Université de Batna 2 \Département de Mathématiques \L3 Maths \2021-2022

# Série de TD 3.
# Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires

(Cours) **Exercice 1.** (a) *Soit l'opérateur de décalage à gauche défini par* $S_l : (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$, $S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$. *Calculer l'opérateur adjoint* $S_l^*$.

(b) *Soit* $A : (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2) \to (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ *un opérateur défini par*

$$A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_2, \lambda_2 x_3, ...),$$

*où* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}$
*Calculer l'opérateur adjoint* $A^*$. *Quelle condition doit vérifier* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *pour que* $A$ *soit auto-adjoint.*

(c) *Soit l'opérateur intégrale de noyau* $K$ *défini par* $A : (L^2[0,1], \mathbb{C}), \|.\|_2) \to (L^2[0,1], \mathbb{C}), \|.\|_2))$, $Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$, *où* $K$ *est une fonction continue complexe sur* $[0,1] \times [0,1]$.
*Calculer l'opérateur adjoint* $A^*$. *Quelle condition doit vérifier* $K$ *pour que* $A$ *soit auto-adjoint.*

(Cours) **Exercice 2.** *Soit* $E = (L^2[0,1], \mathbb{C})$ *muni de la norme* $\|.\|_2$. *On considère l'opérateur de multiplication* $A; E \longrightarrow E$ *défini par*

$$Af(x) = xf(x), \text{ pour } x \in [0,1]$$

(1) *Montrer que* $A$ *est bien défini, linéaire et borné.*
(2) *Trouver* $A^*$
(3) *Déterminer* $\sigma(A)$
(4) *Montrer que* $\sigma_p(A) = \phi$

(TD) **Exercice 3.** *Soient* $H$ *un espace de Hilbert et* $A \in \mathcal{L}(H)$. *Montrer que*

(1) $\|A\| = \|A^*\|$
(2) $AA^*$ *et* $A^*A$ *sont auto-adjoints*
(3) $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$
(4) $A$ *inversible si et seulement* $A^*$ *inversible*
(5) $N(A^*) = R(A)^\perp$
(6) *Si* $A$ *est normal, alors* $N(A) = N(A^*)$.

(TD) **Exercice 4.** *Considérons l'opérateur de décalage à droite défini par* $S_r : (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$, $S_l(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$.

(1) *Montrer que* $0$ *n'est une valeur propre de* $S_r$ , *mais* $0 \in \sigma(S_r)$.
(2) *Montrer que* $\sigma_p(S_r) = \phi$

(Cours) **Exercice 5.** *Soit* $A : (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2) \to (l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ *un opérateur défini par*

$$A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_2, \lambda_2 x_3, ...),$$

*où* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}^*$ .*Trouver* $\sigma_p(A)$.

Exercice 03 (TD III) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ complet $A : H \to H$ Linéaire, Borné

Soit $H$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$

① Montrons que $\|A\| = \|A^*\|$ ? $(\|A\| \leq \|A^*\|$ et $\|A^*\| \leq \|A\|)$

~~[illegible]~~ ; $\|A\| \leq \|A^*\|$ ?

Rappel : $M \geq 0$ si $\forall x \in E$, $\|Ax\| \leq M\|x\|$ alors $\|A\| \leq M$

Soit $x \in H$, on a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A^*\| \|Ax\| \cdot \|x\|$$

$A^*$ borné.

Donc $\|Ax\| \leq \|A^*\| \cdot \|x\|$ pour tout $x \in H$

Donc $\boxed{\|A\| \leq \|A^*\|}$ ... (1)

$\|A^*\| \leq \|A\|$ ?

on applique (1) sur $A^*$ on trouve $\|A^*\| \leq \|(A^*)^*\|$ donc

$$\boxed{\|A^*\| \leq \|A\|} \text{ (2)}$$

De (1) et (2) on trouve que $\|A\| = \|A^*\|$

② Montrer que $AA^*$ et $A^*A$ sont auto adjoint

On a $(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$

Donc $AA^*$ est auto adjoint $(AA^*)^* = AA^*$

De m̂, on montre que $A^*A$ est auto adjoint

③ $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$ ? exercice.

Montrons que $\|A^*A\| = \|A\|^2$

$(\|A^*A\| \leq \|A\|^2$ et $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|)$

On a

$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$

Donc $\|A^*A\| \leq \|A\|^2$ — (1)

montrons que $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$ ?

Soit $x \in H$, $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle \leq \|\underbrace{A^*Ax}_{\in \mathcal{L}(H)}\| \cdot \|x\| \leq \|A^*A\| \cdot \|x\| \cdot \|x\|$

$\leq \|A^*A\| \cdot \|x\|^2$

Donc $\|Ax\|^2 \leq \|A^*A\| \cdot \|x\|^2$ $\forall x \in H$

$\|Ax\| \leq \sqrt{\|A^*A\|} \cdot \|x\|$ $\forall x \in H$

donc $\|A\| \leq \sqrt{\|A^*A\|}$

Rappel :

$H_1, H_2$ espace de Hilbert $A : H_1 \to H_2$

L'adjoint $A^*$ est ~~linéaire~~ l'unique opérateur linéaire borné de $H_2 \to H_1$ tq

$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$

~~[illegible]~~

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$(AB)^* = B^*A^*$

$(A^*)^* = A$

1

Donc $\|A\|^2 \leq \|A^* A\|$ -- ②

De ① et ②, $\|A^* A\| = \|A\|^2$ -- I

Montrons que $\|A A^*\| = \|A\|^2$ ?

On applique (I) sur $A^*$, on trouve

$\|(A^*)^* A^*\| = \|A^*\|^2$ donc

$\|A A^*\| = \|A\|^2$

$\boxed{4}$ A est inversible ssi $A^*$ est inversible ?

$\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ application

A inversible $\Rightarrow$ $A^*$ est inversible ?

$$\left\{\begin{array}{l} A^{-1} \text{ existe (a)} \\ A^{-1} \text{ linéaire borné (b)} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} (A^*)^{-1} \text{ existe (c)} \\ (A^*)^{-1} \text{ linéaire borné (d)} \end{array}\right\}$$

On a $\begin{cases} A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = (I_H)^* = I_H \\ (A^{-1})^*(A^*) = (A A^{-1})^* = (I_H)^* = I_H \end{cases}$

$\exists B = (A^{-1})^*$ tq

$A^* B = I$

$B A^* = I$ donc (c)

donc $(A^*)^{-1}$ existe

Et plus, $(A^*)^{-1} = B = (A^{-1})^*$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(d) condition Th Banach vérifié $\begin{cases} A^* : H \to H \\ H \text{ Banach } (H \text{ Hilbert}) \\ A^* \text{ bijectif } ((A^*)^{-1} \text{ existe}) \\ A^* \text{ linéaire borné} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(A^{-1})$ linéaire borné

2

5. Montrer que $N(A^*) = R(A)^\perp$ ?

$x \in N(A^*) \Leftrightarrow A^* x = 0$

$\Leftrightarrow \langle A^* x, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0 \quad / \forall y \in H$

$\Leftrightarrow \langle x, Ay \rangle = 0, \forall y \in H$

$\Leftrightarrow \langle x, z \rangle = 0, \forall z \in R(A)$

$\Leftrightarrow x \in R(A)^\perp$

Donc $N(A^*) = R(A)^\perp$

7. $A$ normal (A et $A^*$ commutent) $\Rightarrow N(A) = N(A^*)$

$N(A) \subset N(A^*)$ ?

$x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^* A x = A^* 0 = 0$

$\Rightarrow A^* A x = 0 \Rightarrow A A^* x = 0$

$\Rightarrow A^* x \in N(A)$

$N(A) = R(A^*)^\perp$

$\Rightarrow A^* x \in R(A^*)^\perp$

$\Rightarrow (A^* x, z) = 0, \forall z \in R(A^*)$

$\Rightarrow \langle A^* x, A^* y \rangle = 0 \ \forall y \in H$

$y = x$

$\Rightarrow \langle A^* x, A^* x \rangle = 0$

$\Rightarrow \|A^* x\|^2 = 0 \Rightarrow A^* x = 0 \ x \in N(A^*)$

Donc

$N(A) \subset N(A^*)$ — (1)

on applique (1) sur $A^*$ ($A^*$ normale)

$N(A^*) \subset N((A^*)^*)$

$N(A^*) \subset N(A)$ — (2)

De (1) et (2) $N(A) = N(A^*)$

Dimanche 24 Avril 2022

Exo 04 : (TD III)

Considérons l'opérateur de décalage à droite défini Par :

$$S_2 : (\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longmapsto (\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$$
$$S_2(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

(1) * Montrer que 0 n'est pas valeur propre de $S_2$ ?

Par l'absurde, on suppose que 0 est une valeur propre de $S_2$

donc : $\exists \underbrace{(x_1, x_2, \ldots)}_{\ell_2(\mathbb{R})} \neq 0$, $S_2(x_1, x_2, \ldots) = 0\,(x_1, x_2, \ldots)$

$S_2(x_1, x_2, \ldots) = 0(x_1, x_2, \ldots) \Rightarrow (0, x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots)$

déf : $\lambda$ vp de $A$, si : $\exists x \neq 0$, $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, \ldots) = 0$$

Contradiction avec $(x_1, x_2, \ldots) \neq 0$

4

* Montrer que $0 \in \sigma(S_r)$

$\sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{K} \,/\, (S_r - \lambda I)$ n'est pas inversibles $\}$

$\sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,/\, (S_r - \lambda I)$ n'est pas inversible $\}$

Pour cela, il suffit de montrer que $S_r - 0I$ n'est pas ~~[illegible]~~ surjectif (car $S_r - 0I$ injectif (0 n'est pas une valeur propre))

Rappel : $\lambda$ v.p de $A \iff A - \lambda I$ n'est pas injectif

$\lambda$ n'est pas v.p de $A \iff A - \lambda I$ est injectif

On a : $S_r - 0I = S_r$

On prend $(1, 0, 0, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{R})$. On a

$\forall (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{R})$, $(1, 0, 0, \ldots) \neq S_r(x_1, x_2, \ldots)$

Car $S_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$

et $1 \neq 0$

5

* Donc $S_r$ n'est pas surjectif.

Alors $S_r - 0I$ n'est pas surjectif

ainsi $S_r - 0I$ n'est pas inversible.

$0 \in \sigma(S_r)$ } Spectre de $S_r$.

② Montrer que $\sigma_p(S_r) = \phi$ ? } Spectre ponctuel de $S_r$

$\sigma_p(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{R} / S_r - \lambda I$ n'est pas injectif $\}$

Par l'absurde, on suppose $\sigma_p(S_r) \neq \phi$

donc : $\exists \lambda \in \sigma_p(S_r)$

$\lambda \in \sigma_p(S_r) \Rightarrow (S_r - \lambda I)$ n'est pas injectif

$\Rightarrow \exists \underset{\in \ell^2(\mathbb{R})}{(x_1, x_2, -)} \neq 0 \;/ (S_r - \lambda I)(x_1, -) = 0$

$\Rightarrow \exists \underset{\in \ell^2(\mathbb{R})}{(x_1, x_2, -)} \neq 0 : S_r(x_1, x_2, -) - \lambda I(x_1, x_2, -) = 0$

$\Rightarrow \exists$ " : $(0, x_1, x_2, -) - \lambda(x_1, x_2, -) = 0$

$\Rightarrow \exists$ " : $\begin{cases} 0 - \lambda x_1 = 0 & (\lambda x_i = 0) \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ \vdots \end{cases}$

6

$\Rightarrow \exists (x_1, -) \neq 0$, $\begin{cases} x_1 = 0 & (\lambda \neq 0 \text{ car } \lambda \in \sigma_p(A) \text{ et } 0 \notin \sigma_p(A)) \\ 0 - \lambda x_2 = 0 \Rightarrow \lambda x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ \vdots \\ 0 - \lambda x_{i+1} = 0 \Rightarrow x_{i+1} = 0 \end{cases}$

donc $(x_1, x_2, \ldots) = 0$ Contradiction

avec $(x_1, x_2, \ldots) \neq 0$

7