Table des matières

Chapitre 1

Intégrale de Riemann

1.1 Sommes de Darboux et fonctions R-intégrables

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et f une fonction bornée sur $[a, b]$.

Définition 1.1.1 *On appelle subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ *tout ensemble fini* $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *telle que* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Définition 1.1.2 $\|d\| = \max\limits_{i \in \{0,1,...,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)$ *est appelé le pas de la subdivision* d.

Définition 1.1.3 *Si* $\|d\| = \frac{b-a}{n}$ *alors on dit que* d *est une subdivision équidistante de* $[a, b]$.

Exemple 1 $d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *est une subdivision équidistante de* $[1, 5]$. *En effet, on a* $1 = x_0 < x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 4 < x_4 = 5$. *En plus,*

$$\|d\| = \max_{i \in \{0,1,...,3\}} (x_{i+1} - x_i) = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3\} = 1$$

et $\frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$ *donc* $\|d\| = \frac{b-a}{n}$.

Notation 1 *L'ensemble de toutes les subdivisions de l'intervalle* $[a, b]$ *est noté par* $D_{a,b}$.

Remarque 1.1.1 *Soit* $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in D_{a,b}$. *Puisque* f *est bornée sur* $[a, b]$ *alors* $\inf\limits_{[a,b]} f$ *et* $\sup\limits_{[a,b]} f$ *existent. En plus,* f *est bornée sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *avec* $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, *donc* $\inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f$ *et* $\sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f$ *existent.*

Notation 2 *On note par* $m := \inf\limits_{[a,b]} f, M := \sup\limits_{[a,b]} f, m_i := \inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f$ *et* $M_i := \sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f$ *pour tout* $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Lemme 1.1.1 *Pour tout* $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ *on a* $m \leq m_i \leq M_i \leq M$.

Preuve 1 *On a* $\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \subset \{f(x) : x \in [a, b]\}$ *alors* $\inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \leq \inf \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ *et* $\sup \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$ *mais*

$$\begin{aligned} m &: = \inf_{[a,b]} f := \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ et } M = \sup_{[a,b]} f := \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}, \\ m_i &= \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f := \inf \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ et } M_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f := \sup \{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \end{aligned}$$

d'où $m \leq m_i$ et $M_i \leq M$. En plus, on a $m_i \leq M_i$. D'où le résultat.

Définition 1.1.4 *Soit $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in D_{a,b}$.*

1. *$S(f,d) = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$ est appelée somme de Darboux supérieure de f relative à la subdivision d.*
2. *$s(f,d) = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$ est appelée somme de Darboux inférieure de f relative à la subdivision d.*

Exemple 2 *Si $f = C$ (la fonction constante C) et $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in D_{a,b}$. Alors pour tout $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ on a $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f = C$ et $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f = C$ ce qui implique que*

$$S(f,d) = \sum_{i=0}^{i=n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{i=n-1} C (x_{i+1} - x_i) = C \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

et

$$s(f,d) = \sum_{i=0}^{i=n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = C \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Alors, $S(f,d) = s(f,d) = C(b-a)$.

Proposition 1.1.1

1. *Pour tout $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in D_{a,b}$ on a $m(b-a) \leq s(f,d) \leq S(f,d) \leq M(b-a)$.*
2. *L'ensemble $\{s(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$ et $\{S(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ est minoré dans $\mathbb{R}$. (Ainsi $\sup \{s(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ et $\inf \{S(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ existent.)*
3. *Si on note par $s_{a,b}(f) := \sup \{s(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ et $S_{a,b}(f) := \inf \{S(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ alors $s_{a,b}(f) \leq S_{a,b}(f)$.*

Preuve 2 1. *Pour tout* $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ *on a* $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ *alors* $m(x_{i+1} - x_i) \leq m_i(x_{i+1} - x_i) \leq M_i(x_{i+1} - x_i) \leq M(x_{i+1} - x_i)$, *ce qui implique que*

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} m(x_{i+1} - x_i) \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{i=n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)}_{s(f,d)} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{i=n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)}_{S(f,d)} \leq \sum_{i=0}^{i=n-1} M(x_{i+1} - x_i).$$

Mais $\sum_{i=0}^{i=n-1} m(x_{i+1} - x_i) = m \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = m(b-a)$ *et* $\sum_{i=0}^{i=n-1} M(x_{i+1} - x_i) = M \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = M(b-a)$ *alors* $m(b-a) \leq s(f,d) \leq S(f,d) \leq M(b-a)$.

2. *De la propriété précédente, on trouve que* $M(b-a)$ *est un majorant de* $\{s(f,d) : d \in D_{a,b}\}$. *Aussi,* $m(b-a)$ *est un minorant de* $\{S(f,d) : d \in D_{a,b}\}$.

3. *Rappelons le résultat suivant : Soient* $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$. *Si pour tout* $\alpha \in A$ *et* $\beta \in B$, *on a* $\alpha \leq \beta$ *alors* $\sup A \leq \inf B$. *On pose* $A = \{s(f,d) : d \in D_{a,b}\}$ *et* $B = \{S(f,d) : d \in D_{a,b}\}$.*Soient* $d_1, d_2 \in D_{a,b}$. *On a (voir exercice 1)* $\underbrace{s(f,d_1)}_{\alpha} \leq \underbrace{S(f,d_2)}_{\beta}$ *alors* $\sup A \leq \inf B$ *ce qui implique que* $s_{a,b}(f) \leq S_{a,b}(f)$.

Définition 1.1.5 *On dit que* f *est intégrable au sens de Riemann (ou R-intégrable) sur l'intervalle* $[a,b]$ *si* $S_{a,b}(f) = s_{a,b}(f)$. *Cette quantité, notée par* $\int_a^b f(x)\,dx$, *est appelée intégrale de Riemann de* f *sur l'intervalle* $[a,b]$.

Remarque 1.1.2 *La variable* x *n'intervient pas dans la définition de l'intégrale de Riemann, autrement dit* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. *Alors, on dit que* x *est une variable muette.*

Exemple 3 ***(Fonction R-intégrable)*** *Si* $f = C$. *Alors,* $s_{a,b}(f) = \sup\{s(f,d) : d \in D_{a,b}\} = \sup\{C(b-a)\} = C(b-a)$ *et* $S_{a,b}(f) = \inf\{S(f,d) : d \in D_{a,b}\} = \inf\{C(b-a)\} = C(b-a)$. *Alors* $s_{a,b}(f) = S_{a,b}(f)$ *ce qui implique que la fonction constante* C *est R-intégrable sur l'intervalle* $[a,b]$. *En plus, son intégrale de Riemann est* $\int_a^b C\,dx = S_{a,b}(f) = s_{a,b}(f) = C(b-a)$.

Exemple 4 ***(Fonction non R-intégrable)*** *Considèrons la fonction caractéristique des rationnels définie par* $\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ *Soit* $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in D_{a,b}$. *Alors, pour tout* $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, *on a* $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} \chi = 0$ *et* $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} \chi = 1$ *ce qui implique que* $S(\chi, d) = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = b - a$ *et* $s(\chi, d) = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = 0$. *Alors,* $s_{a,b}(\chi) = \sup\{s(\chi, d) : d \in D_{a,b}\} = \sup\{0\} = 0$ *et* $S_{a,b}(\chi) = \inf\{S(\chi, d) : d \in D_{a,b}\} = \inf\{1\} = 1$. *Donc,* $S_{a,b}(\chi) \neq s_{a,b}(\chi)$ *ce qui implique que la fonction* χ *n'est pas R-intégrable sur chaque intervalle* $[a, b]$.

Notation 3 *L'ensemble des fonctions R-intégrables sur* $[a, b]$ *est noté par* $R[a, b]$.

Interprétation géométrique On munit le plan du repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Si f est positive alors $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire du $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$. L'unité d'aire étant celle du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

Définition 1.1.6 *Si* $b < a$ *alors on définit* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *par* $-\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

Définition 1.1.7 *Si* $b = a$ *alors on définit* $\int\limits_a^a f(x)\,dx$ *par* 0.

Théorème 1.1.1 ***(Critère d'intégration)*** *La fonction* $f \in R[a, b]$ *si et seulement si on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists d \in D_{a,b} : S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Preuve 3 *Implication directe : Soit* $\varepsilon > 0$. *On veut trouver* $d \in D_{a,b}$ *telle que* $S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon$. *Puisque* $s_{a,b}(f) = \sup\{s(f, d) : d \in D_{a,b}\}$ *et* $S_{a,b}(f) = \inf\{S(f, d) : d \in D_{a,b}\}$ *alors si on applique la propriété caractéristique de la borne supérieure et inférieure sur* $\frac{\varepsilon}{2}$ *on trouve* $d_1, d_2 \in D_{a,b}$ *qui vérifient* $s_{a,b}(f) < s(f, d_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ *et* $S(f, d_2) - \frac{\varepsilon}{2} < S_{a,b}(f)$. *Mais* f *est R-intégrable sur* $[a, b]$ *donc* $S_{a,b}(f) = s_{a,b}(f)$ *ce qui implique que* $S(f, d_2) - \frac{\varepsilon}{2} < S_{a,b}(f) = s_{a,b}(f) < s(f, d_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ *donc* $S(f, d_2) - s(f, d_1) < \varepsilon$. *Posons maintenant*

$d = d_1 \cup d_2$ alors (voir exercice 1) $s(f,d_1) \leq s(f,d)$ et $S(f,d) \leq S(f,d_2)$. Donc, $S(f,d) - s(f,d) \leq S(f,d_2) - s(f,d_1)$ ce qui implique que $S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon$.

Implication inverse : Au début on rappelle le résultat suivant : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ alors $\alpha = 0$. De (*) on trouve que $S(f,d) < s(f,d) + \varepsilon$ mais $S_{a,b}(f) \leq S(f,d)$ alors $S_{a,b}(f) \leq s(f,d) + \varepsilon$. D'autre part, on a $s(f,d) \leq s_{a,b}(f)$ alors $S_{a,b}(f) \leq s_{a,b}(f) + \varepsilon$ donc $S_{a,b}(f) - s_{a,b}(f) \leq \varepsilon$. C'est à dire on a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $0 \leq \alpha = S_{a,b}(f) - s_{a,b}(f) \leq \varepsilon$ ce qui implique que $S_{a,b}(f) - s_{a,b}(f) = 0$ alors $f \in R[a,b]$.

Théorème 1.1.2 ***(Classes des fonctions R-intégrables)***

1. *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est une fonction R-intégrable sur $[a,b]$.*
2. *Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est une fonction R-intégrable sur $[a,b]$.*

Exemple 5 *Les fonctions usuelles $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $x \longmapsto e^x$, $\cos$ et $\sin$ sont continues sur chaque intervalle $[a,b]$ alors elles sont R-intégrables sur $[a,b]$.*

Exemple 6 *La fonction f définie sur $[1,3]$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 + 1 \text{ si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$ est R-intégrable sur $[1,3]$ car c'est une fonction croissante sur $[1,3]$. (Remarquons que cette fonction n'est pas continue sur $[1,3]$).*

1.2 Théorie de l'intégration de Riemann

Théorème 1.2.1 ***(Opérations sur les fonctions R-intégrables)*** *Soient $f, g \in R[a,b]$. Alors*

1. *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ et $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.*
2. *$f.g \in R[a,b]$.*

Remarque 1.2.1 *Ils existent f et g tel que* $\int\limits_a^b (f.g)(x)\,dx \neq \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right).\left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$. *En effet, si par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}$ on prend $f(x) = g(x) = C \in \mathbb{R}$, alors* $\int\limits_a^b (f.g)(x)\,dx = \int\limits_a^b C^2dx = C^2(b-a)$ *et*

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right) = \left(\int\limits_a^b Cdx\right)\left(\int\limits_a^b Cdx\right) = C^2(b-a)^2.$$

Alors $\int\limits_a^b (f.g)(x)\,dx \neq \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$.

Théorème 1.2.2 ***(Valeur absolue d'une fonction R-intégrable)*** *Soit $f \in R[a,b]$. Alors $|f| \in R[a,b]$ et* $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f|(x)\,dx$.

Théorème 1.2.3 ***(Ordre et fonctions R-intégrables)*** *Soient $f, g \in R[a,b]$. Alors*

1. *Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2. *Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Preuve 4

1. *Soit $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in D_{a,b}$. Puisque $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $m \geq 0$ ce qui implique que pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$ on a $M_i \geq 0$ (car $m \leq M_i$) alors* $S(f,d) = \sum\limits_{i=0}^{i=n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \geq 0$ *donc $\{S(f,d) : d \in D_{a,b}\} \subset \mathbb{R}^+$ donc* $S_{a,b}(f) = \inf\{S(f,d) : d \in D_{a,b}\} \geq \inf \mathbb{R}^+ = 0$ *mais* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = S_{a,b}(f)$ *alors* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2. *On a $g - f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors* $\int\limits_a^b (g-f)(x)\,dx \geq 0$ *mais* $\int\limits_a^b (g-f)(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *ce qui implique que* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Lemme 1.2.1 *Si $f \in R[a,b]$ alors pour tout $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ on a $f \in R[\alpha,\beta]$.*

Théorème 1.2.4 ***(Relation de Chasles)*** *Soit $c \in]a,b[$. Si $f \in R[a,c] \cap R[c,b]$ alors $f \in R[a,b]$ et* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Théorème 1.2.5 ***(de la moyenne)*** *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in]a,b[$ telle que $\int\limits_a^b f(t)\,dt = (b-a)\,f(c)$.*

Preuve 5 *Il suffit de montrer qu'il existent $x, y \in [a,b]$ telle que $\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$ est entre les deux images $f(x)$ et $f(y)$ ce qui implique que $\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$ est une image d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires.*

1.3 Intégration de Riemann et primitives

Définition 1.3.1 *Soit F une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que F est une fonction primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$ si F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$.*

Exemple 7 *La fonction F, définie sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par $F(x) = \arcsin x$, est une primitive sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ de la fonction f, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En effet, on a F est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $F'(x) = (\arcsin)' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.*

Lemme 1.3.1 *Soit F une fonction primitive de f sur $[a,b]$ alors l'ensemble de toutes les primitives de f sur $[a,b]$ est $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$. Les fonctions primitives de f sur $[a,b]$ est noté par $\int f$.*

Preuve 6 *Montrons que $\{E : E$ est une fonction primitive de f sur $[a,b]\} = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$:*

Inclusion directe : Soit E une fonction primitive de f sur $[a,b]$ alors $(E-F)' = E' - F' = f - f = 0$ donc $E - F$ représente la fonction constante alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $E - F = C$ donc $E = F + C$.

Inclusion inverse : Soit $C \in \mathbb{R}$. On a $(F+C)' = F' = f$ alors $F + C$ est une fonction primitive de f sur $[a,b]$

Lemme 1.3.2 *On a $F = \arcsin$ est une fonction primitive de f sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ alors l'ensemble de toutes les primitives de la fonction f donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ est $\{\arcsin + C : C \in \mathbb{R}\}$. Les fonctions primitives de f sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ est $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Lemme 1.3.3 *Si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ alors $\int f' = f + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Preuve 7 *$F_1 = \int f'$ represente les fonctions primitives de f' sur $[a,b]$. D'autre part, $F_2 = f$ est une fonction primitive de f' (car $F_2' = f'$) alors $F_1 = F_2 + C$ d'où le résultat.*

Théorème 1.3.1 ***(Primitive de fonction continue)*** *Toute fonction $f \in C^0([a,b])$ admet une fonction primitive unique F_a qui s'annule au point a. Cette fonction est donnée par $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$.*

Preuve 8 *Soient $x_0 \in \left]a,b\right[$ et $h \in \mathbb{R}$ alors*

$$\begin{aligned}
\frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} &= \frac{\int\limits_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} \\
&= \frac{\left[\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\right] - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} \\
&= \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}.
\end{aligned}$$

Mais, d'aprés le théorème de la moyenne, il existe $c \in \left]x_0, x_0+h\right[$ telle que $\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = [(x_0+h) - x_0]\, f(c)$ ce qui implique que $\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{hf(c)}{h} = f(c)$ donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x_0} f(c) = f(x_0).$$

Ce qui implique que F_a est dérivable sur $\left]a,b\right[$ et $F' = f$ sur $\left]a,b\right[$.

De même on trouve $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{F_a(a+h)-F_a(a)}{h} = f(a)$ et $\lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{F_a(b+h)-F_a(a)}{h} = f(b)$. Ce qui implique que F_a est dérivable à droite de a, à gauche de b, $F_d'(a) = f(a)$ et $F_g'(b) = f(b)$.

Théorème 1.3.2 *Si F est une primitive sur $[a,b]$ de la fonction $f \in C^0([a,b])$ alors $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*

Preuve 9 *Puisque f est continue sur $[a,b]$ alors la fonction F_a définie par* $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *est une fonction primitive de f sur $[a,b]$. D'autre part, puisque F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $F = F_a + C$ ceci implique que* $F(b) = F_a(b) + C = \int\limits_a^b f(x)\,dx + C$ *et* $F(a) = F_a(a) + C = C$ *donc* $C = F(a)$. *Alors* $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + F(a)$ *donc* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Notation 4 *On note par* $F]_a^b := F(b) - F(a)$ *et on dit qu'on prend F entre a et b.*

Corollaire 1.3.1 *Si* $f \in C^1([a,b])$ *alors* $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f]_a^b$.

Preuve 10 *On a $F = f$ est une fonction primitive de f' sur $[a,b]$ et $f' \in C^0([a,b])$ alors* $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = F(b) - F(a) = f(b) - f(a) = f]_a^b$.

Exemple 8 *On a*

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ si } \alpha \neq -1, \\ \ln|x| + C \text{ si } \alpha = -1. \end{cases} \quad et \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

Avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 9 *On a*

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C \quad et \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + C.$$

Avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 10 *On a*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= arc\sin x + C \quad et \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + C. \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad et \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C. \end{aligned}$$

Avec $C \in \mathbb{R}$.

1.4 Méthodes de primitivité et d'intégration de Riemann

1.4.1 Primitivité et intégration par parties

Théorème 1.4.1 *Si* $f, g \in C^1([a,b])$ *alors* $\int fg' = fg - \int f'g$.

Preuve 11 *On a* $(fg)' = f'g + fg'$ *alors* $\int (fg)' = \int f'g + \int fg'$ *mais* $\int (fg)' = fg + C$ *alors* $\int fg' = fg - \int f'g$.

Exemple 11 *Calculons* $I = \int \arcsin x dx$: *On pose* $f(x) = \arcsin x$ *et* $g'(x) = 1$ *alors* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $g(x) = x$. *Donc*

$$I = \int \arcsin x.1dx = \int (fg')(x)\, dx = (fg)(x) - \int (f'g)(x) = x\arcsin x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Mais

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-2x)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

alors $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$. *Donc,* $I = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$, *avec* $C \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1.4.1 ***(Intégration par parties)*** *Si* $f, g \in C^1([a,b])$ *alors* $\int_a^b (fg')(x)\, dx = (fg)(x)]_a^b - \int_a^b (f'g)(x)\, dx$.

Preuve 12 *On pose* $F_1 = \int fg'$ *et* $F_2 = \int f'g$. *Puisque* $\int fg' = fg - \int f'g$ *alors* $F_1 = fg - F_2$. *D'autre part, on a* $\int_a^b (fg')(x)\, dx = F_1(b) - F_1(a)$ *mais* $F_1(b) = (fg)(b) - F_2(b)$ *et* $F_1(a) = (fg)(a) - F_2(a)$ *alors*

$$\int_a^b (fg')(x)\, dx = [(fg)(b) - (fg)(a)] - [F_2(b) - F_2(a)] = (fg)(x)]_a^b - \int_a^b (f'g)(x)\, dx.$$

Exemple 12 *Calculons* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x$: *Puisque la fonction donnée par* $F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ *est une primitive de* $\arcsin$ *alors* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)$. *Mais* $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $F(0) = 0 \arcsin 0 + \sqrt{1-0^2} = 1$ *alors* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

Remarque 1.4.1 *On peut utiliser plusieurs fois de suite la primitivité par parties, par exemple, pour calculer* $I = \int x^2 e^x$ *on utilise la primitivité par parties 2 fois :*

$I = \int f g'$ *avec* $f(x) = x^2$ *et* $g'(x) = e^x$. *Donc* $I = fg - \int f' g = x^2 e^x - 2\int x e^x$ *mais* $\int \underbrace{x}_{h(x)} \underbrace{e^x}_{k'(x)} = xe^x - \int e^x = e^x(x-1) + C$ *alors* $I = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$*,avec* $C \in \mathbb{R}$.

1.4.2 Changement de variable

Théorème 1.4.2 *Soient* $f \in C^0([a,b])$ *et* φ *une fonction bijective de classe* $C^1([a,b])$. *Alors* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$

Preuve 13 *Posons* $x = \varphi(t)$ *alors*

1. *Si* $x = a$ *alors* $t = \varphi^{-1}(a)$ *et si* $x = b$ *alors* $t = \varphi^{-1}(b)$.
2. $x = \varphi(t)$ *alors* $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ *donc* $dx = \varphi'(t)\,dt$.

D'où le résultat.

Applications

Calculons $I_1 = \int\limits_0^1 x e^{x^2} dx$ et $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

1. Dans I_1 : On pose $t = x^2$ alors
   (a) Si $x = 1$ alors $t = 1^2 = 1$ et si $x = 0$ alors $t = 0^2 = 0$.
   (b) $dt = 2xdx$ donc $xdx = \frac{1}{2}dt$. Alors

$$I_1 = \int\limits_{x=0}^{x=1} x e^{x^2} dx = \int\limits_{x=0}^{x=1} e^{x^2}(xdx) = \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{t=1} e^t dt = \frac{1}{2} \left. e^t \right|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.$$

2. Dans I_2 : On pose $t = \tan x$ alors

   (a) Si $x = 0$ alors $t = \tan 0 = 0$ et si $x = \frac{\pi}{4}$ alors $t = \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

   (b) $dt = (1 + \tan^2 x)\, dx = (1 + t^2)\, dx$ donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

   (c) On a
$$\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan x} + 1} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} + 1} = \frac{1}{t+1}.$$

   Alors $I_2 = \int\limits_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{dt}{(t+1)(1+t^2)}$.

   L'intégrale $\int\limits_{t=0}^{t=1} \frac{dt}{(t+1)(1+t^2)}$ représente l'intégrale d'une fonction rationnelle (voir la partie correspondante).

Lemme 1.4.1 *Si F est une fonction primitive de f alors $\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + C$. $C \in \mathbb{R}$*

Corollaire 1.4.2 *1. Soit $I_{m,\alpha,\beta}(x) = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} dx$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $I_{m,\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \ln|x^2 + \alpha x + \beta| + C \ \ si\ m = 1, \\ \frac{1}{1-m}\left(x^2 + \alpha x + \beta\right)^{1-m} + C \ \ si\ m \neq 1. \end{cases}$ Avec $C \in \mathbb{R}$.*

2. Soit F une fonction primitive de la fonction f. On a $\int f(\sin x) \cos x dx = F(\sin x) + C$ et $\int f(\cos x) \sin x dx = -F(\cos x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Preuve 14 *1. On a $I_{m,\alpha,\beta}(x) = \int \varphi^{-m}(x)\, \varphi'(x)\, dx = \int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$ avec $\varphi(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ et $f(t) = t^{-m}$. Mais*
$$F(t) = \int f(t)\, dt = \int t^{-m} dt = \begin{cases} \ln|t| + C \ \ si\ m = 1, \\ \frac{1}{1-m} t^{1-m} + C \ \ si\ m \neq 1. \end{cases}$$

Ce qui implique, d'aprés le lemme précédent, que
$$I_{m,\alpha,\beta}(x) = F(\varphi(x)) + C = \begin{cases} \ln|x^2 + \alpha x + \beta| + C \ \ si\ m = 1, \\ \frac{1}{1-m}\left(x^2 + \alpha x + \beta\right)^{1-m} \ \ si\ m \neq 1. \end{cases}$$

2. *On a* $\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ *avec* $\varphi(x) = \sin x$ *alors on trouve* $\int f(\sin x)\cos x dx = F(\varphi(x)) + C = F(\sin x) + C$. *De même, pour la deuxième.*

Exemple 13 *Calculons* $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$: *On a* $\int \frac{2xdx}{x^2+1} = I_{1,0,1} = \ln|x^2+1| + C$, *avec* $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 14 *Calculons* $\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^3}$: *On a*

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^3} = I_{3,1,1} = \frac{1}{1-3}\left(x^2+x+1\right)^{1-3} + C = \frac{-1}{2\left(x^2+x+1\right)^2} + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 15 *Calculons* $\int \sin x \cos x dx$: *On a* $\int \sin x \cos x dx = \int f(\sin x)\cos x dx$ *avec* $f(t) = t$ *alors* $F(t) = \frac{1}{2}t^2$ *ce qui implique que* $\int \sin x \cos x dx = F(\sin x) + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$, *avec* $C \in \mathbb{R}$.

1.4.3 Primitives des fonctions rationnelles (Méthode de décomposition en éléments simples)

Primitives des éléments simples

Définition 1.4.1 *Les éléments simples sont les fonctions rationnelles de la forme* $\frac{1}{(x-r)^m}$ *et* $\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$ *avec* $m \in \mathbb{N}$ *et* $a, b, \alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$ *telque* $\det(x^2 + \alpha x + \beta) < 0$.

Cas de $I_{m,r}(x) = \int \frac{dx}{(x-r)^m}$: Si on utilise le changement de variable $t = x - r$ on trouve

$$I_{m,r}(x) = \begin{cases} \ln|x-r| + C \text{ si } m = 1, \\ \frac{1}{1-m}(x-r)^{1-m} + C \text{ si } m \neq 1, \end{cases} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Cas de $J_m(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$: Si on utilise le raisonnement par récurrence on montre que

$$\begin{cases} J_1(x) = \arctan x + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}, \\ J_{m+1}(x) = \frac{2m-1}{2m} J_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)^m} \text{ si } m \geq 1. \end{cases}$$

Exemple 16 *Calculons* $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$: *On a* $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = J_2(x)$ *mais*

$$J_2(x) = J_{1+1}(x) \underset{m=1}{=} \frac{2.1-1}{2.1}J_1(x) + \frac{x}{2.1(1+x^2)^1} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C. \ (C \in \mathbb{R}).$$

Exemple 17 *Calculons* $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx$: *On a* $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = J_3(x)$ *mais*

$$\begin{aligned} J_3(x) &= J_{2+1}(x) \underset{m=2}{=} \frac{2.2-1}{2.2}J_2(x) + \frac{x}{2.2(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right) + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + C. \ (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Cas de $J_m^{a,b}(x) = \int \frac{ax+b}{(x^2+1)^m}dx$: On essaye de faire apparaître au numérateur la dérivée $2x$ du polynôme x^2+1 : On a $ax+b = 2\frac{a}{2}x + b$. Alors $\frac{ax+b}{(x^2+1)^m} = \frac{a}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^m} + \frac{b}{(x^2+1)^m}$. Ce qui implique que $J_m^{a,b}(x) = \frac{a}{2}I_{m,0,1}(x) + bJ_m(x)$.

Cas de $K_{m,\alpha,\beta}(x) = \int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$: On a

$$\begin{aligned} x^2+\alpha x+\beta &= x^2 + \frac{2}{2}\alpha x + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + \beta = \left(x^2 + 2\frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha^2}{4}\right) + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) \\ &= \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}\right)^2} + 1\right) \\ &= \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^m\left(\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right)^m}.$$

Si on pose $t = \frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}$ alors $dt = \frac{1}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}dx$ donc $dx = \sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}dt$ ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
K_{m,\alpha,\beta}(x) &= \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^m}\int\frac{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}dt}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^{m-\frac{1}{2}}}J_m(t) \\
&= \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^{m-\frac{1}{2}}}J_m\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right).
\end{aligned}
$$

Exemple 18 *Calculons* $\int\frac{1}{x^2-2x+10}dx$ *: On a*

$$
x^2-2x+10=(x^2-2.1.x+1)-1+10=(x-1)^2+9=9\left((\frac{x-1}{3})^2+1\right)
$$

alors $\frac{1}{x^2-2x+10}=\frac{1}{9}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}$. *Si on pose* $y=\frac{x-1}{3}$ *alors* $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}$ *ce qui implique* $3dy=dx$ *d'où*

$$
\int\frac{1}{x^2-2x+10}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{1}{3}\arctan y+C=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+C,
$$

d'où

$$
\int\frac{1}{x^2-2x+10}dx=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right)+C.\ (C\in\mathbb{R}). \tag{1.1}
$$

Cas de $K^{a,b}_{m,\alpha,\beta}(x)=\int\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}dx$ **:** On essaye de faire apparaître au numérateur la dérivée $2x+\alpha$ du polynôme $x^2+\alpha x+\beta$:

$$
ax+b=2\frac{a}{2}x+b=\frac{a}{2}\left(2x+\frac{2b}{a}\right)=\frac{a}{2}\left(2x+\alpha-\alpha+\frac{2b}{a}\right)=\frac{a}{2}\left[(2x+\alpha)+\left(\frac{2b}{a}-\alpha\right)\right].
$$

Alors

$$
\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}=\frac{a}{2}\left[\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}+\frac{\frac{2b}{a}-\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}\right].
$$

Ce qui implique que

$$
K^{a,b}_{m,\alpha,\beta}(x)=\frac{a}{2}\left[I_{m,\alpha,\beta}(x)+\left(\frac{2b}{a}-\alpha\right)K_{m,\alpha,\beta}(x)\right].
$$

Exemple 19 *Calculons* $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx$ *: On a*

$$3x+1 = 3\frac{2}{2}x+1 = \frac{3}{2}\left(2x+\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x+\frac{2}{3}-2+2\right) = \frac{3}{2}(2x-2)+4,$$

alors $\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x+10}dx$, *ainsi*

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + 4\int \frac{1}{x^2-2x+10}dx \tag{1.2}$$

mais

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx = \ln\left|x^2-2x+10\right| + C.\ (C \in \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

Si on remplace (1.3) et (1.1) dans (1.2) on obtient

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+10\right| + \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C.\ (C \in \mathbb{R})$$

Primitives de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes avec des coefficients réels et $\partial^0 P < \partial^0 Q$

On procède en 4 étapes :

Etape 1 On sait qu'ils existent des entiers positifs $m_1, ..., m_p; n_1, ..., n_q$ et des réels $\lambda, b_1, ..., b_q, c_1, ..., c_q$ telle que Q se décompose de la manière suivante

$$Q(x) = \lambda (x-r_1)^{m_1} ... (x-r_p)^{m_p} \left(x^2+b_1x+c_1\right)^{n_1} ... \left(x^2+b_qx+c_q\right)^{n_q}$$

avec $r_1, ..., r_p$ sont les racines (distinctes) de multiplicité $m_1, ..., m_p$ de Q et det $(x^2+b_ix+c_i) < 0$ pour tout $i \in \{1, ..., q\}$.

Etape 2 Ils existent des réels A_{ik} , B_{jl} et C_{jl} telle que

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-r_1}+\frac{A_{12}}{(x-r_1)^2}+...+\frac{A_{1m_1}}{(x-r_1)^{m_1}}\\ &+\frac{A_{21}}{x-r_2}+\frac{A_{22}}{(x-r_2)^2}+...+\frac{A_{2m_2}}{(x-r_2)^{m_2}}+...\\ &+\frac{A_{p1}}{x-r_p}+\frac{A_{p2}}{(x-r_p)^2}+...+\frac{A_{pm_p}}{(x-r_p)^{m_p}} \qquad (*)\\ &+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+...+\frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}}+...\\ &\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+...+\frac{B_{qn_q}x+C_{qn_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{n_q}}.\end{aligned}$$

Exemple 20 *Si* $Q(x)=2(x-1)(x-2)^3(x^2+x+1)(x^2+x+2)^3$ *alors pour tout polynôme* R *avec* $\deg R<12$ *on a*

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{(x-2)^2}+\frac{A_4}{(x-2)^3}+\frac{B_1\,x+C_1}{x^2+x+1}\\ &+\frac{B_2\,x+C_2}{x^2+x+2}+\frac{B_3\,x+C_3}{(x^2+x+2)^2}+\frac{B_4\,x+C_4}{(x^2+x+2)^3}.\end{aligned}$$

Etape 3 Calcul des coefficients A_{ik} , B_{jl} et C_{jl}

1. On multiplie (*) par $(x-r_k)^{m_k}$ puis on prend $x=r_k$.
2. On multiplie (*) par x puis on prend la limite $x\longrightarrow\infty$.
3. On prend des valeurs particulières de x différentes de r_i dans (*).
4. On calcul la somme des éléments simples à droite du (*) puis on l'identifie avec le terme à gauche.

Etape 4 On a

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= A_{11}\int \frac{1}{x-r_1}dx + A_{12}\int \frac{1}{(x-r_1)^2}dx + ... + A_{1m_1}\int \frac{1}{(x-r_1)^{m_1}}dx \\ &+A_{21}\int \frac{1}{x-r_2}dx + A_{22}\int \frac{1}{(x-r_2)^2}dx + ... + A_{2m_2}\int \frac{1}{(x-r_2)^{m_2}}dx + ... \\ &+A_{p1}\int \frac{1}{x-r_p}dx + A_{p2}\int \frac{1}{(x-r_p)^2}dx + ... + A_{pm_p}\int \frac{1}{(x-r_p)^{m_p}}dx \\ &+\int \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}dx + ... + \int \frac{B_{1n_1}x+C_{1n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}}dx + ... \\ &\int \frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}dx + ... + \int \frac{B_{qn_q}x+C_{qn_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{n_q}}dx.\end{aligned}$$

$\therefore$Alors le calcul de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ se ramène au calcul des primitives des éléments simples.

Exemple 21 *Calculons* $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$ *: On a* $\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$*. En réduisant au même dénominateur, on obtient* $\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}$*, en identifiant* $A = 1$ *et* $B - 2A = 0$*, d'où* $B = 2$ *et donc* $\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$*. Ce qui implique*

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}dx = \ln|x-2| + 2\frac{1}{(-2)+1}(x-2)^{(-2)+1} + C = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C.$$

Exemple 22 *Calculons* $\int \frac{1}{(x^2+2x-1)^2}dx$ *: On a* $x^2+2x-1 = (x-x_1)(x-x_2)$*, où* $x_1 = -1-\sqrt{2}$ *et* $x_2 = -1+\sqrt{2}$*, alors* $\frac{1}{(x^2+2x-1)^2} = \frac{1}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2}$*, donc*

$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2} + \frac{D}{(x-x_2)^2}. \tag{1.4}$$

Si on multiplie (1.4) par $(x-x_1)^2$*, on obtient* $\frac{1}{(x-x_2)^2} = A(x-x_1) + B + \frac{C(x-x_1)^2}{x-x_2} + \frac{D(x-x_1)^2}{(x-x_2)^2}$*. Donc en donnant à* x *la valeur* x_1*, on trouve* $B = \frac{1}{(x_1-x_2)^2} = \frac{1}{8}$*. De même, si on multiplie (1.4) par* $(x-x_2)^2$*, et on donne à* x *la valeur* x_2*, on trouve* $D = \frac{1}{(x_2-x_1)^2} = \frac{1}{8}$*. Donc*

$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{1}{8(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_2} + \frac{1}{8(x-x_2)^2}. \tag{1.5}$$

Si on multiplie (1.5) par x *on obtient* $\frac{x}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = \frac{Ax}{x-x_1} + \frac{x}{8(x-x_1)^2} + \frac{Cx}{x-x_2} + \frac{x}{8(x-x_2)^2}$*,* *puis on passe à la limite on obtient*

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{Ax}{x-x_1} + \frac{x}{8(x-x_1)^2} + \frac{Cx}{x-x_2} + \frac{x}{8(x-x_2)^2}\right) = A+C.$$

D'où $C = -A$. *Si on remplace dans (1.5) on trouve*

$$\frac{1}{(x^2+2x-1)^2} = A\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) + \frac{1}{8(x-x_1)^2} + \frac{1}{8(x-x_2)^2}.$$

Prenons $x = 0$ *pour trouver* $1 = A\frac{x_1-x_2}{x_1x_2} + \frac{x_2^2+x_1^2}{8x_1^2x_2^2} = 2\sqrt{2}A + \frac{3}{4}$. *D'où* $A = \frac{1}{8\sqrt{2}}$ *et* $C = \frac{-1}{8\sqrt{2}}$. *Remplacons dans (1.5)*

$$\int \frac{1}{(x^2+2x-1)^2}dx = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln|x-x_1| - \frac{1}{8(x-x_1)} - \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln|x-x_2| - \frac{1}{8(x-x_2)} + C.\ (C \in \mathbb{R})$$

Exemple 23 *Calculons* $\int \frac{1}{x^3+1}dx$: *On a* $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ *avec* $\det(x^2-x+1) < 0$, *donc* $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$. *Si on multiplie par* $x+1$ *on obtient* $\frac{1}{x^2-x+1} = A + \frac{(Bx+C)(x+1)}{x^2-x+1}$, *on prend* $x = -1$ *on obtient* $A = \frac{1}{3}$ *d'où*

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}. \tag{1.6}$$

Si on prend par exemple $x = 0$ *dans (1.6) on obtient* $C = \frac{2}{3}$. *Remplacons dans (1.6)*

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{Bx+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}. \tag{1.7}$$

Multiplions (1.7) par x *pour trouver* $\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{3(x+1)} + \frac{Bx^2+\frac{2}{3}x}{x^2-x+1}$, *et passons à la limite* $x \to \infty$ *on obtient* $B = -\frac{1}{3}$. *Donc*

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx, \tag{1.8}$$

mais

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C,\ (C\in\mathbb{R}) \tag{1.9}$$

et $x-2 = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}$, *d'où*

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx, \tag{1.10}$$

mais

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + C,\ (C\in\mathbb{R}) \tag{1.11}$$

et

$$x^2-x+1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right),$$

donc

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.\ (C\in\mathbb{R}) \tag{1.12}$$

Remplaçons (1.11) et (1.12) dans (1.10)

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.\ (C\in\mathbb{R}) \tag{1.13}$$

Remplaçons maintenant (1.13) et (1.9) dans (1.8) $\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.\ (C\in\mathbb{R})$

Primitives de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux polynômes avec des coefficients réels et $\partial^0 P \geq \partial^0 Q$

On sait qu'ils existent deux polynômes T et R telles que $\deg R < \deg Q$ et $P(x) = T(x)Q(x) + R(x)$ donc $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{T(x)Q(x)+R(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. Ce qui implique que $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int T(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$. $\therefore$Alors le calcul de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ se ramène au calcul de

$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ avec $\deg R < \deg Q$.

Exemple 24 *Calculons $\int \frac{x^3}{x^2-4}dx$: Si on effectue la dévision Euclidienne on trouve $x^3 = (x^2-4)\,x + 4x$. On a*

$$\frac{x^3}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)\,x+4x}{x^2-4} = x + 4\frac{x}{x^2-4}. \tag{1.14}$$

Donc $\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x^2-4| + C$. $(C \in \mathbb{R})$

Primitives des fonctions trigonométriques sous la forme $F(\sin x, \cos x)$ avec F une fonction rationnelle

On pose $t = tg\frac{x}{2}$ donc $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Alors $\int F(\sin x, \cos x)$ se transforme à la primitive d'une fonction rationnelle en t.

Exemple 25 *Calculons $\int \frac{1}{\sin x}dx$: Si on pose $t = tg\frac{x}{2}$ donc*

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.(C \in \mathbb{R})$$

Primitives des fonctions sous la forme $F(e^x)$ avec F une fonction rationnelle

On pose $t = e^x$ alors $\int F(e^x)$ se transforme à la primitive d'une fonction rationnelle en t.

Exemple 26 *Calculons $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$: Si on pose $t = e^x$ donc $\frac{dt}{dx} = e^x = t$ ce qui implique que $dx = \frac{dt}{t}$. Alors*

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{t}{t+1}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln|e^x+1| + C.(C \in \mathbb{R})$$

1.5 Exercices

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient $d = \{x_0, ..., x_n\} \in D_{a,b}$ et $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subset [a, b] - d$.

1. Montrer que $s(f, d) \leq s(f, d \cup \{y_0\}) \leq S(f, d \cup \{y_0\}) \leq S(f, d)$. Puis énoncer littérairement ce résultat.
2. Soit $r \in \mathbb{N}$. On suppose que $s(f, d) \leq s(f, d \cup \{y_1, ..., y_r\}) \leq S(f, d \cup \{y_1, ..., y_r\}) \leq S(f, d)$. Montrer que $s(f, d) \leq s(f, d \cup \{y_1, ..., y_r, y_{r+1}\}) \leq S(f, d \cup \{y_1, ..., y_r, y_{r+1}\}) \leq S(f, d)$.
3. Que peut on déduire de (1) et (2).
4. Soient $d_1, d_2 \in D_{a,b}$. Montrer que $s(f, d_1) \leq S(f, d_2)$. Puis énoncer littérairement ce résultat.

Exercice 2

Considérons la fonction définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = x$.

Montrer que pour $d = \{x_0, ..., x_n\} \in D_{1,2}$ on a $\frac{3}{2} - \frac{\|d\|}{2} \leq s(f, d) \leq S(f, d) \leq \frac{3}{2} + \frac{\|d\|}{2}$ puis déduire que f est Riemann intégrable sur $[1, 2]$.

Exercice 3

Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx, \int \frac{\ln x}{x^n} dx (n \in \mathbb{N}), \int x \arctan x dx,$$
$$\int (x^2 + x + 1) e^x dx, \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx, \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x dx.$$

Solution 3

Pour $\int e^x \cos x dx$: Posons $u = e^x$ et $v' = \cos x$ alors $u' = e^x$ et $v = \sin x$. La primitivité par parties donne

$$\int e^x \cos x dx = \int u(x) v'(x) = uv - \int u^{'}(x) v(x) dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \quad (1.15)$$

Posons maintenant $w = e^x$ et $z^{'} = \sin x$ alors $w^{'} = e^x$ et $z = -\cos x$. La primitivitè par parties donne

$$\int e^x \sin x dx = \int w(x) z^{'}(x) dx = w(x) z(x) - \int w^{'}(x) z(x) dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x,$$

remplacons dans (1.15) pour trouver $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x$. D'où $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$. Avec $C \in \mathbb{R}$.

Pour $\int \frac{\ln x}{x^n} dx$: On distingue 2 cas :

Cas $n = 1$: Posons $u = \ln x$ et $v^{'} = x^{-1}$ alors $u^{'} = x^{-1}$ et $v = \ln x$. La primitivité par parties donne

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u^{'}(x) v(x) dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Alors $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$. Avec $C \in \mathbb{R}$.

Cas $n \neq 1$: Posons $u = \ln x$ et $v^{'} = x^{-n}$ alors $u^{'} = x^{-1}$ et $v = \frac{1}{1-n} x^{1-n}$. La primitivité par parties donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^n} dx &= u(x) v(x) - \int u^{'}(x) v(x) dx = \frac{1}{1-n} x^{1-n} \ln x - \frac{1}{1-n} \int x^{-n} dx \\
&= \frac{1}{1-n} \frac{\ln x}{x^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \frac{1}{1-n} x^{1-n} + C \\
&= \frac{1}{(1-n) x^{n-1}} \left(\ln x - \frac{1}{1-n} \right) + C, \ \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pour $\int x \arctan x dx$: Posons $u(x) = \arctan x$ et $v^{'}(x) = x$ alors $u^{'}(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $v(x) = \frac{1}{2} x^2$. La primitivité par parties donne

$$\int x \arctan x dx = u(x) v(x) - \int u^{'}(x) v(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx, \quad (1.16)$$

mais

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - \arctan x + C,$$

remplacons dans (1.16) pour trouver $\int x \arctan x dx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \frac{1}{2}x + C$. $(C \in \mathbb{R})$

Pour $\int \left(x^2+x+1\right)e^x dx$: Posons $u = x^2+x+1$ et $v^{'} = e^x$ alors $u^{'} = 2x+1$ et $v = e^x$. La primitivité par parties donne

$$\int \left(x^2+x+1\right)e^x dx = u\left(x\right)v\left(x\right) - \int u^{'}\left(x\right)v\left(x\right)dx = \left(x^2+x+1\right)e^x - \int \left(2x+1\right)e^x dx. \tag{1.17}$$

Mais par la primitivité par parties

$$\int \left(2x+1\right)e^x dx = \left(2x+1\right)e^x - 2\int e^x dx = \left(2x-1\right)e^x + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

si on remplace dans (1.17) on trouve $\int \left(x^2+x+1\right)e^x dx = \left(x^2-x+2\right)e^x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Calculer les primitives suivantes en effectuant un changement de variable convenable : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}, \int \frac{dx}{\tan^3 x}, \int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x+7\right)^m}dx$ (ici $m \in \mathbb{N}$), $\int \frac{\ln x}{x}dx et \int \frac{chx}{sh^5 x}dx$.

Solution 4

Pour $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$: On a

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1}}. \tag{1.18}$$

Si on pose $y = \frac{x}{\sqrt{5}}$ on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $dx = \sqrt{5}dy$. D'où de (1.18) on trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}dy}{\sqrt{y^2-1}} \\ &= \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{x^2}{5}-1}\right| + C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pour $\int \frac{dx}{\tan^3 x}$: On a

$$\frac{1}{\tan^3 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos x\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^3 x}. \tag{1.19}$$

Si on pose $y=\sin x$ on trouve $\frac{dy}{dx}=\cos x$ donc $\cos x dx = dy$. D'où de (1.19) on trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\tan^3 x} &= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\cos x dx = \int \frac{\left(1-y^2\right)dy}{y^3} = \int \frac{dy}{y^3} - \int \frac{dy}{y} \\ &= \int y^{-3}dy - \int y^{-1}dy = \frac{1}{-3+1}y^{-3+1} - \ln|y| + C \\ &= \frac{-1}{2y^2} - \ln|y| + C = \frac{-1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C.\ (C\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

Pour $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx$: Si on pose $y=x^2+3x+7$ alors $dy=(2x+3)\,dx$, d'où

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x+7\right)^m}dx &= \int y^{-m}dy = \begin{cases}\ln|y|+C \text{ si } m=1, \\ \frac{1}{1-m}y^{1-m} \text{ si } m\neq 1,\end{cases} \\ &= \begin{cases}\ln|x^2+3x+7|+C \text{ si } m=1, \\ \frac{1}{1-m}\left(x^2+3x+7\right)^{1-m}+C, \text{ si } m\neq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Pour $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **:** Si on pose $y=\ln x$ alors $dy=\frac{dx}{x}$. Donc $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C = \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2 + C$, $C\in\mathbb{R}$.

Pour $\int \frac{chx}{sh^5 x}dx$: Si on pose $y=shx$ alors $dy=chxdx$. Donc $\int \frac{chx}{sh^5x}dx = \int \frac{dy}{y^5} = -\frac{1}{4y^4}+C = -\frac{1}{4sh^4x}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Changement de variable)

Calculer $I_1 = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x^2}}dx,\ \ I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx, I_3 = \int \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Indication : Dans I_3, on prend $x = \sin t$.

Exercice 6 (Primitives des fonctions irrationnelles)

Calculer les primitives suivantes

1. $I_1 = \frac{dx}{x^2+1}, I_2 = \int \frac{dx}{x^2+4}, I_3 = \int \frac{dx}{x^2-x+1}, I_4 = \int \frac{2x+1}{x^2-x+1}dx$ et $I_5 = \int \frac{x}{x^2-x+1}dx$. *La forme générale est* $\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}dx$ *avec* $\det(x^2+\alpha x+\beta) < 0$.
2. $K_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, K_2 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}, K_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}, K_4 = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ et $K_5 = \int \frac{x}{(x^2+x+1)^2}dx$. *La forme générale est* $\int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^2}dx$ *avec* $\det(x^2+\alpha x+\beta) < 0$.
3. $L_1 = \int \frac{x+4}{x^2+2x-3}dx, L_2 = \int \frac{x}{(x-2)^2}dx, L_3 = \int \frac{x^2}{(x^2+x+1)^2}dx$ et $L_4 = \int \frac{x}{(x^4-4x^2)(x-2)^2(x^2+x+1)^2}dx$. *La forme générale est* $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ *avec* $\partial^0 R < \partial^0 Q$.
4. $M = \int \frac{x^3+3x^2+1}{x^3+2x^2-3x}$. *La forme générale est* $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ *avec* $\partial^0 R \geq \partial^0 Q$.

Exercice 7 (Primitives des fonctions qui se ramènent aux primitives des fonctions irrationnelles)

Calculer $M_1 = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx, M_2 = \int \frac{e^{3x}+3e^{2x}+1}{e^{2x}+2e^x-3}dx, M_3 = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^3 x}\cos x dx$ et $M_4 = \int \frac{\sin x \cos x}{3-\sin x \cos x}dx$.

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1. Calculer I_1, puis utiliser la primitivité par parties pour calculer I_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left((2n-1)I_n + \frac{t}{(1+t^2)^n}\right)$.
3. Déduire I_3 et I_4.

Exercice 9

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. (Utiliser l'intégration par parties)

2. Calculer I_n.

Solution 9

1. Montrons, directement, que

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} = \frac{2\,(n+1)}{(2n+3)} I_n. \tag{1.20}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u = (1-t^2)^{n+1}$ et $v^{'} = 1$ alors $u^{'} = (n+1)(-2t)(1-t^2)^n = -2\,(n+1)\,t\,(1-t^2)^n$et $v = t$.

L'intégration par parties donne

$$I_{n+1} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt = \left[t\left(1-t^2\right)^{n+1}\right]_0^1 + 2\,(n+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt,$$

d'où

$$I_{n+1} = 2\,(n+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt, \tag{1.21}$$

mais

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt &= -\int_0^1 \left(-t^2\right)\left(1-t^2\right)^n dt = -\int_0^1 \left(-t^2+1-1\right)\left(1-t^2\right)^n dt \\
&= -\int_0^1 \left[\left(1-t^2\right)\left(1-t^2\right)^n - \left(1-t^2\right)^n\right] dt \\
&= -\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt + \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt = I_n - I_{n+1},
\end{aligned}$$

remplaçons dans (1.21) pour trouver $I_{n+1} = 2\,(n+1)\,(I_n - I_{n+1})$, d'où $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(2n+3)} I_n$.

2. De (1.20) on trouve $I_n = \frac{2((n-1)+1)}{(2(n-1)+3)} I_{n-1} = \frac{2n}{(2n+1)} I_{n-1}$. Donc

$$I_n = \frac{2n}{(2n+1)} I_{n-1} = \frac{2n}{(2n+1)}\left[\frac{2\,(n-1)}{(2n-1)} I_{n-2}\right] = \frac{2^2 n\,(n-1)}{(2n+1)\,(2n-1)} I_{n-2}.$$

On peut montrer par reccurence que

$$\forall n\in\mathbb{N}: I_n=\frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)...3.1}I_0. \tag{1.22}$$

Mais

$$I_0=\int_0^1\left(1-t^2\right)^0 dt=\int_0^1 dt=1, \tag{1.23}$$

et

$$\begin{aligned}(2n+1)(2n-1)...3.1 &= \frac{[(2n+1)(2n-1)...3.1]\,[(2n)(2n-2)(2n-4)...4.2]}{(2n)(2n-2)(2n-4)...4.2}\\ &= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)...4.3.2.1}{2n2(n-1)2(n-2)...(2.2).2},\end{aligned}$$

alors

$$(2n+1)(2n-1)...3.1=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}. \tag{1.24}$$

On note que le terme $(2n+1)(2n-1)...3.1$ représente le produit des nombres impaires.

Remplaçons (1.23) et (1.24) dans (1.22) pour trouver $I_n=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Chapitre 2

Equations différentielles linéaires

2.1 Résolution de l'équation d'ordre un

Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ avec $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Pour résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre sur I

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)\,, \tag{E1}$$

on procède comme suit :

1. On cherche la solution générale y_H de l'équation homogène (H1) associée à (E1) suivante
$$a(x)\,y' + b(x)\,y = 0. \tag{H1}$$
2. On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E1).
3. Alors la solution générale de (E1) est $y = y_H + y_p$.

Remarque 2.1.1 ***(Détermination de la solution générale*** y_H ***de (H1))*** *La solution générale de (H1) est* $y_H = ke^A$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *et* A *une primitive de la fonction* $\frac{-b}{a}$ *sur* I.

Remarque 2.1.2 ***(Détermination de la solution particulière*** y_p ***de (E1))*** *On utilise l'une des méthodes suivantes :*

1. *Tatonnement, expérimentation.*
2. *Méthode de la variation de la constante : On cherche une solution particulière de (E1) sous la forme* $y_p = k(x)\,e^A$ *avec* A *une primitive de la fonction* $\frac{-b}{a}$ *sur* I.
3. *Méthode de superposition.*

2.2 Résolution de l'équation d'ordre deux à coefficients constants

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour résoudre l'équation différentielle linéaire, d'ordre deux à coefficients constant et un second membre

$$ay'' + by' + cy = f, \tag{E2}$$

on procède comme suit :

1. On cherche la solution générale y_H de l'équation homogène (H2) associée à (E2) suivante
$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{H2}$$
2. On cherche une solution particulière y_p de l'équation (E2).
3. Alors la solution générale de (E2) est $y = y_H + y_p$.

Remarque 2.2.1 ***(Détermination de la solution générale y_H de (H2))*** *On considère l'équation caractéristique associée à (H2) suivante*

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{C}$$

Puis, on calcul $\Delta = \det(ar^2 + br + c)$.

1. *Si* $\Delta > 0$ *alors* $y_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ *avec* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, r_1 *et* r_2 *les deux racines distinctes de (C).*
2. *Si* $\Delta = 0$ *alors* $y_H = (c_1 x + c_2)\, e^{rx}$ *avec* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *et* r *la racine double de (C).*
3. *Si* $\Delta < 0$ *alors* $y_H = e^{\alpha x}\,(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ *avec* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, α *et* β *les réels tels que* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$ *sont les deux racines complexes de (C).*

Remarque 2.2.2 ***(Détermination de la solution particulière y_p de l'équation (E2)) :*** *Selon la forme du second membre* f :

1. *Si* $f = e^{mx} Q_n$ *avec* $m \in \mathbb{R}$ *et* Q_n *polynôme de degré* n *alors*
   (a) *Si* m *n'est pas racine de (C) alors* $y_p = e^{mx} R_n$ *avec* R_n *est un polynôme de* n.

(b) *Si* m *est une racine simple de (C) alors* $y_p = e^{mx} R_{n+1}$ *avec* R_{n+1} *un polynôme de* $n+1$.

(c) *Si* m *est une racine double de (C) alors* $y_p = e^{mx} R_{n+2}$ *avec* R_{n+2} *un polynôme de* $n+2$.

2. *Si* $f = M \cos \omega x + N \sin \omega x$ *où* $\omega, M, N \in \mathbb{R}$ *alors*

   (a) *Si* ω *n'est pas racine de (C) alors* $y_p = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}$.

   (b) *Si* ω *est une racine de (C) alors* $y_p = x\,(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}$.

3. *Méthode de superposition : Si* $f = f_1 + f_2$ *alors* $y_p = y_1 + y_2$ *avec* y_1 *une solution particulière de* $ay'' + by' + cy = f_1$ *et* y_2 *une solution particulière de* $ay'' + by' + cy = f_2$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Considérons l'équation suivante

$$y' + xy = x^2 + 1. \tag{E1}$$

1. Que représente l'équation (E1). Trouver les coefficients a_0 et a_1 pour que $P_1(x) = a_1 x + a_0$ soit une solution de l'équation (E1). Que représente cette solution.
2. Ecrire l'équation homogène associée à (E1) puis résoudre la.
3. Déduire la solution générale de (E1).
4. Trouver la solution de (E1) qui vérifie $y(0) = 1$.

Solution 1

1. L'équation (E1) est une équation différentielle linéaire d'ordre un avec un second membre.

   $P_1(x) = a_1 x + a_0$ est une solution de l'équation (E1) alors elle vérifie l'équation (E1) c. à dire $P_1'(x) + xP_1(x) = x^2 + 1$ pour tout x. Mais $P_1'(x) = a_1$ alors si on remplace dans l'équation on obtient $a_1 + x(a_1 x + a_0) = x^2 + 1$ donc

   $$\forall x \in \mathbb{R} : (a_1 - 1)x^2 + a_0 x + a_1 - 1 = 0$$

   représente le polynôme nul. Ce qui implique que les coefficients sont nuls c. à dire $a_1 - 1 = a_0 = 0$ donc $a_1 = 1$ et $a_0 = 0$.

   $P_1(x) = x$ représente une solution particulière de l'équation (E1) c. à dire $y_p = x$.
2. L'équation homogène associée à (E1) est $y' + xy = 0$. Elle admet la solution générale $y_H = ke^A$ avec $k \in \mathbb{R}$ et A une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)} = -x$. Mais $\int -xdx = -\frac{1}{2}x^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ donc $A = -\frac{1}{2}x^2$ ce qui implique que $y_H = ke^{-\frac{1}{2}x^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. La solution générale de (E1) est $y = y_H + y_p = ke^{-\frac{1}{2}x^2} + x$ avec $k \in \mathbb{R}$.

4. *Trouver la solution de (E1) qui vérifie* $y(0) = 1$ *c'est déterminer la constante* $k \in \mathbb{R}$ *pour laquelle* $y(0) = 1$. On a $y(0) = ke^{-\frac{1}{2}0} + 0 = k$ donc $k = 1$. La solution qui vérifie $y(0) = 1$ est $y = e^{-\frac{1}{2}x^2} + x$.

Exercice 2

Considérons l'équation suivante

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{1-x}{2x^2}y^2 = \frac{1-x}{2}. \tag{E2}$$

1. Est ce que on peut utiliser la méthode du cours ($y = y_H + y_p$) pour résoudre l'équation (E2). Justifier.
2. Montrer que $P_1(x) = x$ est une solution particulière de (E2).
3. On pose $y = P_1 + \frac{1}{t}$. Ecrire l'équation associée à la nouvelle variable t. Que représente cette équation. Résoudre la.
4. Déduire la solution générale de (E2).

Solution 2

1. On ne peut pas utiliser la méthode du cours pour résoudre l'équation (E2) : $y' - \frac{1}{x}y + \frac{1-x}{2x^2}y^2 = \frac{1-x}{2}$ car elle n'est pas sous la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
2. Puisque $P_1'(x) - \frac{1}{x}P_1(x) + \frac{1-x}{2x^2}(P_1(x))^2 = 1 - 1 + \frac{1-x}{2x^2}x^2 = \frac{1-x}{2}$ alors P_1 vérifie l'équation (E2) donc P_1 est une solution particulière de (E2).
3. On a $y = P_1 + \frac{1}{t} = x + \frac{1}{t}$. Ici t est une fonction de la variable x. On a $y' = 1 - \frac{t'}{t^2}$. Si on remplace dans (E2) on obtient

$$\underbrace{\left(1 - \frac{t'}{t^2}\right)}_{y'} - \frac{1}{x}\underbrace{\left(x + \frac{1}{t}\right)}_{y} + \frac{1-x}{2x^2}\underbrace{\left(x + \frac{1}{t}\right)^2}_{y^2} = \frac{1-x}{2}.$$

D'où $-\frac{t'}{t^2} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1-x}{x}\right)\frac{1}{t} + \frac{1-x}{2x^2t^2} = 0$ donc $-\frac{t'}{t^2} - \frac{1}{t} = -\frac{1-x}{2x^2t^2}$. Si on multiplie par

$(-t^2)$ on obtient

$$t' + t = \frac{1-x}{2x^2}. \tag{T1}$$

(T1) est une équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre donc $t = t_H + t_p$.

Calculons la solution générale t_H de l'équation homogène associée à (T1). On a $t_H = ke^A$ avec $k \in \mathbb{R}$ et A une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)} = -\frac{1}{1} = -1$. On a $\int (-1)\,dx = -x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. Donc $A = -x$. Alors $t_H = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Calculons une solution particulière t_p de (T1). On remarque que $\frac{1-x}{2x^2} = \underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{t'} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2x}\right)}_{t}$, donc $t_p = -\frac{1}{2x}$ est une solution particulière de (T1).

$\therefore$ La solution générale de (T1) est $t = t_H + t_p = ke^{-x} - \frac{1}{2x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

4. La solution générale de (E2) est $y = x + \frac{1}{t} = x + \frac{1}{ke^{-x} - \frac{1}{2x}}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Considérons l'équation suivante

$$y' + y + y^3 = 0. \tag{E3}$$

On cherche les solutions strictement positives de (E3) :

1. On pose $t = \frac{1}{y^2}$. Ecrire l'équation associée à la nouvelle variable t puis résoudre la.
2. Déduire la solution générale de (E3).

Solution 3

1. On a $t = \frac{1}{y^2} > 0$ alors $y = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}$ donc $y' = \frac{-1}{2} t' t^{-\frac{3}{2}}$. Si on remplace dans (E3) on trouve $\underbrace{\frac{-1}{2} t' t^{-\frac{3}{2}}}_{y'} + \underbrace{t^{-\frac{1}{2}}}_{y} + \underbrace{t^{-\frac{3}{2}}}_{y^3} = 0$. On dévise sur $t^{-\frac{3}{2}}$ pour trouver

$$-\frac{1}{2} t' + t + 1 = 0. \tag{T2}$$

Calculons la solution générale t_H *de l'équation homogène associée à* (T2). On a $t_H = ke^A$ avec $k \in \mathbb{R}$ et A une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)} = -\frac{1}{\frac{-1}{2}} = 2$. On a $\int 2dx = 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ donc $A = 2x$ ce qui implique que $t_H = ke^A = ke^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Calculons une solution particulière t_p *de* (T2) *:*

Méthode 1 *Tatonnement et expérimentation :* On remarque que $t = -1$ vérifie (T2) alors elle représente une solution particulière de (T2).

Méthode 2 *Méthode de la variance de la constante :* On varie la constante k dans t_H donc on cherche une solution particulière de (T2) sous la forme $t_p = k(x)\, e^{2x}$. On a $k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{-A} = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} e^{-2x} = 2e^{-2x}$ ce qui implique que $k(x) = \int k'(x) = 2\int e^{-2x}dx = -e^{-2x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Puisqu e on s'interesse à une seule solution donc on prend une seule fonction $k(x) = -e^{-2x}$. Donc $t_p = k(x)\, e^{2x} = \left(-e^{-2x}\right) e^{2x} = -1$.

$\therefore$ La solution générale de (T2) sur un intervalle (convenable) I de $\mathbb{R}$ est $t = t_H + t_p = ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. La solution générale de (E3) est $y = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{ke^{2x}-1}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Par tatonnement et expérimentation, trouver une solution de l'équation $y' + y = \frac{1-x}{2x^2}$. Déduire sa solution générale.
2. Montrer que $\frac{-2}{3}\sqrt{x}$ est une solution de l'équation $xy' - 2y = \sqrt{x}$ puis trouver la solution qui vérifié $y(1) = \frac{1}{3}$.
3. Résoudre l'équation $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$.
4. Utiliser le changement de variable $y = x + \frac{1}{t}$ pour résoudre l'équation $y' - \frac{1}{x}y + \frac{1-x}{2x^2}y^2 = \frac{1-x}{2}$.

Exercice 5

1. Considérons l'équation suivante

$$y'' + y' + y = x^2. \tag{E4}$$

(a) Que représente l'équation (E4). Ecrire l'équation homogène associée à (E4) puis résoudre la.

(b) Trouver une solution particulière de (E4) puis déduire la solution générale de (E4).

(c) Trouver la solution de (E4) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

2. Mêmes questions pour l'équation $y'' + y' + y = e^x$.
3. Déduire la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = x^2 + e^x$.

Solution 5

1.a L'équation (E4) est une équation différentielle linéaire d'ordre deux avec des coefficients constants et un second membre. L'équation homogène associée est

$$y'' + y' + y = 0. \tag{H4}$$

Pour résoudre cette équation (c. à dire déterminer sa solution générale) on considère l'équation caractéristique associée

$$r^2 + r + 1 = 0. \tag{C4}$$

On a $\det(r^2 + r + 1) = -3 < 0$ donc (C) admet deux solutions complexes $r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\alpha = \frac{-1}{2}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui implique que la solution générale de (H4) est

$$\begin{aligned}
y_H &= e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right) \\
&= e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \\
&= e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Puisque c_2 varie dans $\mathbb{R}$ alors on peut remplacer $(-c_2)$ par c_2 donc

$y_H = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.b Le second membre $f(x) = x^2$ est sous la forme $e^{mx}Q_2(x)$ avec $m = 0$ et $Q_2(x) = x^2$. On a $m = 0$ n'est pas une racine de (C) alors (E4) admet une solution particulière $y_{1p} = e^{mx}R_2 = e^{0x}R_2 = R_2$ où $R_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. On a $y''_{1p} + y'_{1p} + y_{1p} = x^2$ alors $R''_2 + R'_2 + R_2 = x^2$ mais $R'_2 = 2\alpha x + \beta$ et $R''_2 = 2\alpha$ donc $(2\alpha) + (2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2$ donc $(\alpha - 1)x^2 + (2\alpha + \beta)x + 2\alpha + \beta + \gamma = 0$ ce qui implique que $\alpha - 1 = 2\alpha + \beta = 2\alpha + \beta + \gamma = 0$, donc $\alpha = 1$, $\beta = -2\alpha = -2$ et $\gamma = 0$. Alors $y_{1p} = x^2 - 2x$.

La solution générale de (E4) est

$$y = y_H + y_{1p} = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x,$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.c *Trouver la solution de* (E4) *qui vérifie* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$ *c'est déterminer les constantes* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *pour lequelles* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$. La solution de (E4) est

$$y(x) = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x.$$

Alors

$$y(0) = e^{\frac{-1}{2}0}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.0\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.0\right)\right) + 0^2 - 2.0 = c_1,$$

On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \\ &\quad + e^{\frac{-1}{2}x}\left(-c_1\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \\ &\quad + 2x - 2. \end{aligned}$$

Alors $y'(0) = \frac{-1}{2}c_1 + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2$, donc $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ implique $c_1 = 1$ et $\frac{-1}{2}c_1 + c_2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 1$ donc $c_2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Alors la solution de (E4) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est

$$y = e^{\frac{-1}{2}x}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x.$$

2. L'équation $y'' + y' + y = e^x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre deux avec des coefficients constants et un second membre.

   (a) L'équation homogène associée est aussi (H4). Donc, elle admet la solution générale $y_H = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) Le second membre $f(x) = e^x$ est sous la forme $e^{mx}Q_0(x)$ avec $m = 1$ et $Q_0(x) = 1$. On a $m = 1$ n'est pas une racine de (C) alors l'équation $y'' + y' + y = e^x$ admet une solution particulière $y_{2p} = e^x R_0$ où $R_0(x) = \alpha$ c. à dire $y_{2p} = \alpha e^x$. On a $y''_{2p} + y'_{2p} + y_{2p} = e^x$ alors $(\alpha e^x)'' + (\alpha e^x)' + (\alpha e^x) = e^x$, donc $(\alpha e^x) + (\alpha e^x) + (\alpha e^x) = e^x$, alors $(3\alpha - 1)e^x = 0$ ce qui implique que $\alpha = \frac{1}{3}$ donc $y_{2p} = \frac{1}{3}e^x$.

   $\therefore$ La solution générale de $y'' + y' + y = e^x$ est

$$y = y_H + y_{2p} = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \frac{1}{3}e^x, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. L'équation $y'' + y' + y = x^2 + e^x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre deux avec des coefficients constants et un second membre.

   (a) L'équation homogène associée est aussi (H4). Donc, elle admet la solution générale $y_H = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) Le second membre $f(x) = x^2 + e^x$ est la somme de deux fonctions donc d'aprés le principe de superposition on trouve que $y_p = y_{1p} + y_{2p} = x^2 - 2x + \frac{1}{3}e^x$ est une solution particulière de $y'' + y' + y = x^2 + e^x$.

$\therefore$ La solution générale de $y'' + y' + y = x^2 + e^x$ est

$$y = y_H + y_p = e^{\frac{-1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - 2x + \frac{1}{3}e^x,$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}x. \tag{E5}$$

$$y'' + y' - 2y = \frac{1}{2}e^{-2x}x. \tag{E6}$$

$$y'' + y' - 2y = 2e^{2x}. \tag{E7}$$

$$y'' + y' - 2y = \frac{1}{2}e^{-2x}x + 2e^{-2x}. \tag{E8}$$

Solution 6

Pour (E5) : *Détermination de y_H* : L'équation homogène associée à (E5) est

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{H5}$$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + 2r + 1 = 0. \tag{C5}$$

On a $\det(r^2 + 2r + 1) = 0$ donc (C5) admet une racine double $r = -1$ ce qui implique que la solution générale de (H5) est $y_H = (c_1x + c_2)\, e^{rx} = (c_1x + c_2)\, e^{-x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Détermination de y_p : Le second membre $f(x) = e^{-x}x$ est sous la forme $e^{mx}Q_1(x)$ avec $m = -1$ et $Q_1(x) = x$. On a $m = -1$ racine double de (C5) alors (E5) admet une solution particulière $y_p = e^{mx}R_{1+2} = e^{-x}R_3 = e^{-x}\left(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right)$. Il suffit de trouver les coefficients α, β, γ et δ qui vérifient

$$\left[e^{-x}\left(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right)\right]'' + 2\left[e^{-x}\left(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right)\right]' + e^{-x}\left(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right) = e^{-x}$$

$\therefore$ Alors la solution générale de (E5) est $y = y_H + y_p$.

Pour (E6) : *Détermination de* y_H : L'équation homogène associée à (E6) est

$$y'' + y' - 2y = 0. \tag{H6}$$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + r - 2 = 0. \tag{C6}$$

On a $\det(r^2 + r - 2) = 9 > 0$ donc (C6) admet deux racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$ ce qui implique que la solution générale de (H6) est $y_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Détermination de y_p : Le second membre $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}x$ est sous la forme $e^{mx}Q_1(x)$ avec $m = -2$ et $Q_1(x) = \frac{1}{2}x$. On a $m = -2$ racine simple de (C6) alors (E6) admet une solution particulière $y_{1p} = e^{mx}R_{1+1} = e^{-2x}R_2 = e^{-2x}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$. Il suffit de trouver les coefficients α, β, γ qui vérifient

$$\left[e^{-2x}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)\right]'' + \left[e^{-2x}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)\right]' - 2e^{-2x}\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) = e^{-2x}x.$$

$\therefore$ Alors la solution générale de (E6) est $y = y_H + y_p$.

Pour (E7) : *Détermination de* y_H : L'équation homogène associée à (E7) est aussi (H6). L'équation caractéristique associée est aussi (C6) donc $y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Détermination de y_p : Le second membre $f(x) = 2e^{2x}$ est sous la forme $e^{mx} Q_0(x)$ avec $m = 2$ et $Q_0(x) = 2$. On a $m = 2$ n'est pas une racine de (C6) alors (E7) admet une solution particulière $y_{2p} = e^{mx} R_0 = \alpha e^{2x}$. Ensuite, on cherche la valeur de α.

Pour (E8) : *Détermination de* y_H : L'équation homogène associée à (E8) est aussi (H6). L'équation caractéristique associée est aussi (C6) donc $y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Détermination de y_p : On utilise la méthode de superposition, le second membre $f(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} x + 2e^{2x}$ est la somme de deux fonctions donc (E8) admet une solution particulière $y_p = y_{p1} + y_{p2}$avec y_{1p} la solution particulière de $y'' + y' - 2y = \frac{1}{2} e^{-2x} x$ et y_{2p} la solution particulière de $y'' + y' - 2y = 2e^{2x}$.

Exercice 7 (Equations d'ordre deux)

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$.
2. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
3. $y'' - y = x + \cos 3x$.

Chapitre 3

Examens

Contrôle Continu (2009/2010)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA II)

Exercice 1 (10pts)

I. Soient $\varepsilon > 0$, $d = \{x_0, ..., x_n\} \in D_{a,b}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$) et f une fonction croissante bornée sur $[a, b]$.

$(1pts)$ 1. Montrer que $S(f, d) - s(f, d) \leq \|d\| \sum_{i=0}^{i=n-1} (M_i - m_i)$.

$(2pts)$ 2. Montrer que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on a $f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$ puis déduire que $m_i = f(x_i)$, $M_i = f(x_{i+1})$ et $M_i = m_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, n-2\}$.

$(3pts)$ 3. Montrer que $\sum_{i=0}^{i=n-1} (M_i - m_i) = f(b) - f(a)$ .Soit $\varepsilon > 0$, déduire que si $\|d\| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ alors $S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon$.

$(1pts)$ 4. Déduire que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

II. Soit g une fonction décroissante sur $[a, b]$. On pose $h = -g$.

$(1pts)$ 1. Montrer que h est une fonction croissante sur $[a, b]$.

$(1pts)$ 2. Montrer que g est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

III. Faite une conclusion de cet exercice.

Exercice 2 (10pts)

$(5pts)$ 1. Calculer les primitives suivantes : $I_1(x) = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx, I_2(x) = \int \frac{x}{x^2+x+1} dx$ et $I_3(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.

$(3pts)$ 2. Considérons la fonction rationnelle f donnée par $f(x) = \frac{2x^4+2x^3+5x^2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$. Trouver la constante A telle que $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ puis déduire $I(x) = \int f(x) dx$.

$(2pts)$ 3. Calculer la primitive $\int \frac{2e^{5x}+2e^{4x}+5e^{3x}}{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)^2} dx$. *Indication : Utiliser le changement de variable* $t = e^x$.

Correction

Solution 1

I.1 On a $S(f,d)-s(f,d)=\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)$ mais $x_{i+1}-x_i\leq\|d\|$ pour tout $i\in\{0,...,n-1\}$ alors $(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\leq\|d\|(M_i-m_i)$ ce qui implique que $\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\leq\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\|d\|(M_i-m_i)$ mais $\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}\|d\|(M_i-m_i)=\|d\|\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}(M_i-m_i)$, d'où le résultat.

I.2 On a $x\in[x_i,x_{i+1}]$ alors $x_i\leq x\leq x_{i+1}$ puisque f est croissante alors $f(x_i)\leq f(x)\leq f(x_{i+1})$.

On a $f(x_i)=\min\limits_{[x_i,x_{i+1}]}f=\inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]}f=m_i$ et $f(x_{i+1})=\max\limits_{[x_i,x_{i+1}]}f=\sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]}f=M_i$.

(a) *Montrons que $M_i=m_{i+1}$ pour tout $i\in\{0,n-2\}$.* On a $M_i=f(x_{i+1})=m_{i+1}$ d'où le résultat.

I.3 On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{i=n-1}(M_i-m_i)&=(M_0-m_0)+(M_1-m_1)+...+(M_{n-1}-m_{n-1})\\&=(m_1-m_0)+(m_2-m_1)+...+(M_{n-1}-m_{n-1})\\&=M_{n-1}-m_0=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

I.4 De la question (I. 1) et (I. 3) on trouve $S(f,d)-s(f,d)\leq\|d\|\sum\limits_{i=0}^{i=n-1}(M_i-m_i)=\|d\|(f(b)-f(a))$ mais $\|d\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ donc $\|d\|(f(b)-f(a))<\varepsilon$ alors $S(f,d)-s(f,d)<\varepsilon$.

I.5 On a

$$\forall\varepsilon>0,\exists d\in D_{a,b}\text{ (telle que }\|d\|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}):S(f,d)-s(f,d)<\varepsilon.$$

Alors d'aprés le critère de l'intégration de Riemann on trouve que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.

II.1. Soient $x, y \in [a, b]$ tel que $x \leq y$. Puisque g est une fonction décroissante sur $[a, b]$ alors $g(x) \geq g(y)$ donc $-g(x) \leq -g(y)$ mais $h(x) = -g(x)$ et $h(y) = -g(y)$ alors $h(x) \leq h(y)$. Donc on a démontré que pour tout $x, y \in [a, b]$ on a

$$x \leq y \Longrightarrow h(x) \leq h(y).$$

Ce qui implique que h est croissante.

II.2. Puisque h est croissante sur $[a, b]$ alors, d'aprés la partie I (Toute fonction croissante est Riemann intégrable $[a, b]$), on trouve que h est Riemann intégrable sur $[a, b]$ ce qui implique que $(-1)h$ est aussi Riemann intégrable mais $(-1)h = -h = g$.

On déduit de la partie II que toute fonction décroissante est aussi Riemann intégrable sur $[a, b]$.

III. *Conclusion :* Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Contrôle final (2009/2010)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA II)

Exercice 1 (8 points)

Considérons l'équation

$$y'' + 2y' + y = 2xe^{x}. \tag{E1}$$

$(4pts)$ 1. Que représente l'équation (E1). Ecrire l'équation homogène associée à (E1) puis résoudre la.

$(2,5pts)$ 2. Montrer que $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^{x}$ est une solution de (E1). Que représente cette solution.

$(1,5pt)$ 3. Déduire la solution générale de (E1).

Exercice 2 (12 points)

I. Considérons l'équation

$$t' + 2t = 2x^2 + 2x. \tag{E2}$$

$(4,5pts)$ 1. Que représente l'équation (E2). Ecrire l'équation homogène associée à (E2) puis résoudre la.

$(2pts)$ 2. Trouver la constante α pour que $h(x) = \alpha x^2$ soit une solution de (E2).

$(1,5pt)$ 3. Déduire la solution générale de (E2).

$(1,5pt)$ 4. Trouver la solution de (E2) qui vérifie $t(0) = 1$.

II. On considère l'équation

$$y'' + 2y' = 2x^2 + 2x. \tag{E3}$$

$(2,5pts)$ On pose $z = y'$. Ecrire l'équation associée à z puis déduire sa solution générale.

Correction

Solution 1

1. L'équation (E1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre. L'équation homogène associée à (E1) est

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{H1}$$

L'équation caractéristique associée à (H1) est

$$r^2 + 2r + 1 = 0. \tag{C}$$

On a $\Delta = 0$ alors (C) admet une racine double $r = -1$. Ce qui implique que la solution générale de (H1) est $y_H = (c_1 x + c_2)\, e^{rx} = (c_1 x + c_2)\, e^{-x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. On a $g'(x) = \frac{1}{2} x e^x$ et $g''(x) = \frac{1}{2}(x+1)\, e^x$ alors pour tout x on a $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = \frac{1}{2}(x+1)\, e^x + x e^x + \frac{1}{2}(x-1)\, e^x = 2xe^x$. Donc g est une solution de (E1). g représente une solution particulière de (E1) c.à dire $y_p = g$.

1. L'équation (E1) est de la forme $ay'' + by' + cy = f$ avec $a = 1, b = 2, c = 1 \in \mathbb{R}$ et $f = 2xe^x$ une fonction continue $\mathbb{R}$ alors la solution générale de (E1) est $y = y_H + y_p = (c_1 x + c_2)\, e^{-x} + \frac{1}{2}(x-1)\, e^x$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Solution 2

I.1 (E2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. L'équation homogène associée à (E2) est

$$t' + 2t = 0. \tag{H2}$$

On a $\int \frac{-b}{a} dx = \int \frac{-2}{1} dx = \int -2 dx = -2x + C$, donc $A = -2x$ alors $t_H = ke^A = ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

I. 2 h est une solution de (E2) alors $h'(x) + 2h(x) = 2x^2 + 2x$. Mais $h'(x) = 2\alpha x$ donc on remplace dans l'équation précédente pour trouver pour tout x on a $2\alpha x + 2\alpha x^2 = 2x + 2x^2$ (deux polynômes égaux) alors $2\alpha = 2$ donc $\alpha = 1$.

I.3 L'équation (E2) est de la forme $a(x)t' + b(x)t = c(x)$ avec $a(x) = 1, b(x) = 2$ et $c(x) = 2x^2 + 2x$. Alors, la solution générale de (E2) est $t = t_H + t_p = ke^{-2x} + x^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

I.4 On a $t(0) = 1$ alors $ke^{-2.0} + 0^2 = 1$ donc $k = 1$. Alors la solution qui vérifie $t(0) = 1$ est $t = e^{-2x} + x^2$.

II On a $z' = y''$ alors si on remplace dans (E3) on trouve l'équation associée à z qui est $z' + 2z = 2x^2 + 2x$. L'équation associée à z représente l'équation (E2) donc $z = t = ke^{-2x} + x^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Rattrapage (2009/2010)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA II)

Exercice 1 (11,5pts)

1. Répondre par vrai ou faux en justifiant.

$(2pts)$ a. $\int_0^1 x dx = 1.$

$(3,5pts)$ b. Pour tout $f, g \in C^0([0,2])$, on a $\int_0^2 (f.g)(x)\,dx = \left(\int_0^2 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^2 g(x)\,dx\right).$

$(6pts)$ 2. Utiliser le changement de variable $t = x^2$ pour calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{x^2} dx.$

Exercice 2 (8,5pts)

Considérons l'équation

$$y'' + 2y' + y = 2e^x + 1. \tag{E}$$

$(3,5pts)$ 1. Ecrire l'équation homogène associée à (E) puis résoudre la.

$(3pts)$ 2. Trouver les constantes α et β pour que la fonction $g(x) = \alpha e^x + \beta$ soit une solution de (E).

$(2pts)$ 3. Déduire la solution générale de (E).

Correction

Solution 1

1.a Faux car $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}\, x^2\big|_0^1 = \frac{1}{2} \neq 1.$

1.b Faux. Si par exemple $f = g = 2$ on a $\int_0^2 (f.g)(x)\,dx = 8$ et $\left(\int_0^2 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^2 g(x)\,dx\right) = 16$ donc $\int_0^2 (f.g)(x)\,dx \neq \left(\int_0^2 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^2 g(x)\,dx\right).$

2. On a

(a) Si $x = 0$ alors $t = 0^2 = 0$.

(b) Si $x = 1$ alors $t = 1^2 = 1$.

(c) $dt = 2xdx$.

Alors

$$I = \int_{x=0}^{x=1} xe^{x^2}dx = \int_{x=0}^{x=1} e^{x^2}(xdx) = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=1} e^t dt = \frac{1}{2}\left. e^t\right|_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.$$

Solution 2

1. L'équation homogène associée à (E) est

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{H}$$

L'équation caractéristique associée à (H) est

$$r^2 + 2r + 1 = 0. \tag{C}$$

On a $\Delta = 0$ alors (C) admet une racine double $r = -1$. Ce qui implique que la solution générale de (H) est $y_H = (c_1x + c_2)\,e^{rx} = (c_1x + c_2)\,e^{-x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. g est une solution de (E) alors $g'' + 2g' + g = 2e^x + 1$ mais $g' = g'' = \alpha e^x$ alors $4\alpha e^x + \beta = 2e^x + 1$ ce qui implique que $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$.

L'équation (E) est de la forme $ay'' + by' + cy = f$ avec $a = 1, b = 2, c = 1 \in \mathbb{R}$ et $f = 2e^x + 1$ une fonction continue $\mathbb{R}$ alors la solution générale de (E) est $y = y_H + y_p = (c_1x + c_2)\,e^{-x} + \frac{1}{2}e^x + 1$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Contrôle final (2010/2011)

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA II)

Exercice 1 (6pts)

1. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
2. Calculer $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin x dx$ et $\int \frac{x}{x^2+2x+3} dx$.

Exercice 2 (12pts)

1. Utiliser le changement de variable $y = \frac{1}{z}$ pour résoudre l'équation $xy\prime - y^2 = x$.
2. Résoudre l'équation $y\prime\prime - 4y\prime + 4y = xe^{2x}$.
3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I, A une primitive de a, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = e^A \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(u) e^{-A(u)} du \right)$ est une solution de l'équation différentielle $y\prime = a(x)y + b(x)$.

Rattrapage (2010/2011)

Exercice 1 (8pts) Les trois questions suivantes sont indépendantes :

1. Calculer $\int_0^1 xe^x dx$ et $\int \frac{2x+3}{x+1} dx$.
2. Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{x+1}$ pour calculer $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.
3. Soient f et g deux fonctions telles que $\int_0^1 f(x) dx = 3$ et $\int_0^1 g(x) dx = 2$. Calculer $\int_0^1 h(x) dx$ avec $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 2 (12pts) Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1. Résoudre les équations suivantes : $xy\prime - y = x^2$ et $3y\prime\prime + 5y\prime + 2y = xe^{-x}$.
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c trois fonctions continues sur I. Montrer que si f est une solution de $y\prime = a(x)y + b(x)$ et g est une solution de $y\prime = a(x)y + c(x)$ alors $f + g$ est une solution de $y\prime = a(x)y + b(x) + c(x)$.

Devoir

Université de Batna, Département de Mathématiques,

1 ère année MI (Module ANA II)

Rendre la copie avant le 15 Mai 2009.

Aucune copie ne sera acceptée aprés cette date.

Nom : Prenom : Groupe :

I. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$.

1. $f \in C^n([a,b])$ veut dire que.............................

2. Si f une fonction de classe............tel que........................ alors il existe c entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f^{(1)}(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{F1}$$

La formule (F1) s'appelle la formule de................d'ordre.........de la fonction f dans l'intervalle.........avec le reste de.............Le terme $f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f^{(1)}(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ s'appel..Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ s'appel..

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si .... alors

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f^{(1)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \tag{F2}$$

où ε est une fonction qui vérifie..............................La formule (F2) s'appelle la formule de................d'ordre.........de la fonction f au voisinage de.......avec le reste de.............Le terme $(x-x_0)^n \varepsilon(x)$ s'appel..

4. On peut utiliser les formules de type (F1) et (F2) pour

a. Comparer quelques fonctions aves les............................

b. Calculer les..............................

II. La fonction cos : $I =$ .... $\rightarrow \cos I =$ ....est une fonction continue et strictement croissante alors elle admet .... on l'a note par $Arc\cos$.

On a

1. $Arc\cos$: .... $\rightarrow$ ....

2. $(Arc\cos x = y$ où $x \in$ ....$) \Longleftrightarrow (x =$ ....où $y \in$ ....$)$

3. $Arc\cos$ est une fonction ....et...................................

4. $(Arc\cos)'(x) =$

Correction

I. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$.

1. $f \in C^n([a,b])$ veut dire $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}$ **existent dans** $[a,b]$ **et** $f^{(n)}$ **est continue**.

2. Si f est une fonction de classe $C^n([a,b])$ tel que $f^{(n+1)}$ **existe dans** $]a,b[$ alors il existe c entre a et b tel que (F1) est vérifié. La formule (F1) s'appelle la formule de **Taylor** d'ordre $n+1$ de la fonction f dans l'intervalle $[a,b]$ avec le reste de **Lagrange**. Le terme $f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f^{(1)}(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ s'appel **la partie régulière**. Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ s'appel **le reste de Lagrange**.

3. Si $f^{(n)}(x_0)$ **existe** alors (F2) est vérifie. La formule (F2) s'appelle la formule de **Taylor** d'ordre n de la fonction f au voisinage de x_0 avec le reste **de Young**. Le terme $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ s'appel **le reste de Young**.

4. On peut utiliser les formules de type (F1) et (F2) pour

    a. Comparer quelques fonctions aves **les polynômes**.

    b. Calculer les **limites**.

II. $\cos : I = [0, \pi] \to \cos I = [-1, 1]$ est une fonction continue et strictement décroissante alors elle admet **une fonction réciproque** on l'a note par $Arc\cos$.

On a

1. $Arc\cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
2. $(Arc\cos x = y$ où $x \in [-1, 1]) \Longleftrightarrow (x = \cos y$ où $y \in [0, \pi])$
3. $Arc\cos$ est une fonction **continue** et **monotone**.
4. $(Arc\cos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.