Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Statistiques et Analyse des Données

TD 02

Exercice 1 *On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(X = k) = ka.$$

1. *Déterminer la loi de X, calculer son espérance.*
2. *On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y, et son espérance et variance.*

Solution de l'exercice 1 :

1. *X prend ses valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$. Par hypothèse, il existe un réel positif a tel que :*

$$\mathbb{P}(X = k) = ka.$$

Puisque $\mathbb{P}_X$ est une loi de probabilité, on a :

$$\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$

alors

$$\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} ka = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{21}.$$

Par conséquent

k	1	2	3	4	5	6
$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

L'espérance de X : *D'après la définition 2.9, page 19 on a :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + 3 \times \frac{3}{21} + 4 \times \frac{4}{21} + 5 \times \frac{5}{21} + 6 \times \frac{6}{21} \\
&= \frac{91}{21} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

2. *On remarque que :*
$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$
d'après la définition 2.3 et la définition 2.4, page 18 on remarque que X *est une variable aléatoire discrète, de plus d'après la proposition 2.3, page 20 la variable* $Y = \frac{1}{X}$ *est aussi une variable aléatoire discrète.*
Comme la variable X *prend ses valeurs dans* $\{1,2,3,4,5,6\}$*, alors la variable* Y *prend ses valeurs dans*
$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$$
et
$$\mathbb{P}(Y = \frac{1}{k}) = \mathbb{P}(X = k), \quad k \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$
Par suite

$\frac{1}{k}$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$\mathbb{P}(Y = \frac{1}{k})$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

L'espérance de Y : *Si on pose* $Y = g(X) = \frac{1}{X}$*, d'apès la la proposition 2.3, page 20 on a :*
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{6} g(k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\mathbb{P}(X = k)$$
ou bien tout simplement
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\mathbb{P}(Y = \frac{1}{k})$$
Par suite
$$\mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{1}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{21} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{21} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{21} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{21} + \frac{1}{6} \times \frac{6}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$
La variance de Y : *D'après la proposition 2.5, page 20, on a :*
$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mathbb{P}(Y = \frac{1}{k}) - \mathbb{E}(Y)^2$$
on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mathbb{P}(Y = \frac{1}{k}) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{21} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{21} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{3}{21} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{4}{21} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{5}{21} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{6}{21} \\ &= 0.1166\end{aligned}$$
Par suite
$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 0.1166 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 0.0349$$

Exercice 2 *Soit* X *une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par*

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$p_X(x)$	*0.1*	*0.3*	*0.4*	*0.1*	*0.05*	*0.05*

1. *Calculer l'espérance et la variance de* X.
2. *Déterminer et représenter la fonction de répartition de* X
3. *Calculer les probabilités* $\mathbb{P}(X < 4), \mathbb{P}(X > 2), \mathbb{P}(3 < X \leq 4.5), \mathbb{P}(2 \leq X < 4), \mathbb{P}(2 < X < 4)$.
4. *Soit* $Y = 3X - 5$. *Calculer* $\mathbb{E}(Y)$ *et* $Var(Y)$.

Solution de l'exercice 2 *:*

1. *D'après la définition 2.4, page 18 On a :*

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

par suite la variable aléatoire réelle X *est discrète. Donc d'après la définition 2.6, page 19 on a :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_X(k) = \sum_{k=0}^{5} k p_X(k)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{5} k p_X(k) \\ &= 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.05 + 5 \times 0.05 \\ &= 1.85.\end{aligned}$$

2. *D'après le théorème 2.3, page 19. On a : pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k).$$

alors,

— *Pour* $x < 0$, *on a :*

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k) = \sum_{k<0} p_X(k) = 0,$$

puisque, si $k < 0$ *, alors* $k \notin X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *et donc* $p_X(k) = 0$ *d'après la définition 2.5, page 18.*

— *Pour* $0 \leq x < 1$, *on a :*

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k) = \sum_{k<1} p_X(k) = p_X(0) = 0.1$$

— *Pour* $1 \leq x < 2$, *on a :*

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k) = \sum_{k<2} p_X(k) = \sum_{k=0}^{1} p_X(k) = p_X(0) + p_X(1) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

— *Pour* $2 \leq x < 3$, *on a :*

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k) = \sum_{k<3} p_X(k) = \sum_{k=0}^{2} p_X(k) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 0.1 + 0.3 + 0.4 = 0.8$$

— *Pour* $3 \leq x < 4$*, on a :*

$$\begin{aligned}F_X(x) = \sum_{k\leq x} p_X(k) &= \sum_{k<4} p_X(k)\\ &= \sum_{k=0}^{3} p_X(k)\\ &= p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)+p_X(3)\\ &= 0.1+0.3+0.4+0.1\\ &= 0.9\end{aligned}$$

— *Pour* $4 \leq x < 5$*, on a :*

$$\begin{aligned}F_X(x) = \sum_{k\leq x} p_X(k) &= \sum_{k<5} p_X(k)\\ &= \sum_{k=0}^{4} p_X(k)\\ &= p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)+p_X(3)+p_X(4)\\ &= 0.1+0.3+0.4+0.1+0.05\\ &= 0.95\end{aligned}$$

— *Pour* $5 \leq x$*, on a :*

$$\begin{aligned}F_X(x) = \sum_{k\leq x} p_X(k) &= \sum_{k\leq 5} p_X(k)\\ &= \sum_{k=0}^{5} p_X(k)\\ &= p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)+p_X(3)+p_X(4)+p_X(5)\\ &= 0.1+0.3+0.4+0.1+0.05+0.05\\ &= 1\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0\\ 0.1 & si \quad 0 \leq x < 1\\ 0.4 & si \quad 1 \leq x < 2\\ 0.8 & si \quad 2 \leq x < 3\\ 0.9 & si \quad 3 \leq x < 4\\ 0.95 & si \quad 4 \leq x < 5\\ 1 & si \quad 5 \leq x \end{cases}$$

3. *D'après la définition 2.2, page 17 on a :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(]-\infty, x])\right) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

— $\mathbb{P}(X < 4) =?$

$$\mathbb{P}(X < 4) = \mathbb{P}(X \leq 3) = F_X(3) = 0.9.$$

Ou bien :

$$\mathbb{P}(X < 4) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 0.1 + 0.3 + 0.4 + 0.1 = 0.9.$$

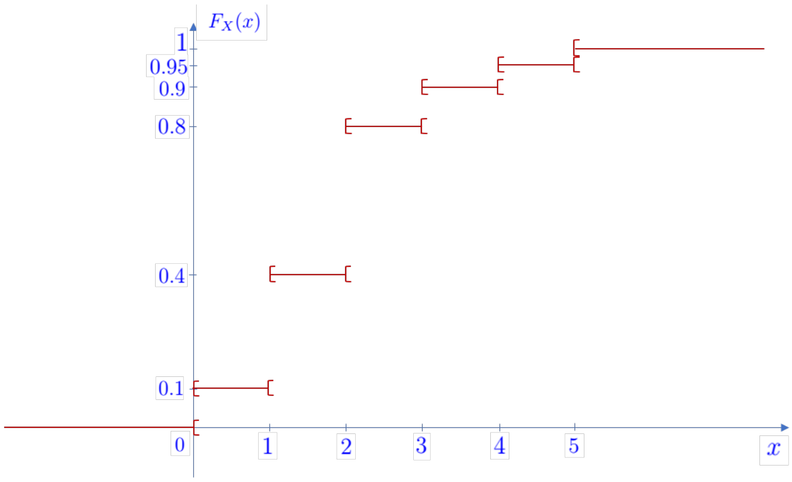

FIGURE 1 – Représentation graphique de F_X

— $\mathbb{P}(X > 2) =?$

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Ou bien :

$$\mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = 0.1 + 0.05 + 0.05 = 0.2.$$

— $\mathbb{P}(3 < X \leq 4.5) =?$
D'après le théorème 2.1, page 17 on a :

$$\mathbb{P}(3 < X \leq 4.5) = \mathbb{P}(3 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(3) = 0.95 - 0.9 = 0.05.$$

Ou bien :

$$\mathbb{P}(3 < X \leq 4.5) = \mathbb{P}(X = 4) = 0.05.$$

— $\mathbb{P}(2 \leq X < 4) =?$
D'après le théorème 2.1, page 17 On a :

$$\mathbb{P}(2 \leq X < 4) = F_X(4) - F_X(2) - \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.95 - 0.8 - 0.05 + 0.4 = 0.5.$$

Ou bien :

$$\mathbb{P}(2 \leq X < 4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 0.5.$$

— $\mathbb{P}(2 < X < 4) =?$
D'après le théorème 2.1, page 17 On a :

$$\mathbb{P}(2 < X < 4) = F_X(4) - F_X(2) - \mathbb{P}(X = 4) = 0.95 - 0.8 - 0.05 = 0.1.$$

Ou bien :

$$\mathbb{P}(2 < X < 4) = \mathbb{P}(X = 3) = 0.1.$$

4. On pose $Y = g(X) = 3X - 5$,
L'espérance de Y : *D'après la la proposition 2.3, page 20 on a :*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^{5} g(k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{5} (3k - 5)\mathbb{P}(X = k)$$

alors :

$$\mathbb{E}(Y) = (-5)\times 0.1 + (-2)\times 0.3 + 1\times 0.4 + 4\times 0.1 + 7\times 0.05 + 10\times 0.05 = 0.55$$

La variance de Y : *D'après la proposition 2.5, page 20, on a :*

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=0}^{5}(3k-5)^2\mathbb{P}(X=k)\\ &= (-5)^2\times 0.1 + (-2)^2\times 0.3 + 1^2\times 0.4 + 4^2\times 0.1 + 7^2\times 0.05 + 10^2\times 0.05\\ &= 13.15\end{aligned}$$

Par suite

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 13.15 - 0.55^2 = 12.8475$$

Exercice 3 *On vous propose le jeu suivant. Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser* $1DA$*. On jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne* $1DA$*. Enfin, si les dés présentent deux fois le même chiffre pair, on gagne une somme égale à la somme de ces deux chiffres, par exemple on gagne* $8DA$ *si on fait un double quatre. Joueriez-vous à ce jeu ?*

Solution de l'exercice 3 *: On note par* X *la variable aléatoire représentant le gain obtenu dans ce jeu. Alors les valeurs possibles pour le gain sont* $\{-1,0,3,7,11\}$*, donc*

$$X(\Omega) = \{-1,0,3,7,11\}.$$

Pour répondre à la question de cet exercice, on calcule $\mathbb{E}(X)$*, c-à-d on cherche à calculer le gain moyen de cet jeu.*
d'abord, on détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$p_X(k), k\in\{-1,0,3,7,11\}$$

en effet,

1.
$$\begin{aligned}p_X(-1) &= \mathbb{P}(X=-1)\\ &= \mathbb{P}(\textit{au moins un dé impair})\\ &= 1-\mathbb{P}(\textit{deux dés pairs})\\ &= 1-\mathbb{P}(\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\})\\ &= 1-\frac{9}{36}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}p_X(0) &= P(X=0)\\ &= \mathbb{P}(\textit{deux chiffres pairs différents})\\ &= P(\{(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(4,6),(6,4)\})\\ &= \frac{6}{36}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} p_X(3) &= P(X=3) \\ &= P(\{(2,2)\}) \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} p_X(7) &= P(X=7) \\ &= P(\{(4,4)\}) \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} p_X(11) &= P(X=11) \\ &= P(\{(6,6)\}) \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Finalement

k	-1	0	3	7	11
$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

On a alors

$$\mathbb{E}(X) = -1 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{36} + 7 \times \frac{1}{36} + 11 \times \frac{1}{36} = -\frac{1}{6} < 0.$$

Conclusion *: En moyenne, le joueur est donc perdant !*

Exercice 4 *L'oral d'un concours comporte au total* 100 *sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé* 60 *sujets sur les* 100*. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de sujets révisés parmi les 3 sujets choisis*

1. *En utilisant la variable aléatoire X, quelle est la probabilité des événements suivants :*
   - *A : « les trois sujets tirés ont été révisés » ;*
   - *B : « exactement deux des trois sujets tirés ont été révisés » ;*
   - *C : « aucun des trois sujets ».*
2. *Donner la loi de probabilité de X*
3. *Calculer l'espérance et la variance de X.*
4. *Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X*

Solution de l'exercice 4 *:*

1. — $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X=3) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\mathcal{C}_3^{60}}{\mathcal{C}_3^{100}} \simeq 0.212$

   — $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{\mathcal{C}_2^{60}\mathcal{C}_1^{40}}{\mathcal{C}_3^{100}} \simeq 0.438$

— $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X=0) = \dfrac{\mathcal{C}_3^{40}}{\mathcal{C}_3^{100}} \simeq 6.110 \times 10^{-2}$

2. *On a : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$. Donc la loi de probabilité de X sur le support $\{0,1,2,3\}$ est donnée par :*

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\mathcal{C}_k^{60}\mathcal{C}_{3-k}^{40}}{\mathcal{C}_3^{100}}$$

Par suite :

k	*0*	*1*	*2*	*3*
$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k)$	6.110×10^{-2}	0.289	0.438	0.212

3. ***L'espérance de X :*** *D'après la définition 2.6, page 19 on a :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} kp_X(k) = \sum_{k=0}^{5} kp_X(k)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{3} kp_X(k)\\ &= 0\times 6.110\times 10^{-2} + 1\times 0.289 + 2\times 0.438 + 3\times 0.212\\ &= 1.801.\end{aligned}$$

La variance de X : *D'après la proposition 2.5, page 20, on a :*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{3} k^2 p_X(k)\\ &= 0^2\times 6.110\times 10^{-2} + 1^2\times 0.289 + 2^2\times 0.438 + 3^2\times 0.212\\ &= 3.949\end{aligned}$$

Par suite

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3.949 - 1.801^2 = 0.7054$$

4. *D'après le théorème 2.3, page 19. On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F_X(x) = \sum_{k\leq x} p_X(k).$$

alors,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0\\ p_X(0) \simeq 6.110\times 10^{-2} & si \quad 0\leq x<1\\ p_X(0)+p_X(1) \simeq 0.350 & si \quad 1\leq x<2\\ p_X(0)+p_X(1)+p_X(2) \simeq 0.788 & si \quad 2\leq x<3\\ p_X(0)+p_X(1)+p_X(2)+p_X(3) \simeq 1 & si \quad 3\leq x\end{cases}$$

voir l'exercice 02 pour plus de détail.
Par suite

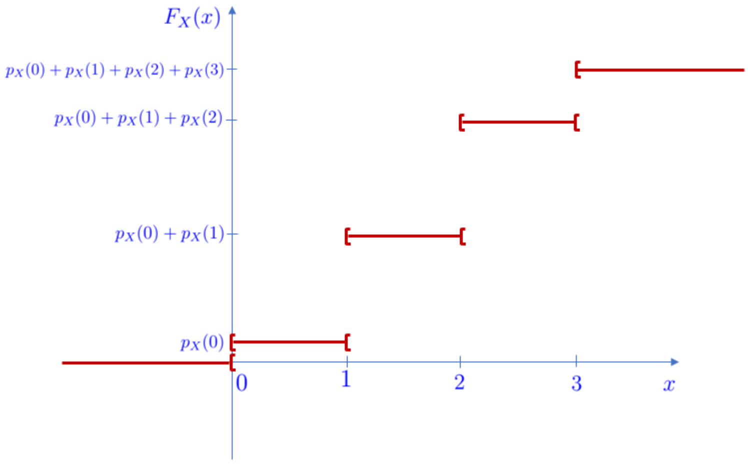

FIGURE 2 – Représentation graphique de F_X

Exercice 5 *Une urne contient* 6 *boules blanches et* n *boules rouges (*n *est un nombre entier tel que* $n \geq 2$*) toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2DA, et pour chaque boule rouge, il perd 3DA. On appelle* X *la variable aléatoire donnant le gain du joueur.*

1. *Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre* X *?*
2. *Montrer que :* $\mathbb{P}(X=-1) = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$.
3. *Déterminer la loi de probabilité de* X.
4. *Montrer que* $\mathbb{E}(X) = \dfrac{-6(n^2+n-20)}{(n+6)(n+5)}$.
5. *Discuter selon la valeur de* n *de l'intérêt de jouer à ce jeu.*

Solution de l'exercice 5 *:*

1. *La variable aléatoire* X *peut prendre les valeurs suivantes :*
   (a) -6, *si on tire deux boules rouges.*
   (b) -1, *si on tire une boule rouge et une boule blanche.*
   (c) $+4$, *si on tire deux boules blanches.*

   Par suite :
   $$X(\Omega) = \{-6, -1, 4\}$$
2. *Puisque le tirage est simultané et sans remise, on utilise les arrangements.*
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=-1) &= \mathbb{P}(\{\textit{tiré une boule blanche et une boule rouge}\}) \\ &= \frac{\mathcal{C}_2^1 \mathcal{A}_6^1 \mathcal{A}_1^n}{\mathcal{A}_{n+6}^2} \\ &= \frac{12n}{(n+6)(n+5)}\end{aligned}$$

3. —

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=-6) &= \mathbb{P}(\{\textit{tiré deux boules rouges}\})\\ &= \frac{\mathcal{A}_n^2}{\mathcal{A}_{n+6}^2}\\ &= \frac{n(n-1)}{(n+6)(n+5)}\end{aligned}$$

—

$$\mathbb{P}(X=-1) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

—

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=4) &= \mathbb{P}(\{\textit{tiré deux boules blanches}\})\\ &= \frac{\mathcal{A}_6^2}{\mathcal{A}_{n+6}^2}\\ &= \frac{30}{(n+6)(n+5)}\end{aligned}$$

Par suite :

k	-6	-1	4
$p_X(k)=\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+5)}$	$\frac{12n}{(n+6)(n+5)}$	$\frac{30}{(n+6)(n+5)}$

4. ***L'espérance de X :*** *On a :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} kp_X(k)$$

Alors,

$$\mathbb{E}(X) = -6\times\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+5)} - 1\times\frac{12n}{(n+6)(n+5)} + 4\times\frac{30}{(n+6)(n+5)} = \frac{-6(n^2+n-20)}{(n+6)(n+5)}.$$

5. *on a :*
   - *Si* $\mathbb{E}(X)<0$, *alors le jeu est défavorable.*
   - *Si* $\mathbb{E}(X)=0$, *alors le jeu est équitable.*
   - *Si* $\mathbb{E}(X)>0$, *alors le jeu est favorable.*

   d'après l'énoncé de l'exercice $n\geq 2$, *donc l'équation* $-6(n^2+n-20)$ *est nulle pour* $n=4$, *strictement positive pour* $2\leq n<4$ *et strictement négative pour* $n>4$. *Finalement*
   - *Pour* $n>4$, *on a :* $\mathbb{E}(X)<0$, *alors le jeu est défavorable.*
   - *Pour* $n=4$, *on a :* $\mathbb{E}(X)=0$, *alors le jeu est équitable.*
   - *pour* $n=2$ *ou* $n=3$, *on a :* $\mathbb{E}(X)>0$, *alors le jeu est favorable.*

Exercice 6 *Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes notées A et B. On admettra que 5% des appareils sont concernés par la panne A, 3% par la panne B et 1% par les deux. On prélève au hasard un appareil dans la production. On note :*

— *A l'événement : "L'appareil présente la panne A."*

— *B l'événement : "L'appareil présente la panne B."*

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200€. La réparation d'une panne A coûte 60€ à l'entreprise, la réparation d'une panne B coûte 40€ et la réparation des deux pannes coûte 100€. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1. *Établir le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*
2. *Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X. Interpréter.*

Solution de l'exercice 6 :

1. *La variable aléatoire X peut prendre les valeurs suivantes :* $200, 240, 260$ *et* 300*, alors :*

$$X(\Omega) = \{200, 240, 260, 300\}$$

(a) *D'après l'exercice on a :*

— *A l'événement : "L'appareil présente la panne A", avec* $\mathbb{P}(A) = 0.05$

— *B l'événement : "L'appareil présente la panne B", avec* $\mathbb{P}(B) = 0.03$

— $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.01$

alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 200) &= \mathbb{P}(\{\textit{L'appareil ne présente ni la panne A ni la panne B}\}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)] \\
&= 1 - (0.05 + 0.03 - 0.01) \\
&= 0.93
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 240) &= \mathbb{P}(\{\textit{L'appareil présente seulement la panne B}\}) \\
&= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 0.03 - 0.01 \\
&= 0.02
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 260) &= \mathbb{P}(\{\textit{L'appareil présente seulement la panne A}\}) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 0.05 - 0.01 \\
&= 0.04
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 300) &= \mathbb{P}(\{\textit{L'appareil présente la panne A et la panne B}\}) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 0.01
\end{aligned}$$

Finalement la loi de probabilité de X est :

k	200	240	260	300
$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$	0.93	0.02	0.04	0.01

2. ***L'espérance de X :*** *On a :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k p_X(k)$$

Alors,

$$\mathbb{E}(X) = 200 \times 0.93 + 240 \times 0.02 + 260 \times 0.04 + 300 \times 0.01 = 204.2.$$

L'interprétation : *le prix de revient moyen d'un appareil se rapproche de 204 €.*

Exercice 7 *Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.*

1. *Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.*
2. *Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.*
3. *Calculer l'espérance de X.*

Solution de l'exercice 7 *:*

1. *On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ La fonction f est positive et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx = \left[-(1-x)^{4/3}\right]_0^1 = 1,$$

D'après le chapitre 02, la proposition 2.8 page 21 , la fonction f est bien une densité de probabilité.

2. *D'après le chapitre 02 la définition 2.10 page 21, La fonction de répartition de X, $F_X(x)$ est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{4}{3}(1-t)^{1/3} = \left[-(1-t)^{4/3}\right]_0^x = 1-(1-x)^{4/3} & si \quad x \in [0,1] \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Son graphe est le suivant :

3. D'après le chapitre 02, définition 2.11 page 22 on a : l'espérance de X est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \int_0^1 x\frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx$$

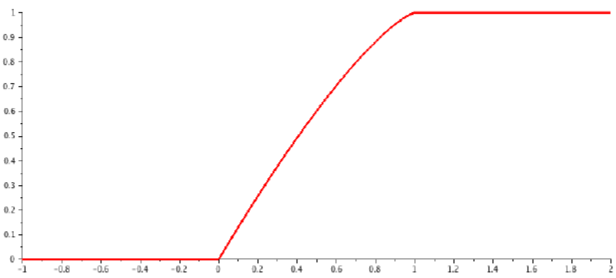

FIGURE 3 – Représentation graphique de F_X

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \left[x\times(-(1-x)^{4/3})\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^{4/3}dx \\ &= 0 + \left[-\frac{3}{7}\times(1-x)^{7/3}\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

Exercice 8 *Mêmes questions de l'exercice précédent (Ex.07) pour les fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = \begin{cases} 1+x & si \quad x\in[-1,0] \\ 1-x & si \quad x\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases} \quad , f_2(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Solution de l'exercice 8 *:*

1. $f_1(x) = \begin{cases} 1+x & si \quad x\in[-1,0] \\ 1-x & si \quad x\in[0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

   (a) *On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ La fonction f_1 est positive et on a*

   $$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)dx = \int_{-1}^0 (1+x)dx + \int_0^1 (1-x)dx = \left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,$$

   D'après le chapitre 02, la proposition 2.8 page 21 , la fonction f_1 est bien une densité de probabilité.

   (b) *D'après le chapitre 02 la définition 2.10 page 21, La fonction de répartition de X, $F_X(x)$ est donnée par :*

   $$\forall x\in\mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

   alors

   $$F_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x\leq -1 \\ \displaystyle\int_{-1}^x (1+t)dt = \left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^x = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} & si \quad x\in[-1,0] \\ \displaystyle\int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^x (1-t)dt = \frac{1}{2}+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2 & si \quad x\in[0,1] \\ 1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

la représentation graphique. voir ex. 07.
3. D'après le chapitre 02, définition 2.11 page 22 on a : l'espérance de X est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \\
&= \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. $f_2(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

(a) *On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ La fonction f_2 est positive et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$$

Remarquons que f_2 est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^x + 1$, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_2(x)dx &= \int_a^b \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx \\
&= \int_a^b (e^x+1)'(e^x+1)^2 \\
&= \left[\frac{-1}{e^x+1}\right]_a^b \\
&= \frac{-1}{e^b+1} + \frac{1}{e^a+1}
\end{aligned}$$

On fait tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx = 1$$

D'après le chapitre 02, la proposition 2.8 page 21 , la fonction f_2 est bien une densité de probabilité.

(b) *D'après le chapitre 02 la définition 2.10 page 21, La fonction de répartition de X, $F_X(x)$ est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

alors, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt = \left[\frac{-1}{e^t+1}\right]_{-\infty}^{x} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$$

la représentation graphique. voir ex. 07.
3. D'après le chapitre 02, définition 2.11 page 22 on a : l'espérance de X est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$$

en effectuant une intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_a^b x\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx &= \left[\frac{-x}{(e^x+1)} + x - ln(e^x+1)\right]_a^b \\ &= \left[\frac{-b}{(e^b+1)} + b - ln(e^b+1)\right] - \left[\frac{-a}{(e^a+1)} + a - ln(e^a+1)\right]\end{aligned}$$

On fait tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, on trouve :

$$\int_a^b x\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = 0$$

en effet :

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-b}{(e^b+1)} + b - ln(e^b+1)\right] = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-b}{(e^b+1)} - ln(\frac{e^b}{e^b+1})\right] = 0$$

et

$$\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{-a}{(e^a+1)} + a - ln(e^a+1)\right] = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{ae^a}{(e^a+1)} - ln(e^a+1)\right] = 0$$

donc :

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

Exercice 9 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.*

1. *Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X*
2. *Déterminer la fonction de répartition de X.*
3. *Calculer l'espérance de X.*
4. *On pose $Y = 2X + 1$.*
   (a) *Déterminer la fonction de répartition de Y.*
   (b) *Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y.*
   (c) *Reprendre les mêmes questions avec $Y = X^2$.*

Solution de l'exercice 9 *:*

1. *La fonction f est positive, de plus*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^t dt = \lim_{x\to-\infty}\left[e^t\right]_x^0 = 1$$

alors f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2.
$$F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t dt = e^x & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

3. *On a :*
$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^x dx = \int_{-\infty}^{0} xe^x dx$$
Par intégration par parties on trouve :
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} xe^x dx &= [xe^x]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^x \\ &= 0 - [e^x]_{-\infty}^{0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

4. *On pose* $Y = 2X + 1$
   (a) *On a :*
   $$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x), \quad t \in \mathbb{R}.$$
   soit $x \in \mathbb{R}$, *on a :*
   $$Y \leq x \Leftrightarrow 2X + 1 \leq x \Leftrightarrow X \leq (x-1)/2.$$
   Alors,
   $$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X \leq (x-1)/2).$$
   Ainsi,
   $$F_Y(t) = F_X((x-1)/2) = e^{(x-1)/2}, \quad si \quad x < 1$$
   et
   $$F_Y(t) = 1, \quad si \quad x \geq 1$$
   (b) *La fonction de répartition* F_Y *est dérivable sauf en* 1. *On en déduit que* Y *admet une densité donnée, pour* $x \neq 1$, *par* $f(x) = F_Y'(x)$.
   Alors, on a :
   $$f(x) = \frac{1}{2}e^{(x-1)/2}, si \quad x < 1, \quad et \quad f(x) = 0, si \quad x \geq 1.$$
   (c) *On reproduit la même démarche. On a*
   $$Y \leq x \Leftrightarrow X^2 \leq x.$$
   Ainsi, si $x < 0$, *on a* $F_Y(x) = 0$. *Si* $x \geq 0$, *on a :*
   $$Y \leq x \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq X \leq 0$$
   puisque X *est à valeur dans* $\mathbb{R}_-$ *(d'après la définition de la densité de* X*). On en déduit que*
   $$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < -\sqrt{x}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{x}) \\ &= 1 - F_X(-\sqrt{x}) \\ &= 1 - e^{-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$
   on détermine la densité de Y *en dérivant cette fonction de répartition. Ainsi,* Y *admet pour densité*
   $$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}, si \quad t \geq 0, \quad et \quad f(x) = 0, sinon$$

Exercice 10 *Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité*

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & si \quad x \in]0,1[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Déterminer c.*
2. *Quelle est la fonction de répartition de X*
3. *La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5}?*

Solution de l'exercice 10 *:*

1. *puisque f est une densité de probabilité, alors on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 c(1-x)^4 dx \\ &= \left[\frac{-c}{5}(1-x)^5\right]_0^1 \\ &= \frac{c}{5} = 1 \end{aligned}$$

On a donc $c = 5$.

2. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \int_0^x 5(1-t)^4 dt = \left[-(1-t)^5\right]_0^x = 1-(1-x)^5 & si \quad x \in]0,1[\\ 1 & si \quad x \geq 1. \end{cases}$$

3. *quand la demande d'essence (X) soit supérieure au capacité de réservoir (x), dans ce cas le réservoir soit épuiser, autrement dit, on cherche à calculer*

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq 10^{-5}$$

et puisque :

$$\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X < x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$$

car dans le cas continu $\mathbb{P}(X = x) = 0$ voir proposition 2.9, page 21. Alors

$$1 - \mathbb{P}(X \leq x) \leq 10^{-5} \Leftrightarrow 1 - F_X(x) \leq 10^{-5}$$

ceci est équivalent que :

$$(1-x)^5 \leq 10^{-5} \Leftrightarrow 1 - x \leq 10^{-1} \Leftrightarrow x \geq 0.9$$

et puisque la demande est en milliers de litres d'après l'exercice, alors le réservoir doit contenir au moins 900 litres.

Exercice 11 *La fonction de densité de X, variable aléatoire représentant la durée de vie en heures d'un certain composant électronique, est donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10. \end{cases}$$

1. *Trouver $\mathbb{P}(X > 20)$.*
2. *Quelle est la fonction de répartition de X ?*
3. *Soit Y la variable aléatoire qui décrit le nombre de composants k fonctionnant au moins 15 heures parmi n composants, de la loi de probabilité suivante*

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathcal{C}_k^n p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \leq n$$

   avec p est la la probabilité qu'un composant fonctionne au moins 15 *heures*
   (a) *Quelle est la probabilité que parmi 6 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins* 15 *heures ?*
4. *Calculer $\mathbb{E}(X)$.*

Solution de l'exercice 11 *:*

1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 20) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 20) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{20} f(x)dx \\ &= 1 - \int_{10}^{20} \frac{10}{x^2}dx \\ &= 1 - \left[\frac{-10}{x}\right]_{10}^{20} \\ &= 1 - 0.5 \\ &= 0.5\end{aligned}$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 10 \\ \displaystyle\int_{10}^{x} \frac{10}{t^2}dt = \left[\frac{-10}{t}\right]_{10}^{x} = 1 - \frac{10}{x} & si \quad x > 10 \end{cases}$$

3. (a) *on calcul en premier la la probabilité qu'un composant fonctionne au moins* 15 *heures, c-à-d p :*

$$p = \mathbb{P}(X \geq 15) = 1 - F_X(15) = 1 - 1 + \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

alors la probabilité que parmi 6 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins

15 heures est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq 3) &= \sum_{k=3}^{6} \mathbb{P}(Y = k)\\ &= \sum_{k=3}^{6} C_k^6 p^k (1-p)^{6-k}\\ &= \sum_{k=3}^{6} C_k^6 \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}\\ &= \frac{656}{729}\\ &\simeq 0.90\end{aligned}$$

4.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{10}^{+\infty} \frac{10}{x} dx = [10 \ln x]_{10}^{+\infty} = +\infty,$$

Donc X n'admet pas d'espérance

Exercice 12 *La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en 1 journée est une variable aléatoire X de fonction de densité*

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Calculer la valeur de c.*
2. *Quelle est la fonction de répartition de X ?*
3. *Soit A l'évènement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur à 300 kg ». Soit B l'évènement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 150 et 450 kg ». Les évènements sont-ils indépendants.*

Solution de l'exercice 12 :

1. *puisque f est une densité de probabilité de X, alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{0}^{3} cxdx + \int_{3}^{6} c(6-x)dx\\ &= \left[\frac{1}{2}cx^2\right]_0^3 + \left[c(6x - \frac{1}{2}x^2)\right]_3^6\\ &= \frac{9}{2}c + \frac{9}{2}c\\ &= 9c = 1\\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

2. — *Pour* $0 \leq x \leq 3$, *on a :*
$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{9} dt = \frac{x^2}{18}$$
— *Pour* $3 \leq x \leq 6$, *on a :*
$$F_X(x) = \int_0^3 \frac{t}{9} dt + \int_3^x \frac{6-t}{9} dt = \frac{1}{2} + \frac{6x - \frac{1}{2}x^2}{9} - \frac{3}{2} = \frac{-1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x - 1.$$
On obtient alors la fonction de répartition
$$FX(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{18} & 0 \leq x < 3 \\ -1 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x & 3 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

3. *Les évènements* A *et* B *sont indépendants si*
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$
On calcule les 3 termes pour vérifier la dernière égalité :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - F_X(3) = \frac{1}{2},$$
puis
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(1,5 \leq X \leq 4,5) = F_X(4,5) - F_X(1,5) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4},$$
et finalement
$$\mathbb{P}(A \cap B) = P(3 \leq X \leq 4,5) = F_X(4,5) - F_X(3) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$
On vérifie donc bien que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 3/8 = \mathbb{P}(A \cap B)$, *ce qui signifie que les 2 évènements sont indépendants.*