Université Batna 2, MI, Algèbre I

Corrigé de l'interrogation 1 (2019-2020) Gr 14

.

1: Soient P et Q deux propositions (assertions). Montrer, par la table de vérité, que

$$\left[P \vee \left(\overline{P} \wedge Q\right)\right] \Longleftrightarrow [P \vee Q].$$

Réponse (2pts) : On note que

$$\text{le nombre de cas} = 2^{nombre \text{ de propositions}} = 2^{deux\ propositions\ P\ et\ Q} = 2^2 = 4.$$

Ainsi

P	V	F	V	F
Q	V	F	F	V
$\overline{P}$	F	V	F	V
$\overline{P} \wedge Q$	F	F	F	V
$P \vee \left(\overline{P} \wedge Q\right)$	V	F	V	V
$P \vee Q$	V	F	V	V
$\left[P \vee \left(\overline{P} \wedge Q\right)\right] \Longleftrightarrow [P \vee Q]$	V	V	V	V

BONUS : Utiliser une autre manière pour montrer l'équivalence précédente.

Réponse *(1pt)*: *Rappellons, au début, que la tautologie est la proposition qui est toujours vraie, on l'a note par T.*

On a

$$\begin{aligned}
& \left[P \vee \left(\overline{P} \wedge Q\right)\right] \\
\Longleftrightarrow\ & \left[\left(P \vee \overline{P}\right) \wedge (P \vee Q)\right] \text{ La disjonction } \vee \text{ est distributive par rapport à la conjonction } \wedge \\
\Longleftrightarrow\ & [T \wedge (P \vee Q)] \text{ Propriètè de la tautologie (pour toute proposition } P \text{ on a } \left(P \vee \overline{P}\right) \Longleftrightarrow T\ ) \\
\Longleftrightarrow\ & [P \vee Q] \text{ Propriété de la taupologie (pour toute proposition } P \text{ on a } (T \wedge P) \Longleftrightarrow P\ )
\end{aligned}$$

....

2: Considérons la proposition suivante:

$$P : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y.$$

– Montrer que P est fausse

Réponse (0,5pt) : P est fausse car pour $x = 1$ et $y = 4$ on a $x = 1 \ngeq 4 = y$. (On peut donner d'autres exemples de x et y de facons que $x \ngeq y$).

– Donner la négation de P.

Réponse (0,5pt) : La négation de P est

$$\overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y.$$

– Déterminer (en justifiant) la valeur de vérité de cette dernière proposition.

Réponse (0,5pt): $\overline{P}$ est vraie car P est fausse.

....

3: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Traduire en Mathématique la phrase suivante: f est une fonction positive.

Réponse (1pt): f est une fonction positive veut dire, Mathématiquement, que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0.$$

....

4: Complète: Si on veut montrer, **par l'absurde,** que la proposition P est vraie alors

a/ ....

Puis

b/..........................

Réponse (0,5pt +0,5pt) : Si on veut montrer, **par l'absurde,** que la proposition P est vraie alors

a/ On suppose que P est fausse.

Puis

b/ On cherche à trouver une contradiction.

....

5: (0,25pt +0,25pt) Présentation de la copie et écriture du numéro de groupe.

....

Corrigé de l'interrogation 1 (2019-2020) G16

.

1: Soient P et Q deux propositions (assertions). Ecrire la table de vérité de la proposition suivante:

$$(P \wedge Q) \vee \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right).$$

Déterminer la valeur de vérité de cette proposition dans le cas où P est vraie et Q est fausse.

Réponse: (1,5pts+0,5pt) La table de vérité de $(P \wedge Q) \vee \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$ est

P	V	F	V	F
Q	V	F	F	V
$\overline{P}$	F	V	F	V
$\overline{Q}$	F	V	V	F
$P \wedge Q$	V	F	F	F
$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	F	V	F	F
$(P \wedge Q) \vee \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$	V	V	F	F

– Si P est vraie V et Q est fausse F (3 ème colonne) alors $(P \wedge Q) \vee \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$ est fausse F.

....

2: Est ce que la proposition suivante:

$$P : \exists x \geq 0, \exists y \geq 0, x + 2 \geq y.$$

est vraie, justifier.

Donner la négation de P.

Réponse: (0,5pt +0,5pt+0,5pt) Oui, P est vraie car, par exemple, pour $x = 0 \geq 0$ et $y = \frac{1}{2} \geq 0$ on a

$$x + 2 = 0 + 2 = 2 \geq \frac{1}{2} = y.$$

– La négation de P est

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, x + 2 < y.$$

....

3: Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}$. A est un ensemble majoré veut dire

a/ $\exists M \geq 0, \forall x \in A : x \leq M$ **b/** $\forall x \in A, \exists M \geq 0 : x \leq M$ **c/** $\exists M \geq 0, \forall x \in A : M \leq x$

Donner la bonne réponse.

Réponse: (1pt) La bonne réponse est **(a)**.

....

4: Soient P et Q deux propositions. Si on veut montrer, **directement**, que $P \Longrightarrow Q$ est vraie alors

a/ ....

b/..........................

Réponse: (0,5pt +0,5pt)

a/ On suppose que P est vraie (P devient une hypothèse)

b/ On montre Q.

....

5: (0,25pt +0,25pt) Présentation de la copie et écriture du numéro de groupe.

.

....

Corrigé de l'interrogation 2 (2019-2020) Gr 14 et 16

.

.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1: Considérons l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \Box, \Diamond\}$. On pose $A = \{1, 2\}$ et $B = \{0, 1, \Diamond\}$.

a/ Est ce que A est une partie de E, justifier.

Réponse: (0,25pt +0,25pt) Oui, car tout les élements de A sont des élements de E.

b/ Complète par $\subset$ et $\in$:

$$\begin{cases} \{0\} \,.......... \, \{0,1\} \\ 0 \,.......... \, \{0,1\} \end{cases}.$$

Réponse: (0,5pt +0,5pt) $\{0\} \subset \{0, 1\}$ et $0 \in \{0, 1\}$.

c/ Déterminer les ensembles suivants: $A^c, A \cup B, A \cap B, A \triangle B$.

Réponse:

- $A^c \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \{x \in E : x \notin A\} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \{0, \Box, \Diamond\}$
- $A \cup B \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \{x \in E : x \in A \vee x \in B\} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \{0, 1, 2, \Diamond\}$
- $A \cap B \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \{x \in E : x \in A \wedge x \in B\} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \{1\}$
- **(0,5pt)**

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (\{1,2\} \cap \{0,1,\Diamond\}^c) \cup (\{0,1,\Diamond\} \cap \{1,2\}^c) \\ &= (\{1,2\} \cap \{2,\Box\}) \cup (\{0,1,\Diamond\} \cap \{0,\Box,\Diamond\}) \\ &= \{2\} \cup \{0,\Diamond\} = \{0,2,\Diamond\}. \end{aligned}$$

....

2: Soient A et B deux sous ensembles de E. Montrer que

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A.$$

Réponse:

a/ **(1pt)** Montrons que $A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A$: Pour cela, on suppose que $\underbrace{A \subset B}_{HYPOTHESE}$ et on montre que $A \cap B = A$.

– Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x &\in A \cap B \Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Longrightarrow x \in A \end{aligned}$$

Ainsi, $A \cap B \subset A$.........(1)

– Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x &\in A \Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \text{ car } \underbrace{A \subset B}_{HYPOTHESE} \\ &\Longrightarrow x \in A \cap B \end{aligned}$$

Ainsi, $A \subset A \cap B$.........(2)

De (1) et (2), on trouve $A \cap B = A$.

b/ **(1pt)** Montrons que $A \cap B = A \Longrightarrow A \subset B$: Pour cela, on suppose que $\underbrace{A \cap B = A}_{HYPOTHESE}$ et on montre que $A \subset B$.

– Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x &\in A \Longrightarrow x \in A = A \cap B \text{ car } \underbrace{A \cap B = A}_{HYPOTHESE} \\ &\Longrightarrow x \in A \cap B \\ &\Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Longrightarrow (x \in B) \end{aligned}$$

Ainsi, $A \subset B$.

....

3: **(0,25pt +0,25pt)** L'écriture du **numéro de groupe** est obligatoire et l'utilisation du **stylo correcteur** est interdite.