n fois, la probabilité d'avoir $pile =$ la probabilité d'avoir $face = \frac{1}{2}$ dans chaque lancer, d'où on peut définir une autre loi dite loi Binomiale.

1.2 La loi Binomiale

1.2.1 Définition:

La loi Binomiale est la répétition de n épreuves identiques et indépendantes de Bernouilli de même paramètre p.

la v.a $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ (où chacune des X_i $(i = 1, ..., n)$ suit la loi de Bernouilli) est distribuée suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

on note

$$X \longrightarrow \beta(n, p)$$

La loi de probabilité de X s'écrit comme suit:

$$P(X=k) = \left\{ \begin{array}{cc} C_n^k \ p^k \ (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{array} \right\}$$

où k est le nombre de succès parmi les n épreuves.

On prouve que $P(X = k)$ est bien une loi de probabilité.

$$1) \ \ \forall \ k \in \{0, 1, ..., n\}; \quad P(X=k) \geq 0 \quad \text{car } 0 \leq p \leq 1$$

$$\begin{aligned} 2) \ \ \forall \ k \ &\in \ \{0, 1, ..., n\}; \ \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ p^k \ (1-p)^{n-k} \\ &= \ [p + (1-p)]^n = 1 \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^k \ b^{n-k}; \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Donc $P(X=k)$ est une loi de probabilité.

1.2.2 Exemple:

Une urne contient N boules, r boules blanches et $(N-r)$ non blanches. On pose: $p=\frac{r}{N}$ (probabilité de tirer une boule blanche de l'urne).

On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On note X la v.a qui représente le nombre de boules blanches tirées.

Déterminer la loi de probabilité de la v.a X.

On a

$$\Omega=\left\{\left(B,B,\overline{B},\overline{B},B,...\right)_{n-uplet},......\right\},\qquad Card\left(\Omega\right)=N^n$$

$$\begin{array}{rcl} X & : & \Omega\longrightarrow X\left(\Omega\right), \quad X\left(\Omega\right)=\{0,1,...,n\} \\ (.,...,...)_{n-uplet} & \longrightarrow & \text{nombre de boules blanches} \end{array}$$

Ainsi la loi de probabilité de X est:

$$\begin{aligned} P\left(X=0\right) &= \frac{\left(N-r\right)^n}{N^n}=\left(1-p\right)^n \\ P\left(X=1\right) &= \frac{r\left(N-r\right)^{n-1}}{NN^{n-1}}n=C_n^1\ p\ \ \left(1-p\right)^{n-1} \\ P\left(X=2\right) &= \frac{r^2\left(N-r\right)^{n-2}}{N^2N^{n-2}}C_n^2=C_n^2\ p^2\ \ \left(1-p\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$P\left(X=k\right) = \frac{r^k\left(N-r\right)k}{N^kN^{n-k}}C_n^k=C_n^k\ p^k\ \ \left(1-p\right)^{n-k}$$

Donc:

$$P\left(X=k\right)=C_n^k\ p^k\ \ \left(1-p\right)^{n-k};\qquad k\in\{0,1,...,n\}$$

1.2.3 Espérance mathématique et variance:

Du fait que

$$X=X_1+X_2+...+X_n;\quad X_i\longrightarrow B\left(p\right),\quad X_i\ \text{ v.a indépendantes}$$

Donc:

$$\begin{aligned} E\left(X\right) &= E\left(X_1+X_2+...+X_n\right)=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+...+E\left(X_n\right) \\ &= p+p+...+p=np \\ &\Longrightarrow E\left(X\right)=np \end{aligned}$$

On peut calculer $E(X)$ en appliquant la formule de l'espérance mathématique

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ p^k\ q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1}\ q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}\ q^{n-k} = np \quad \text{car} \quad \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}\ q^{n-k} = 1
\end{aligned}$$

ou encore, en utilisant l'égalité suivante:

$$k\ C_n^k = n\ C_{n-1}^{k-1}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\ C_{n-1}^{k-1}\ p^k\ q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\ p^{k-1}\ q^{n-k} = np
\end{aligned}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$E\left(X^2\right)$ existe car la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k}$ est absolument convergente

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k}; \qquad \text{on a : } k^2 = k(k-1) + k \\
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^k\ q^{n-k}\ + np \quad \text{car} \sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k\ p^k\ q^{n-k} = E(X) = np \\
&= n(n-1)\,p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}\ p^{k-2}\ q^{n-k} + np = n(n-1)\,p^2 + np
\end{aligned}$$

$$\text{car} \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2}\ p^{k-2}\ q^{n-k} = 1$$

donc

$$E\left(X^2\right) = n(n-1)\,p^2 + np$$

d'où:

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= n\,(n-1)\,p^2 + np - n^2p^2 \\ &= np\,(1-p) = npq \end{aligned}$$

1.2.4 Exemple:

Un étudiant doit répondre à 4 questions à choix multiple où 3 réponses sont proposées à chaque fois, une seule étant correcte.

a) Dans le cas où l'étudiant répond au hasard et de façon indépendante à chaque question, calculer la probabilité qu'il donne plus de réponses justes que fausses.

b) que devient cette probabilité s'il n' y a que 2 réponses possibles à chaque question? et s'il y' en a 4?

Solution:

Soit X la v.a qui correspond aux nombre de réponses justes.

1) il est clair que

$$X \longrightarrow \beta\,(n,p) \quad \text{avec} \quad n=4, \quad p=\frac{1}{3}$$

$$P\,(X=k) = C_4^k \,\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} \quad ; \quad k=0,1,3,4$$

$$\begin{aligned} P\,(X>2) &= P\,(X=3) + P\,(X=4) \\ &= C_4^3 \,\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right) + C_4^4 \,\left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= 4\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{9} = 0.11 \end{aligned}$$

2)

$$X \longrightarrow \beta\,(n,p) \quad \text{avec} \quad n=4, \quad p=\frac{1}{2}$$

$$P\,(X=k) = C_4^k \,\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} \quad ; \quad k=0,1,3,4$$

$$\begin{aligned} P\,(X>2) &= C_4^3 \,\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{5}{32} = 0.15 \end{aligned}$$

$$X \longrightarrow \beta(n,p) \quad \text{avec} \quad n=4, \quad p=\frac{1}{4}$$

$$P(X=k)=C_4^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k} \quad ; \quad k=0,1,3,4$$

$$\begin{aligned} P(X>2) &= C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= \frac{13}{256}=0.05 \end{aligned}$$

1.3 La loi Hypergéométrique

1.3.1 Exemple:

On tire sans remise un échantillon de n boules d'une urne contenant N boules, dont K sont blanches et $N_2 = N - K$ sont noires.

On désigne par X le nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution:

On a:

$$X(\Omega)=\{0,1,2,...,n\}$$

la loi de probabilité de X

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{C_K^0 \ C_{N-K}^n}{C_N^n} \\ P(X=1) &= \frac{C_K^1 \ C_{N-K}^{n-1}}{C_N^n} \\ P(X=2) &= \frac{C_K^2 \ C_{N-K}^{n-2}}{C_N^n} \end{aligned}$$

$$P(X=k) = \frac{C_K^k \ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Donc la loi de probabilité de X est:

$$P(X=k)=\frac{C_K^k \ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}; \quad k=0,1,...,n$$

Et on dit que la v.a X suit la loi Hypergéométrique de paramètres N, n, p avec $p = \frac{K}{N}$

On note:

$$X \longrightarrow H(N, n, p)$$

1.3.2 Espérance mathématique et variance de X

$E(X)$ existe car la série $\sum_{k=0}^{n} k \, \frac{C_K^k \; C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$ est absolument convergente

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \; P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \; \frac{C_K^k \; C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \frac{1}{C_N^n} \sum_{k=0}^{n} k \; \frac{K!}{k!\,(K-k)!} C_{N-K}^{n-k} = \frac{K!}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!\,(K-k)!} C_{N-K}^{n-k} \\
&= \frac{K!}{C_N^n \,(K-1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{(K-1)!}{k!\,(K-k)!} C_{N-K}^{n-k} = \frac{K!}{C_N^n \,(K-1)!} \sum_{k=1}^{n} C_{K-1}^{k-1} C_{N-K}^{n-k} \\
&= \frac{K \; C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{K-1}^{k-1} C_{N-K}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = \frac{K \; C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n}
\end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{K-1}^{k-1} C_{N-K}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = 1$

donc

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{K \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{Kn}{N} = np \\
\text{car } \frac{K}{N} &= p
\end{aligned}$$

Ainsi

$$E(X) = np$$

1.3.3 Remarque:

On peut calculer $E(X)$ de la façon suivante:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \; P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \; \frac{C_K^k \; C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

or on a:

$$k \; C_K^k = K \; C_{K-1}^{k-1} \quad \text{et} \quad n \; C_N^n = N \; C_{N-1}^{n-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X) &= n\sum_{k=0}^{n} k\ \frac{C_K^k\ C_{N-K}^{n-k}}{n\ C_N^n} = n\sum_{k=0}^{n} k\ \frac{C_{K-1}^{k-1}\ C_{N-K}^{n-k}}{N\ C_{N-1}^{n-1}} \\
&= \frac{n\ K}{N}\sum_{k=1}^{n}\ \frac{C_{K-1}^{k-1}\ C_{N-K}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = n\ \frac{K}{N} = np
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ \frac{C_{K-1}^{k-1}\ C_{N-K}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = 1$

On calcule maintenant la variance de X

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$E\left(X^2\right)$ existe car la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\ \frac{C_K^k\ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$ est convergente

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\ P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2\ \frac{C_K^k\ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ \frac{C_K^k\ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} + \sum_{k=0}^{n} k\ \frac{C_K^k\ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ \frac{K!}{k!\,(K-k)!}\,\frac{C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} + np
\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\ \frac{C_K^k\ C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} = E(X) = np$

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \frac{K!}{(K-2)!C_N^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(K-2)!}{(k-2)!\,(K-k)!}C_{N-K}^{n-k} + np \\
&= \frac{K!\ C_{N-2}^{n-2}}{(K-2)!C_N^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{C_{K-2}^{k-2}\ C_{N-K}^{n-k}}{C_{N-2}^{n-2}} + np \\
&= \frac{K!\ C_{N-2}^{n-2}}{(K-2)!C_N^n} + np \\
&= n\frac{K}{N}\frac{(K-1)(n-1)}{N-1} + np \\
&= np\frac{(K-1)(n-1)}{N-1} + np = np\left[\frac{(K-1)(n-1)}{N-1} + 1\right] \\
&= np\left[\frac{Kn-K+N-n}{N-1}\right]
\end{aligned}$$

par suite:

$$
\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= np\left[\frac{Kn-K+N-n}{N-1}\right]-n^2p^2 \\
&= \frac{np}{N-1}\left[Kn-K+N-n-npN+np\right] \\
&= \frac{np}{N-1}\left[\left(N-n\right)-K\left(1-\frac{n}{N}\right)\right]=\frac{np}{N-1}\left[\left(N-n\right)\left(1-\frac{K}{N}\right)\right] \\
&= np\left(1-p\right)\left[\frac{N-n}{N-1}\right]
\end{aligned}
$$

finalement:

$$Var\left(X\right)=np\left(1-p\right)\left[\frac{N-n}{N-1}\right]=npq\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

1.3.4 Remarques:

1) les tirages soient effectués avec ou sans remise, l'espérance mathématique du nombre de boules blanches est la même c'est np, qui ne dépend pas de N.

2) Le rapport $\frac{N-n}{N-1}$ est appelé " rapport d'exhaustivité", $0\leq\frac{N-n}{N-1}\leq1$

autrement dit, la variable hypérgéométrique est moins dispersée que la variable binomiale.

1.4 la loi de Poisson

Cette loi s'applique souvent aux phénomènes accidentels où la probabilité p est très faible $(p<0.05)$.

1.4.1 Définition:

La variable aléatoire X est dite suivre la loi de Poisson de paramètre $\lambda\left(\lambda>0\right)$ si:

$$\divideontimes\ X\left(\Omega\right)=\left\{0,1,2,....\right\}$$

$$\divideontimes\ P\left(X=k\right)=e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}$$

on note

$$X\longrightarrow P\left(\lambda\right)$$

On commence par prouver que $P\left(X=k\right)$ est bien une loi de probabilité.

$$1)\ \forall\ k\in\mathbb{R}^+;\ \ P\left(X=k\right)>0\ \ \text{c'est évident}$$

$$2) \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Donc la loi de Poisson est bien une loi de probabilité.

1.4.2 Espérance mathématique et Variance de X.

$E(X)$ existe car la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k\ e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente donc absolument convergente puisqu'elle est à termes positifs et donc:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\ P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\ e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k - 1}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\ e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

alors

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$E\left(X^2\right)$ existe car la série $\sum_{k\geq 0} k^2 e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}$ est absolument convergente.

avec

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k\geq 0} k^2 \ P\left(X=k\right) = \sum_{k\geq 0} k^2 e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} k\left(k-1\right) e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k\geq 0} k \ e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!}; \qquad \text{car } k^2 = k\left(k-1\right)+k \\
&= \sum_{k\geq 0} k\left(k-1\right) e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda; \qquad \text{car } \sum_{k\geq 0} k \ e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!} = E\left(X\right) = \lambda \\
&= \sum_{k\geq 2} e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \sum_{k\geq 2} e^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 \ e^{-\lambda} \sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \ e^{-\lambda} \ e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - E^2\left(X\right) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
Var\left(X\right) &= \lambda
\end{aligned}
$$

d'où:

$$
\sigma\left(X\right) = \sqrt{\lambda}
$$

1.4.3 Remarque:

On remarque que pour la loi de Poisson, on a:

$$
E\left(X\right) = Var\left(X\right) = \lambda
$$

1.5 Approximation de quelques lois

1.5.1 1) Tendance de la loi binomiale vers la loi de Poisson:

Quand $n \longrightarrow +\infty$ et $p \longrightarrow 0$ $(p < 0.1)$ tel que np admet une limite finie λ $(\lim_{n\longrightarrow+\infty} np = \lambda)$ donc:

$$
\beta\left(n,p\right) \longrightarrow P\left(\lambda\right) = P\left(np\right)
$$

en pratique:

$$
\begin{aligned}
n &> 50, \quad p > 0.1 \Longrightarrow \beta\left(n,p\right) \backsim P\left(np\right) \\
& \text{ou bien } \left(n > 30 \text{ et } np < 5\right)
\end{aligned}
$$

1.5.2 2) Tendance de la loi Hypergéométrique vers la loi binomiale:

Si la taille de l'échantillon tiré (n) est négligeable devant la taille de la population (N) ;

en pratique si:

$$n < \frac{N}{20} \quad \text{alors} \qquad H(N,n,p) \backsim \beta(n,p)$$

1.6 loi géométrique

On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p $(0 < p < 1)$ d'être un succès jusqu'à obtenir le 1^{er} succès.

Si l'on désigne le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à ce résultat par X on aura:

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1}\ p; \qquad n = 1, 2, ...$$

Dans ce cas, on dit que la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p et on note:

$$X \longrightarrow G(p)$$

on commence par vérifier que c'est bien une loi de probabilité

$$\begin{aligned} 1)\ \ P(X = n) &> 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{car } \ 0 &< p < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} = p\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right) = 1 \\ \text{car } \sum_{n=1}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \text{ la somme d'une suite géométrique de raison } x \text{ tel que } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

1.6.1 Espérance mathématique et variance

$E(X)$ existe car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n\ p\ q^{n-1}$ est absolument convergente du fait que $|p| < 1$ donc $|q| < 1$ aussi et:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\ P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\ p\ q^{n-1},\ \text{avec}\ \ q=1-p \\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty} n\ q^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dq}(q^n) = p\ \frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\right) \\
&= p\ \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

d'où:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

$E\left(X^2\right)$ existe car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\ p\ q^{n-1}$ est absolument convergente donc $Var(X)$ existe et on a:

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2pq^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty} n^2q^{n-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dq}(nq^n) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{p}\sum_{n=1}^{+\infty} n\ p\ q^{n-1}\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}E(X)\right) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = p\left[\frac{1}{p^2} + \frac{2(1-p)}{p^3}\right] = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Autre méthode pour calculer $E\left(X^2\right)$
on a

$$n^2 = n(n-1) + n$$

donc

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2pq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)pq^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} \\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1} + \frac{1}{p}\ \ \text{car}\ \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = E(X) \\
&= pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\right) + \frac{1}{p} = pq\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) + \frac{1}{p} \\
&= pq\left(\frac{2}{(1-q)^3}\right) + \frac{1}{p} = 2\frac{(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

en final

$$
\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

1.6.2 Exemple

Soit X une v.a suivant la loi géométrique de paramètre $p.i.e$

$$P\left(X = k\right) = p\left(1-p\right)^{k-1}$$

Démontrer que

$$P\left(X \geq k\right) = \left(1-p\right)^{k-1}$$