Université Batna 2, Département de Mathématiques
3ème année Licence Mathématiques
Equations Différentielles Ordinaires
Janvier *2023*

Examen final

Exercice 1 Justifier ce qui suit

1. **(2 pts)** La fonction y définie sur $]2,+\infty[$ par $y(t)=\frac{1}{t}$ est une solution de l'équation $y^{'}=-y^2$.
2. **(2 pts)** Si on considère l'équation $y^{'}=\frac{y^2}{t^2+1}$ alors $I=\mathbb{R}$.
3. **(2 pts)** La solution y de l'équation $y^{'}=y$ définie sur $]-\infty,2]$ par $y(t)=e^{1+t}$ n'est pas maximale.
4. **(2 pts)** Les solutions de $y^{'}=y^2+t^2$ sont croissantes.

Exercice 2 Considérons le système

$$Y^{'}=\begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} Y. \tag{H}$$

On pose $R(t,t_0)=\begin{pmatrix} 2e^{t-t_0}-e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} & e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}-e^{t-t_0} \\ 2e^{t-t_0}-2e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}} & 2e^{\frac{t^2-t_0^2}{2}}-e^{t-t_0} \end{pmatrix}$ pour tout $t,t_0\in\mathbb{R}$.

1. **(2 pts + 2 pts)** Montrer que $R(t,t_0)$ est la résolvante de (H). Est ce qu'on peut déterminer une autre résolvante de (H) (Justifier).
2. **(2 pts)** Résoudre le système $\begin{cases} Y^{'}=\begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Exercice 3 (2 pts+4 pts) Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tA} pour tout $t\in\mathbb{R}$ Puis, résoudre le système $\begin{cases} Y^{'}=AY+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Correction

Solution 1

1. On a $y^{'} = \left(\frac{1}{t}\right)^{'} = -\frac{1}{t^2}$ et $-y^2 = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 = -\frac{1}{t^2}$ donc $y^{'} = -y^2$.
2. **I** représente l'intervalle ouvert de définition (de la variable t) de la fonction $f(t,y) = \frac{y^2}{t^2+1}$ alors $I = \mathbb{R}$.
3. **L**a solution $y(t) = e^{1+t}$ avec $J =]-\infty, 2]$ admet un prolongement (solution) strict qui est, par exemple, $\widetilde{y}(t) = e^{1+t}$ avec $\widetilde{J} =]-\infty, 5]$.
4. On a $y^{'} = y^2 + t^2 \geq 0$ donc $y^{'} \geq 0$.

Solution 2

1. Il suffit de montrer que $\begin{cases} \frac{\partial R(t,t_0)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} R(t,t_0), \\ R(t_0,t_0) = I_n. \end{cases}$

   Non, on ne peut pas déterminer une autre résolvante de (H) car la résolvante est unique.

2. La solution de $\begin{cases} Y^{'} = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$ est donnée par

$$Y(t) = R(t,t_0)\,Y_0 \text{ avec } t_0 = 0 \text{ et } Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{\frac{t^é}{2}} \\ 2e^t - 2e^{\frac{t^é}{2}} \end{pmatrix} \text{ pour tout } t.$$

Solution 3 On a

$$e^{tA} = e^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \text{ pour tout } t.$$

La solution de $\left\{\begin{array}{c} Y' = AY + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$ est donnée par

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}B(u)\,du \text{ avec } t_0 = 0, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{2(t-u)} & 0 \\ 0 & e^{t-u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} du \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t e^{2(t-u)}du \\ \int_0^t 0du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\ e^{t} \end{pmatrix} \text{ pour tout } t. \end{aligned}$$