Chapitre 4

Stabilité

4.1 Définitions

Considérons le système

$$X' = f(X) \tag{EA}$$

On suppose que $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction qui vérifie les conditions de Cauchy Lipschitz. Soient $t_0 \in I$ et $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre de (EA) c. à dire $f\left(\overline{X}\right) = 0$.

Définition 4.1.1 *On dit que $\overline{X}$ est stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 : \left(\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \delta\right) \Longrightarrow \left(\left\|X(t, t_0, X_0) - \overline{X}\right\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I\right).$$

Ici $X(., t_0, X_0)$ est la solution de $\begin{cases} X' = f(X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$

Définition 4.1.2 *On dit que $\overline{X}$ est asymptotiquement stable si*

1. *$\overline{X}$ est stable.*

2. *Il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\forall X_0 : \left\| X_0 - \overline{X} \right\| < \beta \Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} X\left(t, t_0, X_0\right) = \overline{X}.$$

Définition 4.1.3 *On suppose que $f(0) = 0$ (C. à dire l'origine est un point d'équilibre de (EA)). Le système (EA) est stable (resp. asymptotiquement stable) veut dire que l'origine est stable (resp. asymptotiquement stable).*

4.2 Théorèmes de stabilité

Théorème 4.2.1 ***(Méthode de Liapunov)*** *On suppose que $f(0) = 0$ et il existe une fonction V de classe C^1 telle que $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec U un voisinage de 0, $V(0) = 0$ et $V(X) > 0$ pour tout $X \neq 0$.*

1. *Si $V'(X) := \frac{d}{dt}(V(X)) \leq 0$ pour toute solution X non nulle de (EA) alors 0 est stable.*
2. *Si $V'(X) < 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est asymptotiquement stable.*
3. *Si $V'(X) > 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est instable (n'est pas stable).*

Application : Utilisons la méthode de Liapunov pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right). \end{cases}$ Considérons la fonction suivante : $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ pour tout $(x_1, x_2) \neq$

$(0,0)$. D'autre part, pour toute solution $(x_1,x_2) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x_1,x_2) \quad : &= \frac{d}{dt}\left(V(x_1,x_2)\right) = \frac{d}{dt}\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ &= 2x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt} \\ &= 2x_1\left(x_2 + x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right) \\ &= 2\left(x_1^2+x_2^2\right)^2 > 0 \text{ car } (x_1,x_2) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Ainsi, l'origine (le système) est instable.

Remarque 4.2.1 *On peut calculer* $V'(x_1,x_2)$ *comme suit*

$$\begin{aligned} V'(x_1,x_2) \quad : &= \frac{d}{dt}\left(V(x_1,x_2)\right) = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt}\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ &= \left(x_2 + x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)2x_1 + \left(-x_1 + x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)2x_2 \\ &= 2\left(x_1^2+x_2^2\right). \end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 ***(Stabilité des systèmes linéaires)*** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Le système* $X' = AX$ *est asymptotiquement stable Ssi toutes les valeurs propre de* A *ont une partie réelle strictement négative.*
2. *S'il existe une valeur propre* λ *de* A *telle que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *alors le système* $X' = AX$ *est instable.*

Application : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Etudions la stabilité asymptotique du système $Y' = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} Y$. Pour cela, voir exercice 6.

Théorème 4.2.3 ***(Méthode de linéairisation)*** *On suppose que* $f(0) = 0$. *Considérons la matrice Jacobienne de* $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ *donnée par* $Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

1. *Si toutes les valeurs propre de $Df(0,0)$ ont une partie réelle strictement négative alors le système (EA) est asymptotiquement stable.*

2. *S'il existe une valeur propre λ de $Df(0,0)$ telle que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *alors le système (EA) est instable.*

Application : Etudions la stabilité des points d'équilibre du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x+1), \\ \frac{dy}{dt} = x(y^3+1). \end{cases}$ ....$(Sys$

$\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y})$ est un point d'équilibre de $\left(Sys_{(x,y)}\right)$ alors $y(x+1) = 0$ et $x(y^3+1) = 0$. Ainsi, les points d'équilibre de ce système sont $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

Etudions la stabilité du point d'équilibre $(0,0)$ *:* On a

$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y(x+1)) & \frac{\partial}{\partial y}(y(x+1)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x(y^3+1)) & \frac{\partial}{\partial y}(x(y^3+1)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y & x+1 \\ y^3+1 & 3xy^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ les deux valeurs propre de $Df(0,0)$. Alors, il existe une valeurs propre $\lambda = \lambda_1$ de $Df(0,0)$ telle que $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\lambda_1 = 1 > 0$ alors l'origine est instable pour le système $(Sys_{(x,y)})$.

Etudions la stabilité du point d'équilibre $(-1,-1)$ *:* Le point d'équilibre $(-1,-1)$ est différent de l'origine alors

1. (a) Changement de variable $u = x - (-1) = x+1$ et $v = y - (-1) = y+1$.

   (b) Le système associé au nouveaux variables : On a

$$\begin{cases} u' = x' = y(x+1) = (v-1)u, \\ v' = y' = x(y^3+1) = (u-1)\left((v-1)^3 - 1\right) = (u-1)(v^3 - 3v^2 + 3v). \end{cases}$$

$$\text{Ainsi} \begin{cases} u' = (v-1)u = f_1(u,v), \\ v' = (u-1)(v^3 - 3v^2 + 3v) = f_2(u,v). \end{cases} \quad ....(Sys_{(u,v)})$$

(c) La matrice du système linéairisé de $\left(Sys_{(u,v)}\right)$: On a

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v-1 & u \\ v^3 - 3v^2 + 3v & (u-1)(3v^2 - 6v + 3) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(d) Conclusion : Les valeurs propre de $Df(0,0)$ sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$. Puisque $\operatorname{Re}\lambda_1 = -1 < 0$ et $\operatorname{Re}\lambda_2 = -3 < 0$ alors toutes les valeurs propre de $Df(0,0)$ ont une partie réelle strictement négative alors l'origine est asymptotiquement stable pour le système $(Sys_{(u,v)})$. Ceci implique que $(-1,-1)$ est asymptotiquement stable pour le système $(Sys_{(x,y)})$.

4.3 Exercices

Exercice 1

Soient $B \in \mathbb{R}^m$ et A une matrice à coefficients constants.

1. Montrer que $X' = AX + B$ admet un point d'équilibre Ssi $B \in \operatorname{Im} A$.
2. Montrer que le point d'équilibre de $X' = AX + B$ est stable Ssi l'origine du système homogène associé est stable.

Solution 1

Considérons les deux systèmes $X' = AX$.....(1) et $X' = AX + B$.....(2)

1. On a

$$\begin{aligned} \left((2) \text{ admet un point d'équilibre } \overline{Y}\right) &\Longleftrightarrow \left(A\overline{Y} + B = 0\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(B = A\left(-\overline{Y}\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow (B \in \operatorname{Im} A). \end{aligned}$$

2. Soient $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soient $X(., 0, X_0)$ la solution de $\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$ et $Y(., 0, Y_0)$ la solution de $\begin{cases} X' = AX + B, \\ X(0) = Y_0. \end{cases}$

Montrons que $X\left(., 0, Y_0 - \overline{Y}\right) = Y(., 0, Y_0) - \overline{Y}$: Il suffit de montrer que $Y(., 0, Y_0) - \overline{Y}$ est une solution de $\begin{cases} X' = AX, \\ X(0) = Y_0 - \overline{Y}. \end{cases}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \left(Y(t, 0, Y_0) - \overline{Y}\right)' &= Y'(t, 0, Y_0) = AY(t, 0, Y_0) + B \\ &= AY(t, 0, Y_0) + A\left(-\overline{Y}\right) = A\left(Y(t, 0, Y_0) - \overline{Y}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a $Y(0, 0, Y_0) - \overline{Y} = Y_0 - \overline{Y}$.

Montrons que le point d'équilibre de $X' = AX + B$ est stable Ssi l'origine du système homogène associé est stable : On a

$$((1)\ \text{est stable}) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 \in \mathbb{R}^n : \|X_0\| < \delta \Longrightarrow \|X(t, 0, X_0)\| < \varepsilon$$

Ceci est équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 = Y_0 - \overline{Y} \in \mathbb{R}^n : \left\|Y_0 - \overline{Y}\right\| = \|X_0\| < \delta \Longrightarrow \left\|Y(., 0, Y_0) - \overline{Y}\right\| = \left\|X\left(., 0, Y_0 - \overline{Y}\right)\right\| = \|X(t, 0, X_0)\| < \varepsilon$ Qui est équivalent à $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Y_0 \in \mathbb{R}^n : \left\|Y_0 - \overline{Y}\right\| < \delta \Longrightarrow \left\|Y(., 0, Y_0) - \overline{Y}\right\| < \varepsilon$ ceci est équivalent à $\overline{Y}$ est stable pour (2).

Exercice 2

Utiliser la méthode de la fonction de Liapunov pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right). \end{cases}$ (*Indication : Considérer la fonction* $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.)

Solution 2

On a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ si $(x_1, x_2) \neq 0$. En plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_1, x_2) &= 2x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt} \\
&= 2x_1\left(x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) \\
&= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 > 0 \text{ pour tout } (x_1, x_2) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, le système est instable.

Exercice 3

Etudier la stabilité de l'origine du système $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1y_2 + \varepsilon y_1^3 - 2\omega y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1^2 + \varepsilon y_2^5 + \omega y_1. \end{cases}$ ($\omega \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon < 0$.)

Indication : Utiliser la fonction $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_2^2$.

Solution 3

On a $V(0,0) = 0^2 + 20^2 = 0$ et $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_2^2 > 0$ si $(y_1, y_2) \neq 0$. En plus,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(y_1, y_2) &= 2y_1\frac{dy_1}{dt} + 4y_2\frac{dy_2}{dt} \\
&= 2y_1\left(2y_1y_2 + \varepsilon y_1^3 - 2\omega y_2\right) + 4y_2\left(-y_1^2 + \varepsilon y_2^5 + \omega y_1\right) \\
&= 2\varepsilon\left(y_1^4 + 2y_2^6\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon < 0$ alors $\frac{d}{dt}V(y_1, y_2) < 0$ pour $(y_1, y_2) \neq 0$. Donc V est une fonction stricte de Liapunov. Ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 4

Considérons la fonction suivante : $V(x, y) = x^2 + y^2$. Utiliser deux méthodes pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$

Solution 4

Méthode 1 (Stabilité des systèmes linéaires)

Le système s'écrit sous la forme $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propre de A sont $\lambda_1 = -1 - i$ et $\lambda_2 = -1 + i$. On a $\operatorname{Re}\lambda_1$ et $\operatorname{Re}\lambda_2$ sont strictement négatives.

C. à dire que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelles strictement négatives. Ceci implique que le système est asymptotiquement stable.

Méthode 2 (Méthode de Liapunov)

D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

D'autre part, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(-x+y) + 2y(-x-y) \\ &= -2\left(x^2+y^2\right) < 0. \end{aligned}$$

Alors le système est asymptotiquement stable.

Exercice 5

On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \tag{4.1}$$

1. Peut on étudier la stabilité du système (2) par la méthode de linéarisation.
2. Considérons la fonction $V(x,y) = 2x^2 + y^4$. Etudier la stabilité du système (2).

Solution 5

1. On a
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
alors $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ les deux valeurs propre de $Df(0,0)$ alors on ne peut rien dire sur le système nonlinéaire. Ainsi, on ne peut pas étudier la stabilité du système (2) par la méthode de linéarisation.
2. D'une part, on a $V(0,0) = 20^2 + 0^4 = 0$ et $V(x,y) = 2x^2 + y^4 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. D'autre part, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $V'(x,y) = 4x\frac{dx}{dt} +$

$4y^3\frac{dy}{dt} = -4xy^3 + 4y^3x = 0 \leq 0$, alors le système est stable.

Exercice 6 Les trois questions sont indépendantes :

1. Citer 3 méthodes pour étudier de la stabilité.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Etudier la stabilité du système $Y' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} Y$.
3. Utiliser la fonction de Liapunov définie sur $\mathbb{R}^2$ par $V(x,y) = x^2 + y^2$ pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2), \\ y' = -x - y(x^2+y^2). \end{cases}$

Solution 6

1. La méthode en utilisant la définition de la stabilité, la méthode de linéairisation et la méthode de la fonction de Liapunov.
2. Les deux valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -a$. Alors l'une des valeurs propre est de partie réelle strictement positive alors le système est instable.
3. *Etudions la fonction* V :
   (a) On a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Pour toute solution $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \\ &= \left[y - x\left(x^2+y^2\right)\right]2x + \left[-x - y\left(x^2+y^2\right)\right]2y \\ &= -2\left(x^2+y^2\right)^2 < 0. \end{aligned}$$

   Alors le système est asymptotiquement stable.