(ii) Montrons que A est bornée ?

On montre que : $\exists M \geq 0, \forall f \in (C[0,1], \mathbb{R}), \|Af\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$

- Trouvons $M = ?$

Soit $f \in (C[0,1], \mathbb{R})$: $\|Af\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |Af(x)|$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f(0)|$$

Rappel 03 :

$\forall a,b \in \mathbb{R} : |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Rappel 04 :

Si $\forall x,y \in D : f_1(x) \leq f_2(x)$ alors $\sup\limits_{x\in D} f_1(x) \leq \sup\limits_{x\in D} f_2(x)$

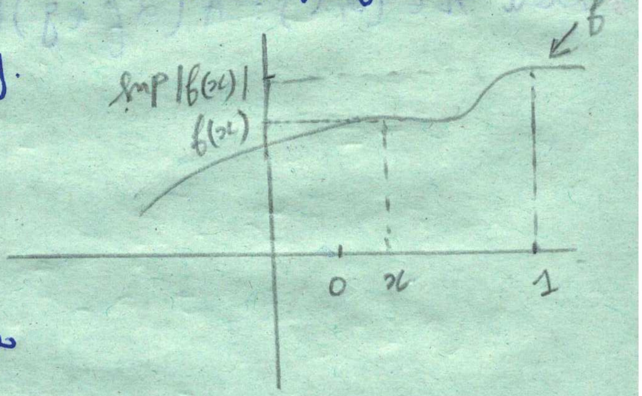
- D'autre part on a $\forall x \in [0,1] : |f(x) - f(0)| \leq |f(x)| + |f(0)|$

$$\leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$$
$$= 2\|f\|_\infty$$

car

Rappel 05 :

$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, $\forall x \in [0,1]$.



d'où : $\forall x \in [0,1] : |f(x) - f(0)| \leq 2\|f\|_\infty$

alors $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - f(0)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} 2\|f\|_\infty$

En trouve que : $\|Af\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$

* $\exists M = 2 > 0$, $\forall f \in (C[0,1], \mathbb{R})$, $\|Af\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$

Donc A est bornée

9

Calculer $\|A\| = ?$ De $(*)$ $\|A\| \leq M = 2$

$\boxed{\|A\| \leq 2}$ —— 1

- on prend $f_* \in C([0,1], \mathbb{R})$ tq $f_*(x) = 2x - 1, \; \forall x \in [0,1]$

$f_*(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$

- on a

$$\frac{\|A f_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} = \frac{\sup_{x \in [0,1]} |A f_*(x)|}{\sup_{x \in [0,1]} |f_*(x)|} = \frac{\sup_{x \in [0,1]} |f_*(x) - f_*(0)|}{\sup_{x \in [0,1]} |2x - 1|}$$

$$= \frac{\sup_{x \in [0,1]} |2x - 1 - (-1)|}{1} = \sup_{x \in [0,1]} |2x| = \sup_{x \in [0,1]} 2x = 2$$

- Mais $\dfrac{\|A f_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} \leq \|A\|$

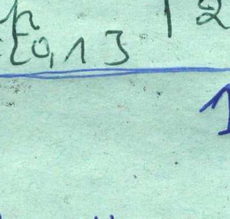
Donc $\boxed{2 \leq \|A\|}$ —— 2

De 1, 2 on trouve $\boxed{\|A\| = 2}$

Remarque,

$\inf_{x \in [0,1]} |2x - 1| = 1$ Car $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & / \; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1 - 2x & / \; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\sup_{x \in (0,1)} |2x - 1| = 1$



10

Université de Batna 2 \ Département de Mathématiques \ L3 Maths \ 2021-2022

Série de TD 1.
Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires

Exercice 1. *Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur l'espace vectoriel E. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si les deux opérateurs $Id : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ et $Id : (E, \|.\|_2) \to (E, \|.\|_1)$ sont bornés.*

Exercice 2. *Soient E un espace vectoriel normé et $A : E \to E$ un opérateur linéaire. Montrer que A est borné si et seulement si $\{x \in E : \|Ax\| = 1\}$ est fermé.*

Exercice 3. *1- Montrer que les opérateurs suivants sont linéaires bornés, continus et Lipschitziens puis déterminer leurs normes (si c'est possible) :*

(a) *Opérateur de décalage à gauche défini par $A : (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \longrightarrow (l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$, $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.*

(b) $A : ((C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to ((C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. $Af(x) = f(x) - f(0), x \in [0,1]$.

(c) $A : ((C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$. $Af = \int_0^1 f(t)dt$. (~~Utiliser~~ $\cancel{f_n(t) = \frac{n \sin t}{n|\sin t| + 1}, t \in [0,1]}$ ~~et~~ $\cancel{n \in \mathbb{N}^*}$).

(d) *Opérateur intégrale de noyau K défini par $A : (L^2[0,1], \|.\|_2) \to (L^2[0,1], \|.\|_2))$, $Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$, où K est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$.*

2- Considérons l'opérateur $A : (R(X), \|.\|) \to \mathbb{R}$, $A(P) = P(2)$. Montrer que A est linéaire non borné. Est il continu ?(Justifier). Est il lipschitzien ? (Justifier).

Exercice 4. *Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. On considère l'opérateur A défini sur E par*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) *Montrer que A est bien défini, linéaire et borné.*

(2) *Pour $n \in \mathbb{N}$, Soit $f_n^{(t)} = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|Af_n\|_1$.*

(3) *Déterminer $\|A\|$.*

Exercice 5. *Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. Soient$(e_n)_n$ et $(f_n)_n$ deux suites orthonormales de H et $(\lambda_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On pose $M = \sup_n |\lambda_n|$. Considérons l'opérateur $A : H \to H$ défini par $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, f_n \rangle e_n$. Montrer que A est bien défini, linéaire, borné et que $\|A\| = M$.*

Indication. *Théorème Riesz-Fisher : Si $(v_n)_n$ une suite orthonormale de H, la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$ converge dans H si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Inégalité de Bessel : Pour tout $x \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice 6. *Considérons la suite d'opérateurs ~~linéaires bornés~~ $(A_n)_n$ défini sur $(l^2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ par*

$$A_n(x_1, x_2, \ldots) = \frac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, \ldots).$$

(1) *Montrer que* A *est bien défini, linéaire et borné, puis calculer sa norme.*

(2) *Montrer que* $(A_n)_n$ *converge uniformément vers l'opérateur nul.*

(3) *Utiliser deux méthodes pour montrer que* $(A_n)_n$ *converge fortement vers l'opérateur nul.*

Introduction à la théorie des opérateurs
2021/2022

TD 1 : (Correction)

Exo 1 Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur l'espace vectoriel E.

Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si les deux opérateurs

$Id : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ et $Id : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$

sont bornés ?

① Montrons que

$[\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes$] \Rightarrow$ [Les opérateurs $Id : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ et $Id (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ sont bornés]

Rappel 01 :

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalente SSi : ($\Leftrightarrow$)

$\exists M_1, M_2 > 0, \forall x \in E : M_1 \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant M_2 \|x\|_2$

Rappel 02 :

E et F deux espace normé l'appli $A : E \longrightarrow F$ s'appel opérateur

Rappel 03

Id : E $\longrightarrow$ F réprésente l'identité on a : $\begin{cases} Id(x) = x \\ \forall x \in E \end{cases}$
(I)

Rappel 04 :

L'operateur A : $(E, \|\cdot\|) \longrightarrow (F, \|\cdot\|)$ est borné si (déf)

$\exists M \geqslant 0$ $\forall x \in E$, $\|Ax\| \leqq M\|x\|$
(>0)

$$(\|\cdot\|_1 \text{ et } \|\cdot\|_2 \text{ equivalentes}) \overset{(déf)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \exists M_1, M_2 > 0 \ \forall x \in E \\ M_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant M_2\|x\|_2 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists M_1 > 0, \forall x \in E : M_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \\ \text{et} \\ \exists M_2 > 0, \forall x \in E : \|x\|_1 \leqslant M_2\|x\|_2 \end{cases}$$

$Idx = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists M_1 > 0 \ \forall x \in E, \ M_1\|Idx\|_2 \leqslant \|x\|_1 \\ \text{et} \\ \exists M_2 > 0, \forall x \in E, \|Id\,x\|_1 \leqq M_2\|x\|_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists M_3 = \frac{1}{M_1} > 0, \forall x \in E, \|Id\,x\|_2 \leqslant \underbrace{\frac{1}{M_1}}_{M_3}\|x\|_1 \\ \text{et} \\ \exists M_2 > 0, \forall x \in E, \|Idx\|_1 \leqslant M_2\|x\|_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Id : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2) \\ \text{et} \\ Id : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1) \end{cases} \text{ sont bornés}$$

2/ Montrons que :

$$\begin{cases} Id : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2) \\ \text{et} \\ Id : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1) \end{cases} \text{ bornés :}$$

$$\Downarrow$$

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ équivalentes

2

$$\left.\begin{array}{l} Id : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2) \\ \text{et} \\ Id : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_1) \end{array}\right] \text{ sont bornés } \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists M' > 0, \forall x \in E, \|Idx\|_2 \leq M' \|x\|_1 \\ \text{et} \\ \exists M_2 > 0 \ \forall x \in E \ \|Idx\|_1 \leq M_2 \|x\|_2 \end{array}\right.$$

$Idx = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists M' > 0, \forall x \in E, \|x\|_2 \leq M' \|x\|_1 \\ \text{et} \\ \exists M_2 > 0, \forall x \in E, \|x\|_1 \leq M_2 \|x\|_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists M_1 = \frac{1}{M'} > 0, \forall x \in E, \frac{1}{M'} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \\ \text{et} \\ \exists M_2 > 0, \forall x \in E, \|x\|_1 \leq M_2 \|x\|_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\exists M_1, M_2 > 0, \forall x \in E, M_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2 \|x\|_2 \right)$$

$\Rightarrow$ ($\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont equivalentes).

Exo 2 : Soient E un espace vectoriel normé et $A : E \to E$ un opérateur linéaire. Montrer que A est borné SSi $\Leftrightarrow$ $\{x \in E / \|Ax\| = 1\}$ est fermé ?

Notons $F = \{x \in E / \|Ax\| = 1\}$

① Montrons que (A est borné) $\Rightarrow$ (F est fermé)

* Puisque A est linéaire et borné alors $\boxed{A \text{ est continue}}$ — ①

~~* Soit $S = \{x \in E / \|Ax\|$~~

* Soit $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$. on a : $\boxed{S \text{ est fermé}}$ — ②
* On a : $F = \{x \in E / \|Ax\| = 1\} = A^{-1}(S)$ car $A^{-1}(S) = \{x \in E / Ax \in S\} = \{x \in E / \|Ax\| = 1\} = F$.

$\boxed{\text{c-à-d } F = A^{-1}(S)}$ — ③

De ① et ② et ③ on trouve que F est fermé #

② Montrons que (F est fermé) $\Rightarrow$ (A est borné)

On suppose que $\boxed{F \text{ est fermé}}$ — ① et on veut montrer que A est borné.

Par l'absurde, c-à-d on suppose que A est non borné alors :

$\boxed{\exists (x_n) \subset E - \{0\} \text{ tq } \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \to +\infty}$ — (*) voir la preuve à la fin.

3

+ Posons $y_n = \dfrac{x_n}{\|Ax_n\|}$, $\forall n$ on a $\|Ay_n\| = \left\|A\left(\dfrac{x_n}{\|Ax_n\|}\right)\right\| = \left\|A\left(\dfrac{1}{\|Ax_n\|}\cdot x_n\right)\right\|$

$$\overset{A \text{ linéaire}}{=} \left\|\frac{1}{\|Ax_n\|}\cdot Ax_n\right\|$$

$$= \frac{1}{\|Ax_n\|}\cdot\|Ax_n\| = 1$$

Donc $\boxed{\|Ay_n\| = 1 \; ; \; \forall n}$ — ①

Ainsi $(y_n) \in F$ — ②

. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\dfrac{1}{\|Ax_n\|}\cdot x_n\right\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|x_n\|}{\|Ax_n\|} \overset{(*)}{=} 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n\| = 0}$ — ③ — alors y_n convergente vers 0.

Alors De ① et ② et ③ on trouve que $0 \in F$

Donc $\|A0\| = 1 \overset{A \text{ linéair } A0=0}{\Rightarrow} \|0\| = 1$ donc $0 = 1$ impossible.

contradiction.

④

Exo3 =

Partie 01 = Montrer que les opérateurs suivants sont linéaires, bornés, continues et lipschitzienne puis déterminer leurs normes

ⓐ Opérateur de décalage à gauche défini par =

$A = (\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, $A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$

Rappele 1

* $\ell^2(\mathbb{R})$ = l'ensemble des suites carrées sommables :

$= \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$

* $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un espace vectoriel normé avec.

$\|(x_1, x_2, \dots)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall (x_1, x_2, x_3 \dots) \in \ell^2(\mathbb{R})$

Rappale 02 =

> E, F sont des $\mathbb{K}$, e, v, n.
> $A = E \longrightarrow F$ est linéaire ssi $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$,
> $A(\alpha x + y) = \alpha A x + A y$ Ou $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

$A = (\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$

$(x_1, x_2 \dots) \longrightarrow A(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3 \dots)$

a) Montrons que A est linéaire ?

Pour cela, On montre que

$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2 \dots), (y_1, y_2 \dots) \in \ell^2(\mathbb{R}) \\ A(\alpha(x_1, x_2 \dots) + (y_1, y_2, \dots)) = \alpha A(x_1, x_2 \dots) + A(y_1, y_2 \dots) \end{cases}$

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2 \dots), (y_1, y_2 \dots) \in \ell^2(\mathbb{R})$

$A(\alpha(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2 \dots)) = A((\alpha x_1, \alpha x_2 \dots) + (y_1, y_2, y_3 \dots))$

$\boxed{\begin{aligned} &= A(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots) \\ &= (\alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3, \dots) \quad \text{—— (1)} \end{aligned}}$

* $\alpha A(x_1, x_2 \dots) + A(y_1, y_2, \dots) = \alpha(x_2, x_3 \dots) + (y_2, y_2 \dots)$

$= (\alpha x_2, \alpha x_3, \dots) + (y_2, y_3, \dots)$

$\alpha A(x_1, x_2, \ldots) + A(y_1, y_2, \ldots) = (\alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3, \ldots)$ —— (2)

De (1), (2) on trouve

$A(\alpha(x_1 \ldots) + (y_1 \ldots)) = \alpha A(x_1 \ldots) + A(y_1 \ldots)$

donc A est linéaire

Rappel 03 =

$A = E \longrightarrow F$ un opérateur borné **SSi**
$\exists M \geqslant 0, \forall x \in E, \|Ax\| \leqslant M\|x\|$

On montre que =

?? $\exists M \geqslant 0, \forall (x_1, x_2 \ldots) \in \ell^2(\mathbb{R}), \|A(x_1, x_2 \ldots)\|_2 \leqslant M\|(x_1, x_2, \ldots)\|_2$

Trouvons M ?

Soit $(x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{R})$,

$$\|A(x_1, x_2, \ldots)\|_2^2 = \|(x_2, x_3, \ldots)\|_2^2$$
$$= |x_2|^2 + |x_3|^2 + \ldots$$
$$\leqslant |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \ldots$$
$$\leqslant 1 \times (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots$$

C-a-d =

$\|A(x_1, x_2 \ldots)\|^2 \leqslant 1 \times \|(x_1, x_2, x_3 \ldots)\|^2$

donc

$\|A(x_1, x_2 \ldots)\| \leqslant \underbrace{1}_{M} \times \|x_1, x_2 \ldots\|^2$

Ainsi

$\exists M = 1 \geqslant 0, \forall (x_1, x_2 \ldots) \in \ell^2(\mathbb{R}); \|A(x_1, x_2 \ldots)\| \leqslant M\|x_1, x_2, \ldots\|$

Donc = A est borné.

Rappel 04 =

Soit $A = E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire
Les propriété suivants sont équivalents =
1 - A borné
2 - A lipshitzienne
3 - A continue

- Montrons que A est continue est lipshizienne ?

- Pour que A est linéaire et borné alors =
A est continue et lipshizienne.

6

e) Calculer de $\|A\|$?

Rappell 05 =

$$\boxed{A = E \xrightarrow[\text{linéaire}]{} F \text{ borné donc } \|A\| = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

Rappel 06 =

P.1) Soit $M \geq 0$ si

$\forall x \in E, \|Ax\| \leq M\|x\|$ alors ~~$M \leq \|A\|$~~

$\|A\| \leq M$

P.2) $\forall x \neq 0 = \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$

$$\boxed{\exists M = 1 \geq 0, \forall (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{R}) ; \|A(x_1, x_2, \dots)\|_2 \leq M\|x_1, x_2, \dots} \quad (*)$$

De $(*)$

$\|A\| \leq M = 1$ donc $\boxed{\|A\| \leq 1}$ — (1)

* Montrons que $\boxed{1 \leq \|A\|}$

On prend $x_* = (0, 1, 0, \dots)$

On a

$0 \neq x_* \in \ell^2(\mathbb{R})$? $[|0|^2 + |1|^2 + |0|^2 + \dots = 1 < \infty]$

suite nulle.

* $\dfrac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} = \dfrac{\|A(0,1,0,\dots)\|_2}{\|(0,1,0,\dots)\|_2} = \dfrac{\|(1,0,\dots)\|_2}{0^2+1^2+0^2 \dots}$

$= \dfrac{1^2+0^2+0^2 \dots}{1} = 1$

pumque $\dfrac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} \leq \|A\|$ alors $1 \leq \|A\|$ — (2)

De (1), (2), on trouve que $\|A\| = 1$

(7)

Suite Solution exercice 03 :

(b) $A : ((C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow ((C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

définie par : $A f(x) = f(x) - f(0)$, $\forall x \in [0,1]$

Rappel 01 :

$C([0,1],\mathbb{R}) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ est continue sur $[0,1] \}$

$C([0,1],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v.n muni de la norme de la convergence uniforme définie comme suit : $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $\forall f \in [0,1]$

(i) Montrons que A est linéaire ?

$$A : (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$
$$f \longmapsto Af$$

avec $Af : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto Af(x) = f(x) - f(0)$$

c-à-d on montre que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in (C[0,1],\mathbb{R})\ A(\alpha f + g) = \alpha A(f) + A(g)$ — égalité entre 2 effets.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in (C[0,1],\mathbb{R})$ on montre que : $A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag$?

* Soit $x \in [0,1]$:
$$\begin{aligned} A(\alpha f + g)(x) &= (\alpha f + g)(x) - (\alpha f + g)(0) \\ &= (\alpha f)(x) + g(x) - \alpha f(0) - g(0) \\ &= \alpha f(x) + g(x) - \alpha f(0) - g(0) \\ &= \alpha (f(x) - f(0)) + g(x) - g(0) \\ &= \alpha A f(x) + A g(x) \\ &= (\alpha Af + Ag)(x) \end{aligned}$$

c-à-d : $\forall x \in [0,1] : A(\alpha f + g)(x) = (\alpha Af + Ag)(x)$ donc $A(\alpha f + g) = \alpha Af + A$

Rappel 02 : Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur $A(x)$ l'image de x par A s'écrit Ax.

8