Université de Batna 2, Département de Mathématiques
3 Année Licence Mathématiques
Travaux Dirigés: *Equations Différentielles Ordinaires*

Exercice 1

Résoudre l'équation $y' = e^{-y}$. Puis, déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 2

Est ce que la fonction y définie sur $]1, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est une solution de $y' = y^2$. Est ce que c'est une solution maximale. Est ce que c'est une solution globale. (judtifier)

Même questions pour:

1. La fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $y(t) = t$. L'équation $y' = \frac{t}{y}$.
2. La fonction y définie sur $]-\infty, 2]$ par $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$. L'équation $y' = y^3$.
3. La fonction y définie sur $]2, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$. L'équation $y' = -y^2$.
4. La fonction nulle sur $\mathbb{R}$. L'équation $y' = y$. (Utiliser deux façons pour montrer que la solution est maximale)
5. La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$. L'équation $y' = 2y$.
6. La fonction y définie sur $[3, 9]$ par $y(t) = e^{2t}$. L'équation $y' = 2y$. (Utiliser deux façons pour montrer que la solution n'est pas maximale)
7. La fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par $y(t) = e^{1+t}$. L'équation $y' = y$.

Exercice 3

1. Montrer que la fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. (Utiliser deux méthodes)
2. Montrer que la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. (Indication: Considérer $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$)

Exercice 4

Considérons l'équation

$$y' = t^2 + y^2 + \cos^2(y+1) \ldots\ldots (E)$$

1. Montrer que (E) admet une solution maximale unique qui vérifie $y(0) = 1$. Notons z cette solution et J son intervalle de définition.
2. Montrer que z est de classe $C^4(J)$, monotone sur J et positive sur l'intervalle $J_+ = \{t \in J : t \geq 0\}$.

Université Batna 2, Département Maths.
EDO : 3ème Année licence.

TD

Ex 1

Question 1 : Résoudre l'éq $y' = e^{-y}$

Réponse : l'éq $y' = e^{-y}$ est une équation à variables séparées.

Soit y une solution de $y' = e^{-y}$ alors

$$\frac{dy}{dt} = e^{-y}. \text{ Ceci implique que}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = dt \text{ donc } \int e^{y} dy = \int dt$$

d'où $e^{y} = t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

alors $\boxed{y_C(t) = \ln(t + C) \text{ avec } C \in \mathbb{R} \quad \forall t > -C}$ solution générale

" Toutes les solutions de $y' = e^{-y}$

nb infini de solutions

Question 2 : Trouver la solution qui vérifie $y(0)=1$

Réponse : Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 1$ revient à trouver $C \in \mathbb{R}$ avec $y_C(0) = 1$.

$\left[t=0 \geq -c \text{ donc } c \geq 0\right]$

$y_c(0) = 1 \iff \ln(0 + c) = 1$

$\iff \ln c = 1$

$\iff e^{\ln c} = e^1$

$\iff \boxed{c = e}$

<u>Donc</u>, la solution qui vérifie ~~$y' = e$~~ $y(0) = 1$ est

$$\boxed{y(t) = \ln(t + e), \quad \forall t > -e}$$

EDO : 3ème Année Licence Maths

Exercice 2

Question : Est ce que la fonction y définie sur $]1,+\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est une solution de $y' = y^2$. Est ce que c'est une solution maximale, Est ce que c'est une solution globale ?

Réponse.

(a) On a : $I = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$, $J =]1,+\infty[$

domaine de t ds l'eq. — domaine de y ds l'eq — domaine de la solution

Pour tout $t \in]1,+\infty[$, on a.

$$\begin{cases} y'(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{-(-1)}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} & \text{— (1)} \\ y^2(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 = \frac{1}{(1-t)^2} & \text{— (2)} \end{cases}$$

De (1) et (2), on trouve que $y'_{(t)} = y^2_{(t)}$ $\forall t \in]1,+\infty[$

Donc $\underbrace{y' = y^2}_{\text{égalité entre 2 fct}}$ donc, y est une solution de $y' = y^2$ (3)

* $y :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{1-t}$. $\quad \| \quad y' = y^2$.

- On a $\lim\limits_{t \to 1^{>}} y(t) = \lim\limits_{t \to 1^{>}} \frac{1}{1-t} = -\infty$

donc y est maximale.

- On a $I = \mathbb{R}$ et $J =]1, +\infty[$ donc

$$J \neq I.$$

Ainsi y n'est pas globale

1) $y :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t \quad \| \quad y' = \frac{t}{y}$.

- y admet un prolongement (solution) strict qui est $\tilde{y} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t$.

Donc y n'est pas maximale

- Puisque y n'est pas maximale donc elle n'est pas globale. 4

2) $y :]-\infty, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \| \quad y' = y^3$

$t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$

Puisque

y n'est pas définie sur tout $J =]-\infty, 2]$

car $y(2)$ n'existe pas alors y n'est pas une solution

3) $y :]2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \| \quad y' = -y^2$.

$t \longmapsto \dfrac{1}{t}$

Comme 1) $y :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$t \longmapsto \dfrac{1}{t}$

4) $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \| \quad y' = y$.

$t \longmapsto 0$

(fct nulle)

* $J = \mathbb{R}$ est un intervalle de déf maximale donc y est maximale

- $J = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$ donc $J = I$ donc y est globale

5

5 $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \| \; y' = 2y$.

$t \longmapsto e^{t}$

Comme 4

6 $y : [3,9] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \| \; y' = 2y$.

$t \longmapsto e^{2t}$

Puisque $J = [3,9]$ n'est pas un intervalle ouvert alors y n'est pas maximale donc elle n'est non globale

7 $y :]-\infty, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \| \; y' = y$

$t \longmapsto e^{1+t}$

Comme 6

Exercice 3

1. *Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = t^2+y^2$ est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.*

   Réponse : La fonction f est la fonction polynôme alors elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. (Indication : Considérer $(t_0,0) \in \mathbb{R}^2$)*

   Réponse : *Montrons, d'abord, que pour tout $T_0, r_0 > 0$, la fonction f n'est pas Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$* : Par l'absurde, on suppose qu'il existe $T_0, r_0 > 0$ tels f est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$. Alors, il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [-r_0, r_0] : |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|.$$

Pour $y_2 = 0 \in [-r_0, r_0]$ on trouve $|f(t,y_1) - f(t,0)| \leq k|y_1 - 0|$. Mais $|f(t,y_1) - f(t,0)| = \left|2\sqrt{|y_1|} - 0\right| = 2\sqrt{|y_1|}$. Alors, pour tout $y_1 \in [-r_0, r_0]$, on a $2\sqrt{|y_1|} \leq k|y_1|$.

Ceci implique que pour tout $y_1 \in]0, r_0]$, on a $\frac{4}{k^2} \leq y_1$. Ce qui implique que $]0, r_0] \subset [\frac{4}{k^2}, +\infty[$ ce qui représente une contradiction.

Conclusion : Puisque il existe des élements de la forme $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ **tel que** f **n'est** pas lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, **sur tout ensemble** de forme $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$ alors, la fonction f **n'est pas localement Lipschitzienne,** par rapport à y uniformément par rapport à t, **sur** $\mathbb{R}^2$.

8

Exo4

1. On a

$$\text{la fonction } f \text{ définie par } f(t,y) = t^2 + y^2 + \cos^2(y+1) \text{ est de classe } C^1(\mathbb{R}^2).$$

Alors

f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.
f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution maximale qui vérifie $y(0) = 1$.

2. On a

$$f \in C^3(\mathbb{R}^2)$$

alors $z \in C^4(J)$.

3. On a

$$z' = t^2 + z^2 + \cos^2(z+1) \geq 0 \text{ pour tout } t \in J$$

alors z est croissante, donc z est monotone.

* Soit $t \in J_+$ alors $t \geq 0$. Puisque z est croissante alors

$$z(t) \geq z(0) = 1 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in J_+$ on a $z(t) \geq 0$. Ceci implique que z est positive sur J_+.

9