Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Statistiques et Analyse des Données

TD 01

Partie 1 *Analyse combinatoire*

Exercice 1

1. *Combien y a-t-il de mots de 5 lettres de lalphabet occidental ?* *Solution :* 26^5
2. *Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?* *Solution :* 4^{15}
3. *Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 066 ?* *Solution :* 10^7
4. *A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles ?* *Solution :* $\mathcal{A}_{18}^3 = \dfrac{18!}{(18-3)!} = \dfrac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896$
5. *Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 066 avec des chiffres distincts ? (ne contient pas 0 et 6 aussi)* *Solution :* $\mathcal{A}_8^7 = \dfrac{8!}{1!} = 40320$
6. *Un clavier de 9 touches $A, B, C, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.*
   (a) *Combien de codes différents peut-on former ?* *Solution :* 3×6^3
   (b) *Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?* *Solution :* 3×5^3
   (c) *Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?* *Solution :* $3 \times 6^3 - 3 \times 5^3$
   (d) *Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?* *Solution :* $3 \times \mathcal{A}_6^3$
   (e) *Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?* *Solution :* $3 \times 6^3 - 3 \times \mathcal{A}_6^3$
7. (a) *Combien y a-t-il de possibilités d'aligner 12 élèves ?* *Solution :* $12!$
   (b) *A raison de 10 secondes par permutations, combien de temps faudrait-il pour épuiser toutes les possibilités ?* *Solution :* $12! \times 10\ s = \dfrac{12! \times 10}{60 \times 60 \times 24 \times 365.25} \approx 151.786$ *années*
8. *Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?* *Solution :* $4!$
9. *Quel est le nombre danagrammes du mot ń ANAGRAMME ż ?* *Solution :* $\dfrac{9!}{3! \times 2!}$
10. *On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes*
    (a) *De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?* *Solution :* $\mathcal{C}_{57}^6 = \dfrac{57!}{6! \times 51!} = 36288252$
    (b) *Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :*
       i. *uniquement des hommes.* *Solution :* $\mathcal{C}_{32}^6$
       ii. *des personnes de même sexe* *Solution :* $\mathcal{C}_{32}^6 + \mathcal{C}_{25}^6$
       iii. *au moins une femme et au moins un homme* *Solution :* $\mathcal{C}_{57}^6 - \mathcal{C}_{32}^6 - \mathcal{C}_{25}^6$
11. *Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).*
    (a) *On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. combien de tirage possible dans les cas suivants :*

i. *3 jetons verts.* Solution : $\mathcal{A}_5^3$

ii. *aucun jeton vert* Solution : $\mathcal{A}_4^3$

iii. *au plus 2 jetons verts* Solution : $\mathcal{A}_4^3 + 3 \times \mathcal{A}_5^1 \times \mathcal{A}_4^2 + 3 \times \mathcal{A}_5^2 \times \mathcal{A}_4^1$

iv. *exactement 1 jeton vert* Solution : $3 \times \mathcal{A}_5^1 \mathcal{A}_4^2$

(b) *On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, avec remettre le jeton tiré.*

(c) *même question mais on tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.*

Solution de l'exercice 1

Partie 2 *Probabilités*

Exercice 2 *Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :*
A : ń La somme obtenue est au moins égale à 5 ż.
B : ń La somme obtenue est au plus égale à 5 ż.
C : ń La somme obtenue est strictement inférieure à 3 ż.

1. *Décrire l'espace échantillon* Ω *associé a cette expérience aléatoire.*
2. *A et B sont-ils contraires ?*
3. $\overline{B}$ *et C sont-ils incompatibles ?*
4. *Traduire par une phrase* $\overline{C}$.
5. *A et* $\overline{C}$ *sont-ils incompatibles ?*

Solution de l'exercice 2 :

1. $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
2. *A et B ne sont pas contraires car une somme égale à* 5 *les réalise simultanément.*
3. $\overline{B}$ *et C sont incompatibles car la somme ne peut être simultanément strictement supérieure à* 5 *(événement* $\overline{B}$*) et strictement inférieure à 3 (événement C).*
4. *L'événement* $\overline{C}$ *est ń La somme est supérieure ou égale à 3 ż.*
5. *A et* $\overline{C}$ *ne sont pas incompatibles car ils sont simultanément réalisés par une somme supérieure ou égale à 5.*

Exercice 3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable,* $A, B \in \mathcal{F}$. *Peut-on définir une probabilité vérifiant :*

1. $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{2}$
2. $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{7}{8}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$

Solution de l'exercice 3 :

1. *Non. Puisque* $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} = \mathbb{P}(A)$ *et* $(A \cap B) \subset A$
2. *Non. Puisque* $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{8} > 1$ *et* $\mathbb{P}(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$

Exercice 4 *Soit A et B deux événements aléatoires associés à un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(A\cap \overline{B})\\ &= \mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B})-\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 *On a :*

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap\overline{B})+\mathbb{P}(A\cap B)$$

et

$$\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\overline{A})$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap\overline{B})-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))-\mathbb{P}(A\cap\overline{B})\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(A\cap\overline{B})\end{aligned}$$

En permutant les rôles de A et de B, on a aussi

$$\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$$

Enfin, en appliquant cette formule à $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on trouve :

$$\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})-\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$$

Les quatre différences sont donc égales.

Exercice 5 *Une urne contient 10 boules : 3 noires, 4 blanches et 3 rouges. On tire simultanément 3 boules . calculer la probabilité des évènements suivants :*

1. *A : ń Avoir exactement 3 boules blanches ż.*
2. *B : ń Avoir une boule de chaque couleur ż.*
3. *C : ń Avoir au moins une boule rouge ż.*
4. *Recalculer la probabilité des évènement précédents mais cette fois on tire 3 boules successivement et sans remise.*

Solution de l'exercice 5 *: Soit Ω l'espace échantillon associé à cette expérience aléatoire, alors :*

$$\Omega=\{\{a,b,c\}/a,b,c\in\{BN,BB,BR\}\}.$$

On remarque que chaque élément $\{a,b,c\}$ de Ω a la même probabilité d'apparaître. On est par conséquent dans un cas équiprobable. Alors :

$$\forall A\in\mathcal{F}:\mathbb{P}(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

On utilise pour le calcul les combinaisons, puisque l'ordre n'a pas d'importance et pas de répétition.

1. $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathcal{C}_4^3}{\mathcal{C}_{10}^3}$
2. $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\mathcal{C}_3^1 \times \mathcal{C}_4^1 \times \mathcal{C}_3^1}{\mathcal{C}_{10}^3}$
3. $\overline{C}$: ń ne pas avoir de boule rouge ż. Alors : $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \dfrac{\mathcal{C}_7^3}{\mathcal{C}_{10}^3}$
4. *Soit Ω l'espace échantillon associé à cette expérience aléatoire, alors :*

$$\Omega = \{(a, b, c)/a, b, c \in \{BN, BB, BR\}\}.$$

On remarque que chaque élément $\{a, b, c\}$ de Ω a la même probabilité d'apparaître. On est par conséquent dans un cas équiprobable. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

On utilise pour le calcul les arrangements, puisque l'ordre est important et pas de répétition.

   (a) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathcal{A}_4^3}{\mathcal{A}_{10}^3}$

   (b) $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\mathcal{C}_3^1\mathcal{A}_3^1 \times \mathcal{C}_2^1\mathcal{A}_4^1 \times \mathcal{C}_1^1\mathcal{A}_3^1}{\mathcal{A}_{10}^3} = \dfrac{3! \times \mathcal{A}_3^1 \times \mathcal{A}_4^1 \times \mathcal{A}_3^1}{\mathcal{A}_{10}^3}$

   (c) $\overline{C}$: ń ne pas avoir de boule rouge ż. Alors : $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \dfrac{\mathcal{A}_7^3}{\mathcal{A}_{10}^3}$

Exercice 6 *Quel est le plus probable ?*

1. *A : ń Obtenir au moins un as en lançant 4 dés ż ?*
2. *B : ń Obtenir au moins deux as en lançant 10 dés ż ?*
3. *C : ń Obtenir au moins une paire d'as en lançant 25 paires de dés ż ?*
4. *D : ń Obtenir au moins deux as en lançant 50 dés ż ?*

Solution de l'exercice 6 *:*

1. *On prend comme univers Ω l'ensemble des quadruplets (4-listes) de nombres compris entre 1 et 6. Alors : $Card(\Omega) = 6^4$.*
   On a : $\overline{A}$: ń ne pas obtenir d'as en lançant 4 dés ż. Alors :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.5177.$$

2. *On prend comme univers Ω l'ensemble des 10-uplets (10-listes) de nombres compris entre 1 et 6. Alors : $card(\Omega) = 6^{10}$.*
   On a : $\overline{B} = B_1 \cup B_2$, avec :
   B_1 : ń ne pas obtenir d'as en lançant 10 dés ż, et B_2 : ń obtenir exactement un as en lançant 10 dés ż.
   Remarquons que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \frac{5^{10}}{6^{10}} + \frac{10.5^9}{6^{10}} = 3\frac{5^{10}}{6^{10}}$$

   Finalement :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 3\frac{5^{10}}{6^{10}} \approx 0.5154$$

3. *On prend comme univers Ω l'ensemble des 25-uplets de couples de deux nombres compris entre 1 et 6. Il y a 25 couples, et chaque élément (couple) du 25-uplet peur prendre 36 valeurs. Donc : card$(\Omega) = 36^{25}$.*
   On a : $\overline{C}$: ń ne pas obtenir une paire d'as ż, Alors :
$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{35^{25}}{36^{25}} \approx 0.5055$$
4. *On procède comme dans 2)*
$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D}) = 1 - 11\frac{5^{50}}{6^{50}} \approx 0.9987$$
   C'est ce dernier événement qui est donc le plus probable.

Exercice 7 *(Cours)*
Déterminer, en précisant à partir de quelles hypothèses, la probabilité de trouver, dans un groupe de n personnes choisies au hasard, au moins deux personnes ayant leur anniversaire le même jour. Calculer une valeur approchée de cette probabilité pour n = 23, n = 41 et n = 57.

Solution de l'exercice 7 *: Cours*

Exercice 8 *Lors dun référendum, deux questions étaient posées. 65% des personnes ont répondu ń oui ż à la première question, 51% ont répondu ń oui ż à la seconde question, et 46% ont répondu ń oui ż aux deux questions.*

1. *Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu ń oui ż à l'une ou l'autre des questions ?*
2. *Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu ń non ż aux deux questions ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu "oui" a la $1^{ère}$ question et "non" à la $2^{ème}$?*
4. *Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu "oui" a une seule question ?*

Solution de l'exercice 8 *: on note : A : ń la personne a répondu oui à la première question ż et B : ń la personne a répondu oui à la deuxième question ż, l'énoncé de l'exercice nous fournit :*
$$\mathbb{P}(A) = 0.65,\ \mathbb{P}(B) = 0.51,\ \textit{et}\ \mathbb{P}(A \cap B) = 0.46.$$

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.65 + 0.51 - 0.46 = 0.70$
2. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$
3. $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.65 - 0.46 = 0.11$
4. $\mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) = 0.65 + 0.51 - 2 \times 0.46 = 0.24$

Exercice 9 *Dans une université, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des étudiants ont été absents au moins 1 jour, 30% des étudiants ont été absents au moins 2 jours, 15% des étudiants ont été absents au moins 3 jours, 10% des étudiants ont été absents au moins 4 jours.*
On choisit au hasard un étudiant de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que cet étudiant :

1. *n'ait jamais été absent au cours de cette année ?*
2. *ait été absent une seule journée au cours de cette année ?*
3. *ait été absent au plus 3 jours au cours de cette année ?*

Solution de l'exercice 9 :

1. on pose : A : ń absent au moins 1 jours ż, alors : E_1 : ń n'ait jamais été absent au cours de cette année ż. Donc :
$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$
2. On pose B : ń absent au moins 2 jours ż, on remarque que : $B \subset A$, on cherche à calculer E_2 : ń ait été absent une seule journée au cours de cette année ż. Donc :
$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$$
3. On pose C : ń absent au moins 4 jours ż, on cherche à calculer E_3 : ń ait été absent au plus 3 jours au cours de cette année ż. remarque que : $E_3 = \overline{C}$, Donc :
$$\mathbb{P}(E_3) = 1 - \mathbb{P}(C) = 1 - 0.1 = 0.9$$

Exercice 10 *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \geq 2$ un système complet de Ω avec $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$et et $B \in \mathcal{F}$, alors on a :*
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)$$

Solution de l'exercice 10 : Soit $B \in \mathcal{F}$ on peut écrire
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap \Omega)\\ &= \mathbb{P}(B \cap (\cup_{k=1}^{n} A_k))\\ &= \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} (B \cap A_k))\end{aligned}$$
Mais les évènements $\{B \cap A_k,\ k = 1, 2, ..., n\}$ sont 2 à 2 incompatibles, ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} (B \cap A_k))\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$

Exercice 11 *On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)*

1. *Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.*
2. *On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1*

Solution de l'exercice 11 : On a $\Omega = \{x/x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. donc : $Card(\Omega) = 6$. Notons :

- u_1 : ń Le tirage s'effectue dans l'urne u_1 ż
- u_2 : ń Le tirage s'effectue dans l'urne u_2 ż
- B l'événement ń obtenir une boule blanche ż

La répartition des boules blanches et noires données dans l'énoncé nous fournit les probabilités :

$$\mathbb{P}(B|u_1) = \frac{3}{4}, \ \mathbb{P}(B|u_2) = \frac{1}{3}$$

Puisqu'il y a équiprobabilité dans les résultats du lancer de dé,

$$\mathbb{P}(u_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \ \mathbb{P}(u_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Remarquons aussi que les événements u_1 et u_2 forment un système complet de Ω

1. *En appliquant la formule des probabilités totales*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(B|u_k) \times \mathbb{P}(u_k) \\ &= \mathbb{P}(B|u_1) \times \mathbb{P}(u_1) + \mathbb{P}(B|u_2) \times \mathbb{P}(u_2) \\ &= \frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} \\ &= \frac{17}{36}\end{aligned}$$

2. *En appliquant la formule de Bayes*

$$\mathbb{P}(u_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|u_1) \times \mathbb{P}(u_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{4}.\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}} = \frac{9}{17}$$

Exercice 12 *On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :*

— *Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.*

— *i la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.*

1. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?*
2. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?*
3. *Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?*
4. *Quelle est la probabilité pour une personne dêtre saine si son test est négatif ?*

Solution de l'exercice 12

1. *La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est :*

$$\mathbb{P}(M|T^+) = \frac{\mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T^+)}$$

or

$$\mathbb{P}(T^+) = \mathbb{P}(T^+|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T^+|\overline{M})\mathbb{P}(\overline{M}) = 0.95 \times 0.03 + 0.1 \times 0.97 \approx 0.1255$$

D'où $\mathbb{P}(M|T^+) = 0.237$

2. *La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est :*

$$\mathbb{P}(\overline{M}|T^+) = 1 - \mathbb{P}(M|T^+) = 0.763$$

3. *La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est :* $\mathbb{P}(M|T^-) = 0.0017$

4. *La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est :* $\mathbb{P}(\overline{M}|T^-) = 0.9973$

Exercice 13 *(cours) Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout* n*, on note :* E_n *l'événement ń le jour* n*, le professeur oublie ses clés ż,* $P_n = \mathbb{P}(E_n)$*,* $Q_n = \mathbb{P}(\overline{E_n})$*.*
On suppose que : $P_1 = a$ *est donné et que si le jour* n *le professeur oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité* $\dfrac{1}{10}$ *; si le jour* n *il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité* $\dfrac{4}{10}$*. Montrer que :*

1. $P_{n+1} = \dfrac{1}{10}P_n + \dfrac{4}{10}Q_n$
2. *En déduire une relation entre* P_{n+1} *et* P_n*.*
3. *Quelle est la probabilité de l'événement ń le jour* n*, le professeur oublie ses clés ż ?*

Solution de l'exercice 13 *: Cours*