Chapitre 1

Equations du premier ordre

1.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. *Rappelons que les intervalles ouverts non vide de* $\mathbb{R}$ *sont de la forme* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\,,]a, +\infty[\,,]-\infty, b[$ et $]a, b[$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$.

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle ordinaire (en abrégé EDO) d'ordre* n $(n \in \mathbb{N}^*)$ *est une relation entre la variable* t*, la fonction inconnue* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et ses dérivées successives par rapport à* t : $y', ..., y^{(n)}$.*On peut l'écrire comme suit*

$$\mathcal{F}\Big(\ t, \quad y, \quad y', \quad \cdots, \quad y^{(n)} \ \Big) = 0.$$

Où $\mathcal{F} : I \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{n+1}$ *sont des ouverts non vides de* $\mathbb{R}$. *Rappellons que* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *si pour tout* $x \in \Omega$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $x \in]x - \alpha, x + \alpha[\subset \Omega$.

Exemple 1 $(t^2 + 1)\, y^3 y^{(3)} + t\sqrt{y} y'' + \frac{2}{y+1} y' = 0$ *est une équation différentielle ordinaire d'ordre* 3.

Test : Donner un exemple d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n = 5$.

Définition 1.1.2 *Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est sous la forme normale si elle est de la forme*

$$y^{(n)} = \mathcal{G}\left(\ t, \ \ y, \ \ y^{'}, \ \ \cdots, \ \ y^{(n-1)} \ \right).$$

Où $\mathcal{G} : I \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 2 *L'équation* $y^{(4)} = y^{(3)} + y^{''} + y^{'}$ *est une équation différentielle ordinaire d'ordre* 4 *sous la forme normale.*

Test : Donner une équation différentielle ordinaire d'ordre 7 sous la forme normale.

Remarque 1.1.1 *Toutes les dérivées dans les définitions ci-dessus sont par rapport à la seule variable t d'où le terme ordinaire. Si la fonction inconnue est une fonction de plusieurs variables alors la relation entre les variables, la fonction inconnue et ses dérivées partielles s'appelle une équation aux dérivées partielle (EDP). Par exemple, l'équation* $\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,x) = t + x$ *est une équation aux dérivées partielles.*

Dans ce cours, on s'intérresse aux équations différentielles ordinaires.

Définition 1.1.3 *Résoudre ou intégrer une équation différentielle veut dire déterminer toutes ses solutions.*

Remarque 1.1.2 *En général, pour résoudre une équation différentielle, on regarde sa forme puis on trouve la classe où elle appartient et on rappelle que chaque classe a sa méthode de résolution.*

Quelques classes d'équations :

1. Equation linéaire d'ordre un : $y^{'} + ay = b$ avec a et b deux fonctions données.
2. Equation linéaire d'ordre deux : $y^{''} + ay^{'} + by = c$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et c une fonction donnée.
3. Equation à variables séparées (séparable) : $y^{'} = p(t)\, q(y)$ avec p et q deux fonctions données.

1.2 Solution maximale et globale d'une équation du premier ordre

Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *L'équation*

$$y^{'} = f(t, y) \tag{E}$$

est appellée une équation différentielle du premier ordre (où bien d'ordre un) sous la forme normale.

Exemple 3 $y^{'} = ty$ *est une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale. Ici,* $f(t, y) = ty$ *et* $I = \Omega = \mathbb{R}$.

Test : Donner un exemple d'une équation différentielle du premier ordre sous la forme normale..

Définition 1.2.2 *On dit que* y *est une solution de* (E) *s'il existe un intervalle non vide* $J \subset I$ *tel que*

1. *Pour tout* $t \in J$, *on a* $y(t) \in \Omega$.
2. y *est dérivable sur* J *et vérifie* $y^{'}(t) = f(t, y(t))$ *pour tout* $t \in J$.

Exemple 4 *Considérons l'équation* $y^{'} = \frac{t}{y}$. *On a* $f(t, y) = \frac{t}{y}$. *Alors,* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. *On prend* $I = \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\Omega = \mathbb{R}^*$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Montrons que la fonction* y *définie sur* $J =]-\infty, 0[$ *par* $y(t) = t$ *est une solution de* $y^{'} = \frac{t}{y}$ *:*

1. *Pour tout* $t \in J =]-\infty, 0[$, *on a* $y(t) = t \in \mathbb{R}^* = \Omega$.
2. y *est dérivable sur* $J =]-\infty, 0[$ *(Pourquoi). De plus, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y^{'}(t) = 1$ *et* $\frac{t}{y(t)} = 1$. *Ainsi, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y^{'}(t) = \frac{t}{y(t)}$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $J =]0, +\infty[$ par $y(t) = t$ est une solution de $y^{'} = \frac{t}{y}$.

Remarque 1.2.1 *Si* $\Omega = \mathbb{R}$ *alors la condition* 1 *dans la définition de la solution de* (E) *est toujours vérifiée.*

Exemple 5 *Considérons l'équation* $y' = y^2$. *On a* $f(t,y) = y^2$. *Alors,* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *On prend* $I = \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\Omega = \mathbb{R}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Montrons que la fonction* y *définie sur* $J =]1,+\infty[$ *par* $y(t) = \frac{1}{1-t}$ *est une solution de* $y' = y^2$ *: On a* y *est dérivable sur* $J =]1,+\infty[$ *car c'est l'inverse d'une fonction dérivable non nulle sur* $]1,+\infty[$. *De plus, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ *et* $(y(t))^2 = \frac{1}{(1-t)^2}$. *Ainsi, pour tout* $t \in J$ *, on a* $y'(t) = (y(t))^2$.

Remarque 1.2.2 *Toute solution de* (E) *correspond à la donnée de deux éléments : un intervalle non vide* $J \subset I$ *et une fonction* $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.2.3 *Soient* $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux solutions de* (E). *Si* $J \subset \widetilde{J}$ *et* $\widetilde{y} = y$ *sur* J *alors on dit que* $\widetilde{y}$ *est un prolongement de* y.

Exemple 6 *Considérons sur* $I =]0,+\infty[$ *l'équation* $y' = \frac{2y}{t}$. *Soit* $y : J =]3,+\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une solution définie par* $y(t) = t^2$. *La solution* $\widetilde{y} : \widetilde{J} =]2,+\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\widetilde{y}(t) = t^2$ *est un prolongement de* y *car* $J =]3,+\infty[$ *et* $\widetilde{J} =]2,+\infty[$ *alors* $J \subset \widetilde{J}$. *Montrons que* $\widetilde{y} = y$ *sur* J *: Soit* $t \in J$ *(donc* $t \in \widetilde{J}$*). Ainsi,* $y(t) = t^2 = \widetilde{y}(t)$. *C. à dire, on a montré que* $y(t) = \widetilde{y}(t)$ *pour tout* $t \in J$. *Ceci implique que* $\widetilde{y} = y$ *sur* J.

Test : On considère l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J =]-1,1[$ par $y(t) = 0$. Montrer que la fonction $\widetilde{y}$ définie par

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} -(t+3)^2 & \text{si } t < -3, \\ 0 & \text{si } -3 \leq t \leq 2, \\ (t-2)^2 & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

est une solution qui prolonge y.

Remarque 1.2.3 *On voit que* y *prolonge* y *car* $J \subset J$ *et* $y = y$ *sur* J.

Définition 1.2.4 *Une solution* $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite solution maximale si elle n'admet aucun prolongement* $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $J \subsetneq \widetilde{J}$*. C'est à dire* y *est une solution définie sur un intervalle de définition le plus grand possible (un intervalle maximale). Notons que* $J \subsetneq \widetilde{J}$ *veut dire* J *est strictement inclus dans* $\widetilde{J}$*.*

Exemple 7 *La fonction* y *définie sur* $J = \mathbb{R}$ *par* $y(t) = e^{-4t}$ *est une solution maximale de l'équation* $y' = -4y$ *car elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *qui est un intervalle de définition maximale.*

Lemme 1.2.1 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

1. *Soit* y *une solution de* (E) *définie sur* $]\alpha, +\infty[$*. Si* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ *n'existe pas alors* y *est une solution maximale.*
2. *Soit* y *une solution de* (E) *définie sur* $]-\infty, \beta[$*. Si* $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ *n'existe pas alors* y *est une solution maximale.*

Preuve 1
1. *Par l'absurde, on suppose que* y *n'est pas maximale alors elle admet un prolongement* $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $]\alpha, +\infty[\subsetneq \widetilde{J}$*. Puisque* $\widetilde{J}$ *est un intervalle alors* $\alpha \in \widetilde{J}$*. D'une part,* $\widetilde{y}$ *est une solution de* (E) *alors elle dérivable sur* $\widetilde{J}$*. Ceci implique qu'elle est continue sur* $\widetilde{J}$*. Ainsi, elle est continue en* $t_0 = \alpha$*. Alors* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} \widetilde{y}(t) \overset{(*)}{=} \widetilde{y}(\alpha) \in \mathbb{R}$*. D'autre part, on a* $\widetilde{y} = y$ *sur* J *alors* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t) = \lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} \widetilde{y}(t) \overset{(*)}{=} \widetilde{y}(\alpha) \in \mathbb{R}$*. C. à dire* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t) \in \mathbb{R}$*. Ceci est une contradiction avec* $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ *n'existe pas.*
2. *Similaire à (1).*

Application : La fonction y définie sur $J =]-\infty, -1[$ par $y(t) = \frac{1}{t+1}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -y^2$ car $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} -1} y(t) = \lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} -1} \frac{1}{t+1} = -\infty$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $J =]-\infty, 0[$ par $y(t) = \frac{1}{t}$ est une solution maximale de l'équation $y' = -y^2$.

Lemme 1.2.2 *Toute solution* y *de* (E) *se prolonge en une solution maximale* $\widetilde{y}$*.*

Preuve 2 *Voir [De]*

Remarque 1.2.4 *En général, le prolongement maximale d'une solution y n'est pas unique. Par exemple, on considère l'équation $y^{'} = 2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J =]-1,1[$ par $y(t) = 0$. On considère la fonction $\widetilde{y}_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{y}_1(t) = 0$ et la fonction $\widetilde{y}_2$ définie par*

$$\widetilde{y}_2(t) = \begin{cases} -(t+2)^2 & si\ t \in]-\infty,-2[, \\ 0 & si\ t \in [-2,2], \\ (t-2)^2 & si\ t \in]2,+\infty[. \end{cases}$$

1. *On a $\widetilde{y}_1$ est la fonction constante 0 définie sur $\mathbb{R}$ alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. En plus, $\widetilde{y}_1^{'} = 0$ et $2\sqrt{|\widetilde{y}_1|} = 0$ alors $\widetilde{y}_1^{'} = 2\sqrt{|\widetilde{y}_1|}$. Ceci implique que $\widetilde{y}_1^{'}$ est une solution de $y^{'} = 2\sqrt{|y|}$. Montrons que $\widetilde{y}_1^{'}$ est maximale : Puisque $\widetilde{y}_1$ est définie sur $\widetilde{J}_1 = \mathbb{R}$ qui représente l'intervalle de définition le plus grand possible alors elle est maximale. Montrons que $\widetilde{y}_1$ est un prolongement de y : On a $J =]-1,1[$ et $\widetilde{J}_1 = \mathbb{R}$ alors $J \subset \widetilde{J}_1$. D'autre part, pour tout $t \in J$ (donc $t \in \widetilde{J}_1$), on a $\widetilde{y}_1(t) = 0 = y(t)$.*

   Conclusion : $\widetilde{y}_1$ est une solution maximale qui prolonge y.

2. *Montrons que $\widetilde{y}_2$ est aussi une solution maximale qui prolonge y : Notons au début que $\widetilde{J}_2 =]-\infty,-2[\cup [-2,2] \cup]2,+\infty[= \mathbb{R}$.*

   (a) *Sur $]-\infty,-2[$: $\widetilde{y}_2(t) = -(t+2)^2$ alors elle est dérivable sur $]-\infty,-2[$. De plus, pour tout $t \in]-\infty,-2[$, on a $\widetilde{y}_2^{'}(t) = -2(t+2)$ et $2\sqrt{|\widetilde{y}_2|} = -2(t+2)$ (car $t+2 < 0$). Alors $\widetilde{y}_2^{'} = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2|}$ sur $]-\infty,-2[$.*

   (b) *De même, on montre que $\widetilde{y}_2$ est une fonction dérivable sur $]-2,2[$ (resp. sur $]2,+\infty[$) et elle vérifie $\widetilde{y}_2^{'} = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2|}$ sur $]-2,2[$ (resp. sur $]2,+\infty[$).*

   (c) *Au point $t = -2$: On a*

$$\lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} -2} \frac{\widetilde{y}_2(t) - \widetilde{y}_2(-2)}{t+2} = \lim_{\substack{t \overset{<}{\longrightarrow} -2 \\ \neq}} \frac{-(t+2)^2}{t+2} = \lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} -2} -(t+2) = 0.$$

De même, on trouve $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} -2} \frac{\widetilde{y}_2(t)-\widetilde{y}_2(-2)}{t+2} = 0$. *Ce qui implique que* $\widetilde{y}_2$ *est dérivable au point* $t = -2$. *En plus, on a* $\widetilde{y}_2^{'}(-2) = 0$. *Mais,* $2\sqrt{|\widetilde{y}_2(-2)|} = 0$ *alors* $\widetilde{y}_2^{'}(t) = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2(t)|}$ *pour* $t = -2$.

(d) *Au point* $t = 2$: *De même, on montre que* $\widetilde{y}_2$ *est dérivable au point* $t = 2$. *En plus,* $\widetilde{y}_2^{'}(t) = 2\sqrt{|\widetilde{y}_2(t)|}$ *pour* $t = 2$.

Ainsi, $\widetilde{y}_2$ *est une solution de* $y^{'} = 2\sqrt{|y|}$.

D'autre part, on peut montrer que $\widetilde{y}_2$ *est maximale et elle prolonge* y *(A faire).*

Définition 1.2.5 *Si la solution* y *de* (E) *est définie sur tout* I *(ie.* $J = I$*) alors on dit que* y *est une solution globale.*

Exemple 8 *La fonction nulle définie sur* $\mathbb{R}$ *est une solution globale de l'équation* $y^{'} = y$ *car elle est une solution définie sur tout* $I = \mathbb{R}$.

Test : Montrer que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = 2y$.

Lemme 1.2.3 *La solution globale est une solution maximale.*

Preuve 3 *La solution globale est définie sur l'intervalle tout entier qui est l'intervalle de définition le plus grand possible. Ceci implique qu'elle est une solution maximale.*

Application : La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est une solution globale de l'équation $y^{'} = y^2$ alors elle est une solution maximale.

Test : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = e^{2t}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'} = 2y$

Remarque 1.2.5 *Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales. Par exemple, la fonction* y *définie sur* $J =]-\infty, -1[$ *par* $y(t) = \frac{1}{t+1}$ *est une solution maximale de l'équation* $y^{'} = -y^2$ *(voir l'exemple ci-dessus) mais elle n'est pas globale car* $J =]-1, +\infty[$ *et* $I = \mathbb{R}$ *alors* $J \neq I$. *C. à dire, elle n'est pas définie sur tout* I.

1.3 Existence de la solution du problème de Cauchy

1.3.1 Problème de Cauchy

Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$.

Définition 1.3.1 *L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appelée une condition initiale de l'équation (E).*

Définition 1.3.2 *Le problème*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{PC}$$

est appellé problème de Cauchy.

Exemple 9 *Le problème* $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ *est un problème de Cauchy.*

Définition 1.3.3 *$y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du (PC) si elle est une solution de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

Définition 1.3.4 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution maximale du (PC) si elle est une solution maximale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

Définition 1.3.5 *Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution globale du (PC) si elle est une solution globale de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

1.3.2 Théorème de Cauchy-Piano-Arzela

Théorème 1.3.1 *(Théorème de Cauchy-Piano-Arzela) On suppose que f est une fonction continue sur $I \times \Omega$. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy (PC) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$, $M := \sup\limits_{(t,y) \in C} |f(t, y)|$ et $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$. Cette solution est appelée solution locale.*

Preuve 4 *La démonstration est basée sur la construction des solutions approchées par la méthode d'Euler. Pour plus de détails voir* [De].

Application : Montrons que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ *admet une solution locale définie sur* $[-T, T]$ où T est donné dans le théorème de Cauchy-Piano-Arzela *:* La fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + e^{-y^2}$ est une fonction continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. Donc, pour $(t_0, y_0) = (0, 0) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy donné admet une solution locale définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] = [-T, T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [-r_0, r_0]$.

Si par exemple, on prend $T_0 = \frac{1}{2}$ et $r_0 = 1$ alors

$$C := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [-1, 1]$$

et

$$\begin{aligned} M &= \sup_{(t,y)\in C} |f(t, y)| = \max_{(t,y)\in C} |f(t, y)| = \max_{(t,y)\in C} \left|t^2 + e^{-y^2}\right| \\ &= \max_{(t,y)\in C} \left(t^2 + e^{-y^2}\right) = \frac{1}{4} + e^{-0^2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

Conclusion : Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet une solution locale définie sur $[-T, T] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ à valeur dans $[-r_0, r_0] = [-1, 1]$.

Remarque 1.3.1 *Soient* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ *et* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. *De tels* T_0 *et* r_0 *existent. En effet,* I *est un intervalle ouvert alors il est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Puisque* $t_0 \in I$ *alors il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $t_0 \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\subset I$ *alors il suffit de prendre* $T_0 < \alpha$ *pour que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ *ce qui implique que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$. *De même, pour* r_0.

Remarque 1.3.2 *Si* f *est continue sur* $I \times \Omega$ *alors elle est continue sur* $C := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times$

$[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ce qui implique que* $M := \sup_{(t,y)\in C} |f(t,y)|$ *existe car toute fonction continue sur un compacte d'un espace métrique est bornée et elle atteint ses bornes. Ici* C *est un compacte de* $\mathbb{R}^2$ *car* C *est borné et fermé de* $\mathbb{R}^2$. *On a aussi* $M > 0$ *car on prend* f *une fonction non nulle.*

Lemme 1.3.1 *Si* f *est une fonction continue sur* $I \times \Omega$ *alors, pour tout* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, *le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale.*

Preuve 5 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. f *est une fonction continue sur* $I \times \Omega$ *alors, d'aprés le théorème de Cauchy-Piano-Arzela, le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution locale* y. *Cette solution est une solution de* (E) *donc elle se prolonge en une solution maximale* $\widetilde{y}$ *de* (E). *Puisque* $\widetilde{y} = y$ *sur* $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ *alors* $\widetilde{y}(t_0) = y(t_0) = y_0$. *Ainsi,* $\widetilde{y}$ *est une solution maximale de* (PC).

Remarque 1.3.3 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. *Il suffit que* f *soit continue sur un ensemble* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *pour que le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution maximale et une solution locale définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$.

1.4 Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy

Ils existent des problèmes de Cauchy qui admettent plus qu'une solution maximale. Par exemple, le problème $\begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet les deux solutions maximales y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$. Ainsi, la continuité de la fonction f est une condition insuffisante pour avoir l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. On va voir ci-aprés que si f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors on a l'unicité de la solution maximale.

1.4.1 Fonctions Lipschitzienne par rapport à y

Définition 1.4.1 *Soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$. On dit que f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur C s'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Dans le cas où $C = I \times \Omega$, on dit que f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t.

Exemple 10 *Considérons la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{y}$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in [1, +\infty[$ alors*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = 2|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| = 2\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}.$$

Mais $y_1 \geq 1$ et $y_2 \geq 1$ donc $\sqrt{y_1} \geq 1$ et $\sqrt{y_2} \geq 1$ d'où $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq 2$ alors $\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} \leq \frac{1}{2}$. Alors $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$, avec $k = 1 > 0$. C'est à dire, on a montré qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in [1, +\infty[: |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Ceci implique que la fonction f définie par $f(t, y) = 2\sqrt{y}$ est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $C = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$.

Exemple 11 *Considérons la fonction f définie par $f(t, y) = y$. Soient $t \in I = \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \Omega = \mathbb{R}$. On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2| \leq k|y_1 - y_2|$ avec $k = 2 > 0$. C'est à dire, on a montré qu'il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall t \in I = \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \Omega = \mathbb{R} : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Ceci implique que f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t.

Remarque 1.4.1 *Le terme uniformément dans les définition ci-dessus veut dire que le rapport* k *ne dépend pas de* t. *Si on considère, par exemple, la fonction* f *définie par* $f(t,y) = 2t\sqrt{y}$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $y_1, y_2 \in [1, +\infty[$ *on a* $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 2|t|\left|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right| \leq k(t)|y_1 - y_2|$ *avec* $k(t) = 2|t|$ *est une fonction non majorée dans* $\mathbb{R}$. *Dans ce cas, la fonction* f *est une fonction Lipschitzienne, par rapport à* y, *sur* $C = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$. *Mais non pas uniformément par rapport à* t *car le rapport* k *dépend de* t.

Définition 1.4.2 *On dit que* f *est une fonction* ***localement*** *Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega$ *si pour tout* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ *ils existent* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *et* f *est une fonction Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* C.

Exemple 12 *La fonction* f *définie par* $f(t,y) = y^2$ *est localement Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. *En effet, soit* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Soient* $T_0, r_0 > 0$ *quelconques. Pour tout* $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ *et* $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, *on a*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left|y_1^2 - y_2^2\right| = |y_1 + y_2|\,|y_1 - y_2| \leq (|y_1| + |y_2|)\,|y_1 - y_2|.$$

Mais

$$|y_1| = |(y_1 - y_0) + y_0| \leq |y_1 - y_0| + |y_0| \leq r_0 + |y_0|.$$

De même, on trouve que $|y_2| \leq r_0 + |y_0|$. *Ainsi,* $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ *avec* $k = 2(r_0 + |y_0|)$.

Notons ici que f *est Lipschitzienne, par rapport à* y *uniforrmément par rapport à* t, *sur tout* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *car il n'y a aucune condition sur* T_0 *et* r_0.

Lemme 1.4.1 *Si* $f \in C^1(I \times \Omega)$ *alors* f *est localement Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega$. *Rappellons que* $f \in C^1(I \times \Omega)$ *veut dire que* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existent sur* $I \times \Omega$ *et elles sont continues sur* $I \times \Omega$.

Preuve 6 *Soit* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. *Choisissant* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ *et* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \Omega$. *Soient* $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ *et* $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Si on applique le théorème des accroissements finis sur* f *dans l'intervalle* $[y_1, y_2]$ *on trouve* $c \in]y_1, y_2[\subset [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *tel que* $f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, c)(y_1 - y_2)$. *Ainsi* $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, c)\right| . |y_1 - y_2|$. *Puisque* $f \in C^1(I \times \Omega)$ *alors* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur* $I \times \Omega$. *Ainsi,* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur* $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *alors elle est bornée sur* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ce qui implique que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \left(\sup_{(t,y)\in C}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right|\right) . |y_1 - y_2| = k\,|y_1 - y_2|.$$

Avec $k = \sup\limits_{(t,y)\in C}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right|$. *Ce qui implique que* f *est localement lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega$.

Application : La fonction f définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = t^2 y^2$ est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ car c'est une fonction polynôme. Ceci implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

Test : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$ par $f(t, y) = \frac{t}{y-1}$ est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

1.4.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.4.1 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz) On suppose que* f *est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $I \times \Omega$. *Alors, pour tout* $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, *le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution unique définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *à valeur dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *Ici* $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ *avec* $T_0, r_0 > 0$ *tels que* f *soit Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ *et* $M = \sup\limits_{(t,y)\in C} |f(t, y)|$.

Preuve 7 *On va utiliser la méthode d'aproximations successives de Picard : Pour cela on va considérer la suite de fonction* (y_n) *définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *par*

$$\begin{cases} y_0(t) := y_0, \\ y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du, \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrons que* (y_n) *est bien définie : Pour cela, on montre que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ (\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : y_n(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) \ \ et\ y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T]).$$

   Par récurrence :

   (a) *Pour* $n = 0$ *: Pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $y_0(t) := y_0 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *En plus, on a* y_0 *est la fonction constante* y_0 *alors elle est continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$.

   (b) *Supposons que pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $y_n(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *et* $y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ *et montrons que pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $y_{n+1}(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *et* $y_{n+1} \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ *: Soit* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. *On a*

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du \right| \leq \sup_{(t,y) \in C} |f(t,y)|\, |t - t_0| = M\, |t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0 \ \ car\ T \leq \frac{r_0}{M}. \end{aligned}$$

   Ce qui implique que $y_{n+1}(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. *D'autre part, puisque* $f \in C^0([t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0])$ *et* $y_n \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$ *alors la fonction* $t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du$ *est continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$. *Ainsi,* $y_{n+1} \in C^0([t_0 - T, t_0 + T])$.

2. *Montrons que la suite* (y_n) *est uniformément convergente vers une fonction continue* y *: Au début, on montre, par récurrence, que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq M k^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(a) *Pour* $n = 0$: *On a pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |y_{0+1}(t) - y_0(t)| &= |y_1(t) - y_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(u, y_0(u))\, du \right| \\ &\leq M|t - t_0| = Mk^0 \frac{|t - t_0|^{0+1}}{(0+1)!}. \end{aligned}$$

(b) *Supposons que pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq Mk^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!}$.

On a pour $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(u, y_n(u)) - f(u, y_{n-1}(u))]\, du \right| \\ &\leq k \int_{t_0}^{t} |y_n(u) - y_{n-1}(u)|\, du \overset{hyp.récu}{\leq} Mk^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (u - t_0)^n\, du \\ &= Mk^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De même, on montre

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq Mk^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ce qui achève la démonstration. Puisque $|t - t_0| \leq T$ *alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] : |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq \frac{M}{k} \frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'autre part, si $p, q \in \mathbb{N}$ *avec* $q \geq p$ *alors on a pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$:

$$\begin{aligned}
|y_q(t) - y_p(t)| &= |(y_q(t) - y_{q-1}(t)) + (y_{q-1}(t) - y_{q-2}(t)) + ... + (y_{p+1}(t) - y_p(t))| \\
&\leq |y_{p+1}(t) - y_p(t)| + ... + |y_{q-1}(t) - y_{q-2}(t)| + |y_q(t) - y_{q-1}(t)| \\
&\leq \frac{M}{k}\frac{(kT)^{p+1}}{(p+1)!} + ... + \frac{M}{k}\frac{(kT)^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{M}{k}\frac{(kT)^q}{q!} = \frac{M}{k}\sum_{l=p+1}^{l=q}\frac{(kT)^l}{l!} \\
&\leq \frac{M}{k}\sum_{l=p}^{l=q}\frac{(kT)^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Soit $\frac{M}{k}\sum_p^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!}$ *le reste de la série numérique convergente* $\frac{M}{k}\sum_0^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!}$ *alors on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p : p \geq N \Rightarrow \frac{M}{k}\sum_{l=p}^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!} < \varepsilon.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : q \geq p \geq N \Rightarrow \|y_q - y_p\| < \frac{M}{k}\sum_{l=p}^{+\infty}\frac{(kT)^l}{l!} < \varepsilon.$$

Ici $\|g\| := \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |g(t)|$. *Ainsi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q : q \geq p \geq N \Rightarrow \|y_q - y_p\| < \varepsilon.$$

D'aprés le critère de Cauchy, on trouve que (y_n) *est une suite uniformément convergente vers une fonction notée* y *dans* $[t_0 - T, t_0 + T]$. *En plus, elle est continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *car, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* y_n *sont continues sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3. Montrons que y *vérifie l'équation intégrale* $y = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y)\,du$ *et que* y *est une* *fonction à valeurs dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *: On a*

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y_n(u))\, du \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Puisque (y_n) *est une suite uniformément convergente vers* y *alors après passage à la limite, on trouve*

$$y(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du \text{ pour tout } t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \qquad (EI)$$

De plus, on peut montrer que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $|y(t) - y_0| \leq r_0$ *(A faire). Ce qui implique que, pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, *on a* $y(t) \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.

4. *Montrons que le problème de Cauchy* (PC) *admet une solution locale : Puisque* y *est une fonction continue sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *et elle vérifie l'équation intégrale* (EI) *alors, d'aprés l'exercice 5 du td I,* y *est une solution de* (PC).

5. *Montrons l'unicié de la solution de* (PC) *sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *à valeurs dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *: Soit* $\widetilde{y}$ *une autre solution de* (PC) *définie sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *à valeurs dans* $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *alors, d'aprés l'exercice 5 du td I, pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, *on a* $\widetilde{y}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \widetilde{y}(u))\, du$. *Ainsi pour tout* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ *on a* $|y(t) - \widetilde{y}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(u, y(u)) - f(u, \widetilde{y}(u)))\, du\right|$. *Si* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *alors*

$$|y(t) - \widetilde{y}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(u, y(u)) - f(u, \widetilde{y}(u))|\, du.$$

Puisque f *est Lipschitzienne, par rapport à* y *uniformément par rapport à* t, *sur* $[t_0 - T, t_0 + T] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ *alors* $|y(t) - \widetilde{y}(t)| \leq k \int_{t_0}^{t} |y(u) - \widetilde{y}(u)|\, du$ *pour tout* $t \in [t_0, t_0 + T]$. *Si on applique le lemme de Gronwall (voir td I exercice 2) avec* $a = t_0$, $b = t_0 + T$, $c = 0$, $d = k > 0$ *et* ψ *la fonction continue sur* $[a, b] = [t_0, t_0 + T]$ *définie par* $\psi(t) = |y(t) - \widetilde{y}(t)|$ *on trouve* $|y(t) - \widetilde{y}(t)| = \psi(t) \leq ce^{d(t-a)} = 0$ *pour tout* $t \in [a, b] = [t_0, t_0 + T]$. *Ainsi* $y(t) = \widetilde{y}(t)$ *pour tout* $t \in [t_0, t_0 + T]$.

De même, on montre que $y(t) = \widetilde{y}(t)$ pour $t \in [t_0 - T, t_0]$.

Application : Montrons que le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = t^2 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ *admet une solution locale unique définie sur $[-T, T]$ où T est donné dans le théorème de Cauchy-Lipschitz :* La fonction f définie par $f(t, y) = t^2 + y^2$ est une fonction continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$. En plus, elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ donc elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Donc, pour $(t_0, y_0) = (0, 0) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy donné admet une solution locale unique définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] = [-T, T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [-r_0, r_0]$.

Remarque 1.4.2 *L'unicité de la solution sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ veut dire que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (PC) définies sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ alors $y_1 = y_2$.*

Remarque 1.4.3 *La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz peut se faire en utilisant une autre méthode qui est la méthode du point fixe (voir [De]).*

Lemme 1.4.2 *Soit f une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$. Si y_1 est une solution de (PC) définie sur J_1 et y_2 est une solution de (PC) définie sur J_2. Alors $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Preuve 8 *On remarque que $J_1 \cap J_2$ est un intervalle non vide car l'intersection de deux intervalles est un intervalle, en plus, $t_0 \in J_1 \cap J_2$. Considérons l'ensemble $A = \{t \in J_1 \cap J_2 : y_1(t) = y_2(t)\}$.*

1. *On a $A \subset J_1 \cap J_2$ (Par construction).*
2. *A est un fermé de $J_1 \cap J_2$ car*

$$A = \{t \in J_1 \cap J_2 : (y_1 - y_2)(t) = 0\} = (y_1 - y_2)^{-1}\{0\}.$$

$\{0\}$ est fermé de $\mathbb{R}$ et $y_1 - y_2$ est une fonction continue sur $J_1 \cap J_2$.

3. A est un ouvert de $J_1 \cap J_2$. En effet, Soit $t \in A$ (Ici t est fixé). Afin de simplifier, on écrit t_* au lieu de t. Montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $t_* \in]t_* - \alpha, t_* + \alpha[\subset A$: Puisque $t_* \in A$ alors $t_* \in J_1 \cap J_2$ et $y_1(t_*) = y_2(t_*)$. On pose $y_* = y_1(t_*) = y_2(t_*)$. Alors, y_1, y_2 sont deux solutions de $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_*) = y_*. \end{cases}$ Soient $T_1, T_2 > 0$ tels que $[t_* - T_1, t_* + T_1] \subset J_1$ et $[t_* - T_2, t_* + T_2] \subset J_2$. Soit T donné dans le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué sur (t_*, y_*). Posons $T_* = \min(T_1, T_2, T)$. Ainsi, y_1 et y_2 sont deux solutions définies sur $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset [t_* - T, t_* + T]$ du même problème de Cauchy. D'aprés l'unicité de la solution dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on trouve que $y_1 = y_2$ sur $[t_* - T_*, t_* + T_*]$. Donc $[t_* - T_*, t_* + T_*] \subset A$. D'où le résultat avec $\alpha < T_*$.

4. Conclusion : On a $\varnothing \neq A$ est un ouvert et fermé dans $J_1 \cap J_2$ et $J_1 \cap J_2$ est un connexe (car $J_1 \cap J_2$ est un intervalle de $\mathbb{R}$) alors $A = J_1 \cap J_2$ ie. $y_1 = y_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

Corollaire 1.4.1 *Si f est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique.*

Preuve 9 *Considérons toutes les solutions y du problème de Cauchy (PC) et considérons tout les intervalles de définition J. On pose $J_{\max} := \underset{y \text{ solution de } (PC) \text{ définie sur } J}{\cup J}$. On a $J_{\max} \subset I$ et $t_0 \in J_{\max}$.*

Montrons que $J_{\max}$ est un intervalle : Soient $a, b \in J_{\max}$ tels que $a < b$. Alors ils existent deux solutions y_1 et y_2 de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 telles que $a \in J_1$ et $a \in J_2$. On distingue 3 cas :

Cas 1 : Si $t_0 \in]a, b[$ alors $[a, t_0] \subset J_1$ et $[t_0, b] \subset J_2$ car J_1 et J_2 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, t_0 \in J_1$ et $t_0, b \in J_2$. Ainsi, $[a, b] = [a, t_0] \cup [t_0, b] \subset J_{\max}$.

Cas 2 : Si $t_0 \leq a$ alors $[a, b] \subset [t_0, b] \subset J_2 \subset J_{\max}$.

Cas 3 : Si $b \leq t_0$ alors $[a, b] \subset [a, t_0] \subset J_1 \subset J_{\max}$.

Considérons la fonction $y_{\max}$ définie sur $J_{\max}$ comme suit si $t \in J_{\max}$ alors il existe une solution y de (PC) définie sur J telle que $t \in J$. Alors on définit $y_{\max}(t) := y(t)$.

Montrons que $y_{\max}$ est bien définie : Soient y_1 et y_2 deux solutions de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 telles que $t \in J_1 \cap J_2$. Puisque $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors $y_1 = y_2$ sur$J_1 \cap J_2$. Ainsi, $y_1(t) = y_2(t)$.

Montrons que $y_{\max}$ est une solution de (PC) : Soit $t \in J_{\max}$. On a $y'_{\max}(t) := y'(t) = f(t, y(t)) = f\left(t, y'_{\max}(t)\right)$. Ainsi, pour tout $t \in J_{\max}$, on a $y'_{\max}(t) = f\left(t, y'_{\max}(t)\right)$. En plus, $y_{\max}(t_0) := y(t_0) = y_0$.

Montrons que $y_{\max}$ est maximale : Par l'absurde, on suppose qu'il existe un prolongement $\widetilde{y}$ de $y_{\max}$ définie sur $\widetilde{J}$ tel que $J_{\max} \subsetneqq \widetilde{J}$. Mais par définition de $J_{\max}$ on a $\widetilde{J} \subset J_{\max}$. Contradiction.

Montrons que $y_{\max}$ est la seule solution maximale : Par l'absurde (A faire).

Remarque 1.4.4 *Géométriquement, les graphes de deux solutions maximales de (E) sont ou bien confondus ou bien disjoints.*

Remarque 1.4.5 *Soit $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Il suffit que f soit continue et Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur un ensemble $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ pour que le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique et une solution locale unique définie sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$.*

Remarque 1.4.6 *L'unicité de la solution maximale dans le corollaire 1.4.1 veut dire que si y_1 et y_2 sont deux solutions maximale de (PC) définies (resp.) sur J_1 et J_2 alors $J_1 = J_2$ et $y_1 = y_2$.*

1.5 Existence de la solution globale

On a vu dans la remarque 1.2.5 qu'ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales. Dans le théorème suivant, on va voir que, sous certaines conditions sur f, cela est possible :

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$. S'ils existent deux fonctions continues $c, k : I \rightarrow R_+$ telles que*

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t) |y|$$

alors toute solution maximale de (E) est globale.

Preuve 10 *Voir* $[De]$

Application : Considérons l'équation $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$. Soient $t, y \in \mathbb{R}$ avec $ty \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} |f(t, y)| &= \left| t\sqrt{t^2 + y^2} \right| = |t| \frac{(t^2 + y^2)}{\sqrt{t^2 + y^2}} = \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2 + y^2}} + \frac{|t| y^2}{\sqrt{t^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2}} + \frac{|t| y^2}{\sqrt{y^2}} = |t|^2 + |t| |y| . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 : |f(t, y)| \leq c(t) + k(t) |y|$$

Avec c et k sont les deux fonctions continues sur $I = \mathbb{R}$ définies par $c(t) = |t|^2$ et $k(t) = |t|$. Ce qui implique que toute solution maximale de l'équation $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$ est globale.

Corollaire 1.5.1 *Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$ et globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution globale unique.*

Preuve 11 *f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue alors elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \mathbb{R}$ (A faire). Puisque elle est continue sur $I \times \mathbb{R}$ alors les conditions de Cauchy-Lipschitz sont vérifies alors (PC) admet une solution maximale unique y.*

D'autre part, pour tout $(t, y) \in I \times \mathbb{R}$, *on a*

$$|f(t, y)| \leq |f(t, 0)| + |f(t, y) - f(t, 0)| \leq |f(t, 0)| + k(t)|y - 0|.$$

Ainsi

$$\forall (t, y) \in I \times \mathbb{R}\, |f(t, y)| \leq c(t) + k(t)|y|$$

avec $c(t) = |f(t, 0)|$. *D'aprés le théorème 1.5.1, on trouve que la solution maximale* y *de* (PC) *qui est une solution maximale de* (E) *est globale.*

Application : Considérons l'équation $y' = a(t)y$ où a est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction f définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = a(t)y$ est continue. De plus, si $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ alors $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |a(t)||y_1 - y_2| \leq k(t)|y_1 - y_2|$. Avec $k(t) = |a(t)| + 1$. Ici k est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, f est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. Ainsi, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = a(t)y, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution globale unique.

Remarque 1.5.1 *On peut étendre les résultats de ce chapitre au fonctions* f *définies sur des ouverts quelquonque de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

1.6 Exercices

Exercice 1 *(Résolution des équations à variables séparées)*

1. *Résoudre l'équation* $y' = e^{-y}$.
2. *Trouver la solution qui vérifie* $y(0) = 1$.

Exercice 2 *(Lemme de Gronwall)*

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $d \geq 0$ et $\psi \in C^0([a, b])$. On suppose que $\psi(t) \leq c + d\int_a^t \psi(u)\,du$ pour tout $t \in [a, b]$. On considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(t) = c + d\int_a^t \psi(u)\,du$. *Notons que* h *est une fonction définie par une intégrale.*

1. *Montrer que* $h \in C^1([a,b])$ *et calculer sa dérivée.*

   Réponse : Puisque $\psi \in C^0([a,b])$ alors $h \in C^1([a,b])$ et $h^{'}(t) = d\psi(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

2. *Montrer que pour tout* $t \in [a,b]$ *on a* $h^{'}(t) \leq dh(t)$. *Puis, déduire que* $h(t) \leq ce^{d(t-a)}$ *pour tout* $t \in [a,b]$.

   Réponse : Par hypothèse, $\psi(t) \leq h(t)$ alors $h^{'}(t) = d\psi(t) \leq dh(t)$. Ceci implique que $h(t) \leq ce^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a,b]$. Donc, $h^{'}(t) - dh(t) \leq 0$ alors $\frac{d}{dt}\left(e^{-d(t-a)}h(t)\right) = e^{-d(t-a)}\left(h^{'}(t) - dh(t)\right) \leq 0$. Aprés intégration sur $[a,t]$, on trouve $e^{-d(t-a)}h(t) \leq h(a) = c$. Ce qui implique que $h(t) \leq ce^{d(t-a)}$.

3. *Déduire que* $\psi(t) \leq ce^{d(t-a)}$ *pour tout* $t \in [a,b]$.

   Réponse : Par hypothèse, $\psi(t) \leq h(t)$ alors, de la question précédente, on trouve $\psi(t) \leq ce^{d(t-a)}$.

Remarque 1.6.1 *Ils existent plusieurs versions du lemme de Gronwall.*

Exercice 3 *(Régularité de la solution)*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que si* $f \in C^k(I \times \Omega)$ *alors toute solution* y *de* $y^{'} = f(t,y)$ *est de classe* $C^{k+1}(J)$. *Ici,* J *est le l'intervalle de définition de* y.

   Réponse : Rappelons qu'une fonction f est de classe $C^k(I \times \Omega)$ si ses dérivées partielles d'ordre k sont continues sur $I \times \Omega$. $C^0(I \times \Omega)$ représente l'ensemble des fonctions continues sur $I \times \Omega$. Notons $\mathcal{H}_k$ la propriété suivante :

$$\left[f \in C^k(I \times \Omega)\right] \Longrightarrow \left[\forall y \text{ solution de } (E) : y \in C^{k+1}(J)\right].$$

   On veut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathcal{H}_k.$$

   Donc, on le démontre par récurrence :

(a) Pour $k = 0$: On suppose que $f \in C^0(I \times \Omega)$ ie : f est continue sur $I \times \Omega$ donc elle est continue sur $J \times \Omega \subset I \times \Omega$. Soit y une solution de (E) alors $y' = f(t, y)$ ce qui implique que y' est continue sur J car c'est la composition de fonctions continues f, y et g avec $g(t) = t$ sur J. Mais y est une fonction dérivable sur J alors $y \in C^1(J)$.

(b) On suppose que $\left[f \in C^k(I \times \Omega)\right] \Longrightarrow \left[\forall y \text{ solution de } (E) : y \in C^{k+1}(J)\right]$ et on montre que $\left[f \in C^{k+1}(I \times \Omega)\right] \Longrightarrow \left[\forall y \text{ solution de } (E) : y \in C^{k+2}(J)\right]$. Soient $f \in C^{k+1}(I \times \Omega)$ et y une solution de (E). Puisque $C^{k+1}(I \times \Omega) \subset C^k(J \times \Omega)$ alors $f \in C^k(J \times \Omega)$ d'aprés l'hypothèse de récurrence $y \in C^{k+1}(J)$. Mais $y' = f(t, y)$ ce qui implique que $y' \in C^{k+1}(J \times \Omega)$ car c'est la composition de fonction de classe $C^{k+1}(J \times \Omega)$. Ainsi, $y \in C^{k+2}(J)$.

2. **Application** : *Montrer que les solutions de l'équation $y' = e^t + y$ sont de classe $C^2(J)$.*

   Réponse : On pose $f(t, y) = e^t + y$. Puisque $f \in C^{k=0}(I \times \mathbb{R})$ alors $y \in C^{k+1}(J) = C^2(J)$.

Exercice 4 *(Intervalle de définition d'une solution maximale)*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. *Montrer que l'intervalle de définition J de toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est ouvert.*

   Réponse : Voir $[De]$.

2. **Application** : *Est ce que la fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par $y(t) = e^{1+t}$ est une solution maximale de l'équation $y' = y$.*

   Réponse : Puisque la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = y$ est continue. En plus, l'intervalle de définition $]-\infty, 2]$ de y n'est pas un intervalle ouvert alors y n'est pas une solution maximale de l'équation $y' = y$.

Exercice 5 *(Equation intégrale équivalente au problème de Cauchy)*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient J un intervalle non vide de I et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *y est une solution sur J du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$
2. *y est une fonction continue sur J. En plus, pour tout $t \in J$, on a $(t, y(t)) \in I \times \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du$.*

Réponse : Voir $[De]$.

Exercice 6 *(Condition de Lipschitz)*

1. *Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = t^2 + y^2$ est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.*

   Réponse : La fonction f est la fonction polynôme alors elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ce qui implique qu'elle est localement lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que la fonction f définie par $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. (Indication : Considérer $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$)*

   Réponse : *Montrons, d'abord, que pour tout $T_0, r_0 > 0$, la fonction f n'est pas Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$* : Par l'absurde, on suppose qu'il existe $T_0, r_0 > 0$ tels f est Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$. Alors, il existe $k > 0$ tel que

   $$\forall t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [-r_0, r_0] : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

   Pour $y_2 = 0 \in [-r_0, r_0]$ on trouve $|f(t, y_1) - f(t, 0)| \leq k |y_1 - 0|$. Mais $|f(t, y_1) - f(t, 0)| = \left|2\sqrt{|y_1|} - 0\right| = 2\sqrt{|y_1|}$. Alors, pour tout $y_1 \in [-r_0, r_0]$, on a $2\sqrt{|y_1|} \leq k |y_1|$.

Ceci implique que pour tout $y_1 \in \left]0, r_0\right]$, on a $\frac{4}{k^2} \leq y_1$. Ce qui implique que $\left]0, r_0\right] \subset \left[\frac{4}{k^2}, +\infty\right[$ ce qui représente une contradiction.

Conclusion : Puisque il existe des élements de la forme $(t_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tel que f n'est pas lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur tout ensemble de forme $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [-r_0, r_0]$ alors, la fonction f n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 *(Fonctions Lipschitziennes)*

Les fonctions suivantes sont elles localement Lipschitzienne en y sur des domaines de la forme $I \times \Omega$: $f_1(t, y) = e^{ty}$, $f_2(t, y) = ye^{t^2}$, $f_3(t, y) = t\sqrt{|y|}$, $f_4(t, y) = \sin(ty)$ *et* $f_5(t, y) = |y| \ln(1 + t^2)$.

Réponse :

1/ Pour f_1, f_2, f_4 : Dans les trois cas, on a $I = \Omega = \mathbb{R}$.

Résultat : Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f est localement Lipscitzienne en y sur $I \times \Omega$.

Puisque $f_1, f_2, f_4 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (Pourquoi) alors elles sont localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$.

2/ Pour f_3 : Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \left]1, +\infty\right[$. Soient $T_0, r_0 > 0$ avec $[y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset \left]1, +\infty\right[$. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$|f_3(t, y_1) - f_3(t, y_2)| = |t| \left|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right| = |t| \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \tag{1.1}$$

On a

* $y_1 > 1$ et $y_2 > 1$ donc $\sqrt{y_1} > 1$ et $\sqrt{y_2} > 1$ d'où $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} > 2$ alors $\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} < \frac{1}{2}$.

** $|t| = |t - t_0 + t_0| \leq |t - t_0| + |t_0|$ mais $|t - t_0| \leq T_0$ (car $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$). Ainsi, $|t| \leq T_0 + |t_0|$

Remplaçons dans (1.1) pour trouver $|f_3(t, y_1) - f_3(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ avec $k = \frac{T_0 + |t_0|}{2} > 0$. Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall (t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times]1, +\infty[, \exists T_0, r_0 > 0, \exists k > 0 : \\ \forall t &\in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0] : |f_3(t, y_1) - f_3(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Ceci implique que f_3 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$.

Remarque : On peut considérer l'ensemble $]a, +\infty[$ au lieu de $]1, +\infty[$ (Ici $a > 0$) et montrer que f_3 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R} \times]a, +\infty[$.

3/ Pour f_5 : Soient $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soient $T_0, r_0 > 0$. Pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$, on a

$$|f_5(t, y_1) - f_5(t, y_2)| = \left|\ln\left(1 + t^2\right)\right| \left||y_1| - |y_2|\right| \leq \left|\ln\left(1 + t^2\right)\right| |y_1 - y_2|.$$

Mais il existe $k > 0$ tel que $|\ln(1 + t^2)| \leq k$ pour tout $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ (fonction continue sur un intervalle fermé est bornée sur cet intervalle). Ainsi, $|f_5(t, y_1) - f_5(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$. Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall (t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \exists T_0, r_0 > 0, \exists k > 0 : \\ \forall t &\in [t_0 - T_0, t_0 + T_0], \forall y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0] : |f_5(t, y_1) - f_5(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Ceci implique que f_5 est localement Lipscitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Pour f_5, on a aucune condition sur les réelles strictement positive T_0 et r_0.

Q. : Donner la définition de $f \in C^1(I \times \Omega)$.

Exercice 8 *(Primitive et EDO)*

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue et $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit F la primitive de $\frac{1}{f}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en t_0.

1. *Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un certain intervalle ouvert J :*

   Réponse : F est une primitive de $\frac{1}{f}$ alors

   * F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, elle est continue sur $\mathbb{R}$ (Pourquoi)

   ** $F' = \frac{1}{f} > 0$ sur $\mathbb{R}$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ (pourquoi). Ainsi, F est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   C'est-à-dire, F est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$.

   Montrons que $J := F(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert : Puisque F est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ alors $J = F(\mathbb{R}) = F(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} F(t), \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t) \right[$.

2. *Etablir que F^{-1} est une solution sur J de $y' = f(y)$ vérifiant $y(0) = t_0$: (Ici F^{-1} existe car $F : \mathbb{R} \longrightarrow J = F(\mathbb{R})$ est une bijection. En plus, $F^{-1} : J = F(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$)*

   Réponse : *Montrons que* $(F^{-1})' = f(F^{-1})$ et $F^{-1}(0) = t_0$:

   * Soit $x \in J$ alors $x = F(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\left(F^{-1}\right)'(x) &= \left(F^{-1}\right)'(F(t)) = \frac{1}{F'(t)} \text{ (Dérivée de la fonction réciproque)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{f(t)}} = f(t) = f\left(F^{-1}(x)\right).\end{aligned}$$

   C'est à dire, on a montré que pour tout $x \in J$ on a $(F^{-1})'(x) = f(F^{-1}(x))$. Ceci implique que $(F^{-1})' = f(F^{-1})$.

   ** On a $F(t_0) = 0$ (Pourquoi) alors $F^{-1}(F(t_0)) = F^{-1}(0)$. Ce qui implique que $F^{-1}(0) = t_0$.

3. *Justifier que F^{-1} est une solution maximale sur J.*

   Réponse : Posons $a := \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} F(t)$ et $b := \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t)$ alors $J = \left] \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} F(t), \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t) \right[=]a, b[$. On va étudier les cas de $a \in \mathbb{R}$ ou bien $b \in \mathbb{R}$ (Pourquoi) : Pour $b \in \mathbb{R}$, *il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} F^{-1}(x)$ n'existe pas (Voir cours) :* On a $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F(t) = b$ alors, en utilisant les graphes de F et F^{-1}, on obtient que $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} F^{-1}(x) = +\infty$. De même, on montre que si $a \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} F^{-1}(x) = -\infty$ (A le faire).

Exercice 9 *(Propriétés de la solution du problème de Cauchy 1)*

Considérons l'équation $y' = (1 + \cos t)\, y - y^3$................................(e)

1. *Soient $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Etudier l'existence et l'unicité de la solution maximale y de l'équation (e) qui vérifie $y(t_0) = y_0$.*

   Réponse : La fonction f définie par $f(t, y) = (1 + \cos t)\, y - y^3$ est continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ (Pourquoi). De plus, elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ (Pourquoi) alors elle est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz sont vérifiées. Ce qui implique que l'équation (e) admet une solution maximale unique qui vérifie $y(t_0) = y_0$.

2. *Soit φ une solution maximale de (e) tel qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(\tau) = 0$. Que peut on dire sur φ.*

   Réponse : Puisque la fonction nulle ψ sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale de (e) qui vérifie $\psi(\tau) = 0$ (Pourquoi). Alors, φ et ψ sont deux solutions maximales du même problème de Cauchy $\begin{cases} y' = (1 + \cos t)\, y - y^3, \\ y(\tau) = 0. \end{cases}$ D'aprés l'unicité de la solution maximale de ce problème de Cauchy avec $(t_0, y_0) = (\tau, 0) \in \mathbb{R}^2$ (Voir question 1), on trouve que $\varphi = \psi$ et $J_\varphi = \mathbb{R}$. Ainsi, φ est la solution nulle sur $\mathbb{R}$.

3. *Montrer que la solution maximale ϕ de (e) qui vérifie $\phi(0) = 1$ est une fonction strictement positive sur son intervalle de définition J. Puis, montrer que $\phi(t) \leq e^{2t}$ pour tout $t \in J_+ = \{t \in J : t \geq 0\}$.*

   Réponse : Puisque $\psi(0) = 0$ et $\phi(0) = 1$ alors $\psi(0) \neq \phi(0)$. Donc, ψ et ϕ sont deux solutions maximales différentes ($\psi \neq \phi$). Ce qui implique que leurs graphes ne se coupent pas. Ce qui implique que le graphe de ϕ est ou bien en dessus ou bien en dessous de l'axe des abscisses qui est le graphe de la fonction nulle ψ.

Puisque $\phi(0) = 1 > 0$ alors le graphe de ϕ est en dessus. Ainsi, ϕ est une fonction strictement positive sur J.

Montrons que que $\phi(t) \leq e^{2t}$ *pour tout* $t \in J_+ = \{t \in J : t \geq 0\}$: Pour tout $u \in J$, on a

$$\frac{\phi'(u)}{\phi(u)} = \frac{(1+\cos u)\,\phi(u) - \phi^3(u)}{\phi(u)} \leq 2 \text{ car } \phi > 0 \text{ et } \cos u \leq 1.$$

Soit $t \in J_+$. On a

$$\ln(\phi(t)) \underset{\phi>0}{\overset{\phi(0)=1}{=}} \ln|\phi(t)| - \ln|\phi(0)| = \int_0^t \frac{\phi'(u)}{\phi(u)} du \leq 2\int_0^t du = 2t.$$

C'est à dire, $\ln(\phi(t)) \leq 2t$. Prenons l'exponentielle pour trouver $\phi(t) \leq e^{2t}$. Ainsi, on a démontré que, pour tout $t \in J_+$, on a $\phi(t) \leq e^{2t}$.

Exercice 10 *(Propriétés de la solution du problème de Cauchy 2)*

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = t^3 + y^3$ qui vérifie $y(0) = a > 0$ et $J =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition.

1. *Montrer que y est strictement croissante sur* $[0, \beta[$

   Réponse : On a $y \in C^1(J)$ (Pourquoi) alors y' est continue sur J. Mais $y'(0) = 0^3 + y^3(0) = a^3 > 0$. Alors, y' garde son signe sur un voisinage V de $t = 0$ (Propriété des fonctions continues). Si $[0, \beta[\subset V$ la démonstration est terminée. Sinon, soit γ tel que $0 < \gamma < \beta$ et $[0, \gamma[\subset V$ alors $y' > 0$ sur $[0, \gamma[$. Ceci implique que $y(\gamma) = \lim_{t \overset{<}{\longrightarrow} \gamma} y(t) \geq y(0) > 0$. Ainsi $y(\gamma) > 0$. De même, on montre que $y'(\gamma) > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y' > 0$ sur $[\gamma, \gamma + \varepsilon[$. Continuons cette opération jusqu'a qu'on obtient $y' > 0$ sur $[0, \beta[$. Ceci implique que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$.

2. *Montrer que β est fini.*

   Réponse : Soit $t \in [0, \beta[$. Pour tout $u \in [0, t]$, on a $y'(u) = u^3 + y^3(u) \geq y^3(u)$ mais $y(u) \geq y(0) > 0$ alors $\int_0^t \frac{y'(u)}{y^3(u)} du \geq \int_0^t du = t$. Mais $\int_0^t \frac{y'(u)}{y^3(u)} du = \frac{1}{2y^2(0)} -$

$\frac{1}{2y^2(t)} \leq \frac{1}{2a^2}$, alors $0 \leq t \leq \frac{1}{2a^2}$. C'est à dire, on a montré que

$$\forall t \in [0, \beta[: t \in \left[0, \frac{1}{2a^2}\right].$$

ce qui implique que $[0, \beta[\subset \left[0, \frac{1}{2a^2}\right]$. Ainsi, β est fini car $\beta \leq \frac{1}{2a^2}$.

Exercice 11 *(Propriétés de la solution du problème de Cauchy 3)*

1. *Justifier l'existence de la solution maximale unique y de $y' = \frac{1}{1+ty}$ qui vérifie $y(0) = 0$.*

   Réponse : La fonction f définie par $f(t, y) = \frac{1}{1+ty}$ est de classe C^1 sur **l'ouvert** D_f=R $^2 - \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + ty = 0\}$ car c'est l'inverse de la fonction polynôme qui est une fonction non nulle et de classe C^1 sur cet ensemble. Ce qui implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur D_f. En plus, elle est continue sur cet ensemble. On a $(0, 0) \in D_f$. Ainsi, les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifies. Ceci implique que l'équation $y' = \frac{1}{1+ty}$ admet une solution maximale unique qui vérifie $y(0) = 0$.

2. *Montrer que y est une fonction impaire sur son intervalle de définition.*

   Réponse : Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle de définition de y. Considérons la fonction z définie sur $]-\beta, -\alpha[$ par $z(t) = -y(-t)$. Soit $t \in]-\beta, -\alpha[$. On a $z(t) = -y(-t) \in [-r_0, r_0]$ (Pourquoi) et

$$z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = f(-t, y(-t)) = \frac{1}{1 - ty(-t)} = \frac{1}{1 + tz(t)} = f(t, z(t)).$$

   En plus, on a $z(0) = -y(0) = 0$. Ainsi, z est une autre solution de $y' = \frac{1}{1+ty}$ qui vérifie $y(0) = 0$. Puisque y est une solution maximale de $y' = \frac{1}{1+ty}$ alors elle est un prolongement de la solution z ie. $]-\beta, -\alpha[\subset]\alpha, \beta[$ et $z = y$ sur $]-\beta, -\alpha[$. On a $]-\beta, -\alpha[\subset]\alpha, \beta[$ implique que $0 < \beta = -\alpha$ (Pourquoi). De plus, $z = y$ sur $]-\beta, -\alpha[$ implique que $y(-t) = -y(t)$ pour tout $t \in]-\beta, -\alpha[=]-\beta, \beta[$. Ceci veut dire que y est impaire sur $]-\beta, \beta[=]\alpha, \beta[$.

3. *Montrer que y est une fonction croissante sur son intervalle de définition.*

Réponse : Puisque $f \in C^0(D_f)$ alors d'aprés l'exercice 3 avec $k=0$, la solution $y \in C^1(]\alpha,\beta[)$. Ce qui implique que $y' \in C^0(]\alpha,\beta[)$. Mais $y' = \frac{1}{1+ty} \neq 0$ sur $]\alpha,\beta[$ alors y' a un signe constant sur $]\alpha,\beta[$. On a $y'(0) = \frac{1}{1+0y(0)} = 1 > 0$ alors y' est une fonction positive sur $]\alpha,\beta[$. Ceci implique que y est une fonction croissante sur $]\alpha,\beta[$.

Exercice 12 *(Propriétés de la solution du Problème de Cauchy 4)*

Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -\frac{2t}{1+t^2}y - t^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ....(P)

1. *Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale $\varphi : J =]-T,T[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.*

Réponse : Le problème (P) est un problème de Cauchy sous la forme $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ avec f est une fonction définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ par $f(t,y) := -\frac{2t}{1+t^2}y - t^2y^2$. $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

1/ *Montrons que (P) admet une unique solution maximale :* On a

* f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car $f = f_1 + f_2$ est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$: $f_1(t,y) = -\frac{2t}{1+t^2}y = \frac{-2ty}{1+t^2}$ (quotient de deux fonctions polynômes (continues sur $\mathbb{R}^2$) et $1+t^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^2$) et $f_2(t,y) = -t^2y^2$ (continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme).

** f est localemnt Lipschitzienne en y sur $\mathbb{R}^2$. car $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *Question : Pourquoi* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

*** $(t_0, y_0) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, le problème (P) admet une unique solution maximale φ définie sur un intervalle J.

2/ *Montrons que $J =]-T,T[$* : On a $J =]S,T[$ (car φ est maximale) avec $S < 0 < T$ (car le domaine de définition de φ contient le temps initial $t_0 = 0$). Considèrons maintenant la fonction z définie sur $]-T,-S[$ par $z(t) = -\varphi(-t)$. Montrons, ensuite, que z est aussi une solution de (P). Puisque φ est une solution maximale alors $]-T,-S[\ \subset\ ]S,T[$. Ainsi, $S=-T$ (Pourquoi). Ce qui implique que $J =]S,T[=]-T,T[$.

3/ *Montrons que* $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$: On a $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ car $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ (*Résultat :* Soit $k \in \mathbb{N}$. *Si* $f \in C^k(I \times \Omega)$ *alors toute solution* y *de* $y' = f(t,y)$ *est de classe* $C^{k+1}(J)$. *Ici,* J *est le l'intervalle de définition de* y.)

2. *Vérifier que* φ *est de classe* C^2 *sur* J.

   Réponse : Puisque $f \in C^{k=1}(\mathbb{R}^2)$ alors $\varphi \in C^{k+1=1+1}(J) = C^2(J)$. (Ici $f(t,y) := -\frac{2t}{1+t^2}y - t^2y^2$ pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$)

3. *Est ce que* φ *est de classe* $C^\infty(J)$.

   Réponse : *Montrons que pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *on a* $\varphi \in C^m(J)$: Soit $m \in \mathbb{N}$. Puisque $f \in C^{k=m-1}(\mathbb{R}^2)$ alors la solution $\varphi \in C^{k+1=(m-1)+1}(J) = C^m(J)$.

4. *Montrer que pour tout* $t \in J$ *on a* $\varphi(t) > 0$.

   Réponse : Par l'absurde, on suppose qu'il existe $t_* \in J$ tel que $\varphi(t_*) \le 0$.

   Cas 1 : Si $\varphi(t_*) = 0$ alors φ est aussi une solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -\frac{2t}{1+t^2}y - t^2y^2 \\ y(t_*) = 0 \end{cases}$. Mais la solution nulle est aussi une solution sur $\mathbb{R}$ de ce système (Pourquoi). Alors, on obtient que $\varphi = 0$ sur $J \cap \mathbb{R} = J$. Puisque $0 \in J$ alors $\varphi(0) = 0$. Contradiction avec $\varphi(0) = 1$.

   Cas 2 : Si $\varphi(t_*) < 0$ (Ici $t_* \neq 0$ pourquoi) alors on utilise le théorème des valeurs intermidiaires dans l'intervalle d'extrimités 0 et t_* sur la fonction continue φ pour montrer qu'il existe $t^* \in (0,t_*)$ tel que $\varphi(t^*) = 0$. Puis, on obtient la contradiction comme dans le cas 1. (A le faire)

5. *Déduire que* φ *est décroissante sur* $[0,T[$.

   Réponse : φ est la solution de (P) alors $\varphi' = -\frac{2t}{1+t^2}\varphi - t^2\varphi^2 = -\left(\frac{2t}{1+t^2}\varphi + t^2\varphi^2\right) \le 0$ sur $[0,T[$. Ainsi, φ est décroissante sur $[0,T[$.

6. *Déduire que* $0 < \varphi(t) \le 1$ *pour tout* $t \in [0,T[$.

Réponse : Soit $t \in [0, T[$:

* De la question 4, on trouve que $0 < \varphi(t)$.

** Puisque $t \geq 0$ et φ est décroissante sur $[0, T[$ alors $\varphi(t) \leq \varphi(0) = 1$. C'est à dire, $\varphi(t) \leq 1$.

7. *Montrer que* $T = +\infty$.

   Réponse : Par l'absurde, On suppose que $T < +\infty$. Puisque φ est décroissante sur $[0, T[$ (d'aprés Q 5) et minorée sur $[0, T[$ (d'aprés Q. 6) alors $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} T} \varphi(t)$ existe. Ensuite, on montre que le prolongement par continuité $\widetilde{\varphi}$ de φ est une solution de (P) sur $]-T, T]$ (A le faire). Ce qui représente une contradiction avec φ une solution maximale de (P) sur $J =]-T, T[$.

8. *Montrer que* $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$ *existe et vaut à zéro.*

   Réponse : Puisque φ est décroissante et minorée sur $[0, T[= [0, +\infty[$ alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$ existe. Posons $l := \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t)$.

   Au début, on note que puisque $0 < \varphi(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ alors, aprés passage à la limite, on trouve que $0 \leq \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = l$. C'est à dire, $l \geq 0$.

   Montrons que $l = 0$: Par l'absurde, supposons que $l \neq 0$. De la remarque ci-dessus, $l > 0$. Ceci implique que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi'(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \left[-\frac{2t}{1+t^2}\varphi - t^2\varphi^2\right] = -\infty$. Alors

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall u, u \geq B \Longrightarrow \varphi'(u) \leq -A.$$

   Pour $A = 1$, on trouve $B > 0$ tel que $\varphi'(u) \leq -1$ pour tout $u \geq B$.

   Pour tout $t \geq B$, on a

$$\varphi(t) = \varphi(B) + \int_B^t \varphi'(u)\, du \leq \varphi(B) - \int_B^t 1 du = \varphi(B) + B - t.$$

   C'est à dire, pour tout $t \geq B$ on a $\varphi(t) \leq \varphi(B) + B - t$. Puisque $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} (\varphi(B) + B - t) = -\infty$ alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = -\infty$ (pourquoi). Ceci est une contradiction avec $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = l \in \mathbb{R}$.

9. *Vérifier que la fonction définie par $\psi = \frac{1}{\varphi}$ est bien définie sur J.*

   Réponse : Puisque $\varphi > 0$ sur J alors $\varphi \neq 0$ sur J. Ainsi ψ est bien définie sur J.

10. *Trouver une équation différentille ordinaire ordinaire d'ordre un sur ψ.*

    Réponse : On a

$$\begin{aligned} \psi' &= \left(\frac{1}{\varphi}\right)' = \frac{-\varphi'}{\varphi^2} = \frac{-\left[-\frac{2t}{1+t^2}\varphi - t^2\varphi^2\right]}{\varphi^2} \\ &= \frac{2t}{1+t^2}\frac{1}{\varphi} + t^2 = \frac{2t}{1+t^2}\psi + t^2 \end{aligned}$$

    C'est à dire $\psi' = \frac{2t}{1+t^2}\psi + t^2$.

11. *Expliciter ψ. (Trouver ψ)*

    Réponse : *Ind.* Remarquer que ψ vérifie $\psi' = \frac{2t}{1+t^2}\psi + t^2$ et $\psi(0) = 1$. Puis, on résout ce système.

12. *Vérifier que $\varphi(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t-arctgt)}$ pour tout $t \in J$.*

    Réponse : *Ind.* Remarquer que $\varphi = \frac{1}{\psi}$. Puis, on remplace ψ par sa valeur obtenu dans la question 11.

Exercice 13 *(Propriétés de la solution du pb de Cauchy 5)* **(Indication)**

Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ ....(P)

1. *Montrer que les hypothèses de Cauchy Lipschitz sont satisfaites.*

   Réponse : *Ind.* Les hypothèses de Cauchy Lipschitz sont : f est continue et Localement Lipschitzienne en y sur $I \times \Omega$. Ici $f(t,y) = y^2 + t^2$ pour tout $(t,y) \in I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que si y est solution de (P) sur J_y alors la fonction définie par $-y(-t)$ est aussi une solution de (P) sur $-J_y$.*

   Réponse : *Ind.* Il suffit de montrer que $-y(-t)$ vérifie le problème (P).

3. *Prouvez que y est strictement croissante sur J_y.*

Réponse : *Ind.* Utiliser $y^{'} = y^2 + t^2$.

4. On note $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (P).

   Montrer que u est impaire (*Ind.* Utiliser la question 2.). *Prouvez que* $\lim\limits_{t \longrightarrow \sup J} u(t) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{t \longrightarrow \inf J} u(t) = -\infty$ *(Ind. Par l'absurde.)*

Exercice 14 *(Applications du théorème de Cauchy Lipschitz)*

1. *Résoudre l'équation* $y^{'} = y^2$.

   Réponse : Notons par ψ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On a ψ est une solution maximale de $y^{'} = y^2$. Soit y une solution maximale différente de ψ c. à dire il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) \neq \psi(t_0)$. Les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz sont vérifies (A faire). Ce qui implique que les graphes de y et ψ sont disjoints car ils ne sont pas confondus. Ainsi, y ne s'annulle jamais. Donc, on peut déviser sur y pour avoir $\int \frac{y^{'}}{y^2} dt = \int dt$. Alors, $\frac{-1}{y} = t + C$ ceci implique que $y = \frac{-1}{t+C}$ avec $t \neq -C$. Ainsi, les solutions de $y^{'} = y^2$ sont $\psi = 0$, $y_1(t) = \frac{-1}{t+C}$ avec $t \in]-\infty, -C[$ et $y_2(t) = \frac{-1}{t+C}$ avec $t \in]-C, -\infty[$. Ici $C \in \mathbb{R}$.

2. *Utiliser le théorème de Cauchy Lipschitz pour démontrer que la fonction* f *définie par* $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ *n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à* y uniformément par rapport à t, *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Réponse : Par l'absurde, on suppose qu'elle est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors on trouve qu'elle vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz. Par conséquent, le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'} = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ admet une solution maximale unique. Ceci est une contradiction car ce problème de Cauchy admet deux solutions maximales différentes données par $y_1(t) = 0$, $y_1(t) = t|t|$ et $J_1 = J_2 = \mathbb{R}$.

Exercice 15 *(Solution globale)*

1. *Sans calculer la solution ; justifier l'existence d'une solution maximale unique* y *de l'équation* $y^{'} = 1 + y$ *qui vérifie* $y(0) = 1$.

Réponse : La fonction f définie par $f(t,y) = 1 + y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme. Ce qui implique que f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$. En plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, f vérifie les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz. On a $(t_0, y_0) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ alors l'équation $y' = 1 + y$ admet une solution maximale unique qui vérifie $y(0) = 1$.

2. *Déterminer son intervalle de définition.*

Réponse : Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. On a $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1 - y_2| \leq k(t)|y_1 - y_2|$. Avec $k(t) = 2 > 0$. Ici k est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, f est globalement Lipshitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \mathbb{R}$. Ainsi, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y + 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ admet une solution globale unique. Ce qui implique que l'intervalle de définition de y est $J = \mathbb{R}$.

1.7 Exercices supplémentaires

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Que veut dire y est une solution définie sur $[a,b]$ de l'équation (E).

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Soit y une solution de (E) définie sur $]\alpha, +\infty[$. Montrer que si $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} \alpha} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.

   (b) Soit y une solution de (E) définie sur $]-\infty, \beta[$. Montrer que si $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ n'existe pas alors y est une solution maximale.

3. Montrer que la fonction y définie sur $]1, +\infty[$ par $y(t) = \frac{1}{1-t}$ est une solution de $y' = y^2$. Est ce que c'est une solution maximale (Justifier). Est ce que c'est une solution globale (Justifier)

   Même questions pour :

(a) La fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $y(t)=t$. L'équation $y^{'}=\frac{t}{y}$. Que peut on dire si y est une solution de (E) définie sur $]-\infty,\beta[$ et $\lim\limits_{t \overset{<}{\longrightarrow} \beta} y(t)$ existe.

(b) La fonction y définie sur $]-\infty,2]$ par $y(t)=\frac{1}{\sqrt{2(2-t)}}$. L'équation $y^{'}=y^3$.

(c) La fonction y définie sur $]2,+\infty[$ par $y(t)=\frac{1}{t}$. L'équation $y^{'}=-y^2$.

(d) La fonction nulle sur $\mathbb{R}$. L'équation $y^{'}=y$. (Utiliser deux façons pour montrer que la solution est maximale)

(e) La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=e^{2t}$. L'équation $y^{'}=2y$.

(f) La fonction y définie sur $[3,9]$ par $y(t)=e^{2t}$. L'équation $y^{'}=2y$. (Utiliser deux façons pour montrer que la solution n'est pas maximale)

4. Considérons sur $I=]0,+\infty[$ l'équation $y^{'}=\frac{2y}{t}$. Soit $y:J=]3,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une solution définie par $y(t)=t^2$. Montrer que la solution $\widetilde{y}:\widetilde{J}=]2,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\widetilde{y}(t)=t^2$ est un prolongement de y.

5. On considère sur $I=\mathbb{R}$ l'équation $y^{'}=2\sqrt{|y|}$. Soit y une solution définie sur $J=]-1,1[$ par $y(t)=0$. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha\leq-1$ et $\beta\geq1$ et on considère les fonctions $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}$ définies par
$$\widetilde{y}_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}(t-\beta)^2 & \text{si } t\geq\beta,\\ 0 & \text{si } \alpha\leq t\leq\beta,\\ -(t-\alpha)^2 & \text{si } t\leq\alpha,\end{cases}$$
Montrer que les fonctions $\widetilde{y}_{\alpha,\beta}$ sont des solutions maximales qui prolongent y. Que peut on déduire.

6. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'}=t^2+e^{-y^2}, \\ y(0)=0, \end{cases}$ admet une solution locale.

7. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y^{'}=2\sqrt{|y|}, \\ y(0)=0. \end{cases}$ admet les deux solutions maximales y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t)=0$ et $y_2(t)=|t|\,t$. Que peut on déduire..
Remarquer que la fonction y_2 est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

8. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times]1,+\infty[$ par $f(t,y)=\frac{t}{y-1}$ est une fonction localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}\times]1,+\infty[$.

9. Montrer, en utilisant deux méthodes, que la fonction f définie par $f(t,y) = 2\sqrt{|y|}$ n'est pas localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.
10. Montrer que toutes les solutions de $y' = t\sqrt{t^2+y^2}$ sont globales.
11. Considérons l'équation $y' = a(t)\,y + b(t)$ où a, b sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Sans calculer la solution, montrer le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = a(t)\,y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ admet une solution globale unique de classe $C^2(\mathbb{R})$.
12. Montrer que si f est une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors elle est globalement Lipschitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \Omega$. Que peut on dire si elle est en plus continue sur $I \times \Omega$.

1.8 Fiche : Equations différentielles d'ordre 1

Dans tout ce qui suit, I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, J est un intervalle non vide de I et $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$.

1.8.1 Définitions

1. L'équation
$$y' = f(t,y) \tag{E}$$
est appelée **une équation différentielle du premier ordre (ou bien d'ordre un) sous la forme normale.**
2. On dit que y **est une solution de** (E) s'il existe un intervalle non vide $J \subset I$ tel que
   (a) Pour tout $t \in J$ on a $y(t) \in \Omega$.
   (b) y est dérivable sur J et vérifie $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in J$.

3. Soient $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de (E). Si $J \subset \widetilde{J}$ et $y = \widetilde{y}$ sur J alors on dit que $\widetilde{y}$ **est un prolongement de** y.
4. Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **solution maximale** si elle n'admet aucun prolongement $\widetilde{y} : \widetilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $J \subsetneq \widetilde{J}$. C'est à dire y est une solution définie sur un intervalle de définition le plus grand possible.
5. Si la solution y de (E) est définie sur tout I (ie. $J = I$) alors on dit que y est **une solution globale.**
6. L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appellée **une condition initiale de l'équation** (E).
7. Le problème
$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{PC}$$
est appelé **problème de Cauchy.**
8. Soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$. On dit que f est une fonction **Lipschitzienne, par rapport à** y **uniformément par rapport à** t, **sur** C s'il existe $k > 0$ tel que
$$\forall t \in C_1, \forall y_1, y_2 \in C_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k |x_1 - x_2|$$
Dans le cas où $C = I \times \Omega$, on dit que f est **une fonction globalement Lipschitzienne, par rapport à** x **uniformément par rapport à** t, **sur** $I \times \Omega$.
9. On dit que f est une fonction **localement Lipschitzienne, par rapport à** y **uniformément par rapport à** t, **sur** $I \times \Omega$ si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ ils existent $T_0, r_0 > 0$ tels que $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$ et f est une fonction Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur C.

1.8.2 Résultats

1. *Lemme de Gronwall :* Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $d \geq 0$ et $\psi \in C^0([a, b])$. On suppose que
$$\psi(t) \leq c + d \int_a^t \psi(u)\, du \text{ pour tout } t \in [a, b].$$
Alors $\psi(t) \leq ce^{d(t-a)}$ pour tout $t \in [a, b]$.

2. *Régularité de la solution :* Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k(I \times \Omega)$ alors toute solution y de $y' = f(t, y)$ est de classe $C^{k+1}(J)$. Ici, J est le l'intervalle de définition de y.

3. *Intervalle de définition d'une solution maximale : Si* f est une fonction continue sur $I \times \Omega$ alors l'intervalle de définition J de toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est ouvert.

4. *Equation intégrale équivalente au problème de Cauchy :* Soient J un intervalle non vide de I et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C^0(I \times \Omega)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) y est une solution du problème de cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

   (b) y est une fonction continue sur J, pour tout $t \in J$ on a $(t, y(t)) \in I \times \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\, du$.

5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et y une solution de (E) définie sur $]\alpha, +\infty[$. Si $\lim\limits_{t \xrightarrow{>} \alpha} y(t)$ **n'existe pas** alors y **est une solution maximale.**

6. Toute solution y de (E) se prolonge en une solution maximale $\widetilde{y}$. En général, ce prolongement n'est pas unique.

7. La solution globale est une solution maximale. Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globales.

8. *Théorème de Cauchy-Piano-Arzela :* On suppose que f est une fonction continue sur $I \times \Omega$. Soit $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $[y_0 - r_0, y_0 + r_0]$. Ici $T_0, r_0 > 0$ tel

que $C=[t_0-T_0,t_0+T_0]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]\subset I\times\Omega$ et $M:=\max\limits_{(t,y)\in C}|f(t,y)|$. Cette solution est appellée solution locale.

9. Si f est une fonction continue sur $I\times\Omega$ alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale.

10. Si $f\in C^1(I\times\Omega)$ alors f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I\times\Omega$.

11. *Théorème de Cauchy-Lipschitz :* On suppose que f est une fonction continue et localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I\times\Omega$. Alors, le problème de Cauchy (PC) admet une solution unique définie sur $[t_0-T,t_0+T]$ à valeur dans $[y_0-r_0,y_0+r_0]$. Ici $T\leq\min\left(T_0,\frac{r_0}{M}\right)$ avec $T_0,r_0>0$ tel que f soit Lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $C=[t_0-T_0,t_0+T_0]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]$ et $M=\sup\limits_{(t,y)\in C}|f(t,y)|$.

12. Soit f une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I\times\Omega$. Soient y_1 une solution de (E) définie sur J_1 et y_2 une solution de (E) définie sur J_2. S'il existe $t_0\in J_1\cap J_2$ tel que $y_1(t_0)=y_2(t_0)$ alors $y_1=y_2$ sur $J_1\cap J_2$.

13. Si f est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I\times\Omega$ alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution maximale unique.

14. Si f est une fonction continue et localement Lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $I\times\Omega$ alors les graphes de deux solutions maximales de (E) sont ou bien confondus ou bien disjoints.

15. Soit f une fonction continue sur $I\times\mathbb{R}$. S'ils existent deux fonctions continues $c,k:I\to R_+$ telles que

$$\forall(t,y)\in I\times\mathbb{R}:|f(t,y)|\leq c(t)+k(t)|y|$$

alors toute solution maximale de (E) est globale.

16. Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}$ et globalement Lipshitzienne, par rapport à y de rapport k avec $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, sur $I \times \mathbb{R}$. Alors le problème de Cauchy (PC) admet une solution globale unique.