$y'(t) = f(t, y(t))$, $\forall t \in J$.

<u>Exemple</u> : considérons l'équation $y' = \frac{t}{y}$.

On a : $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, y) \longmapsto f(t,y) = \frac{t}{y}$

* $I = \mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}^*$ (est un ouvert).
* Montrons que la fonction $y : J =]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto y(t) = t$ est une solution de $y' = \frac{t}{y}$.

* $J =]-\infty, 0[\subset \mathbb{R} = I$
* Pour tout $t \in J =]-\infty, 0[$ on a

$y(t) \in \mathbb{R}^*$ $(t \neq 0)$

$y(t) \in \mathbb{R}^* = \Omega$

$\boxed{y(t) \in \Omega}$

* $y :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto y(t) = t$ est dérivable.

car c'est une fonction polynomiale.

* soit $t \in J =]-\infty, 0[$.

$y'(t) = (t)' = 1$ ... (1)

$\frac{t}{y(t)} = \frac{t}{t} = 1$ ... (2)

de (1) et (2) on trouve $y'(t) = \frac{t}{y(t)}$.

donc y est une solution.

Déf : Soient $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{y} : \tilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de (E). Si $J \subset \tilde{J}$ et $y = \tilde{y}$ sur J alors on dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y

Exemple : Considerons sur $I =]0, +\infty[$ l'éq

(*) ... $y' = \frac{2y}{t}$. soit $y : J =]3, +\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$

une solution de (*) définie par $y(t) = t^2$

La solution $\tilde{y} : \tilde{J} \;]2, +\infty[\subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{y}(t) = t^2$ est un prolongements de y car.

* $J =]3, +\infty[\subset]2, +\infty[= \tilde{J}$ Alors $J \subset \tilde{J}$ (1)

on a $\begin{cases} y = t^2 \\ \tilde{y} = t^2 \end{cases}$ fct : $t \longrightarrow t^2$ sur $\tilde{J}$ sur J

Alors $y = \tilde{y}$ sur J — (2)

De (1) et (2), on trouve que $\tilde{y}$ est un prolongement de y

Def = Une solution $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution maximale si elle n'admet aucun prolongement (solution) $\tilde{y} : \tilde{J} \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $J \subset \tilde{J}$

Cad y est une solution définie sur un intervalle de définitions J le plus grand possible (un intervalle maximale).

Notation : $J \subsetneq \tilde{J}$ veut dire J est strictement inclus $\tilde{J}$

Exemple : Considerons l'eq $y' = -4y$

+ Considerons la solution definie sur $J = \mathbb{R}$ par $y(t) = e^{-4t}$

on a y est maximale car elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle de définition maximale.

Deff = Si la solution y de (E) est definie sur tout I (i e $J = I$) alors y est dite globale.

Exemple : Considerons l'eq $y' = y$

Considerons la solution nulle $- \left[\begin{array}{l} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow y(t) = 0 \end{array} \right.$

On a la solution nulle est globale car $\begin{cases} I = \mathbb{R} \\ J = \mathbb{R} \end{cases}$ donc $\boxed{J = I}$

Résultats

(1) Si y est une solution globale de (E) Alors y est une solution maximale de (E)

(2) Ils existent des solutions maximales qui ne sont pas globale

(3) L'intervalle définition de la solution maximale est un intervalle ouvert.

(4) soit y une solution de (E) definie sur $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$

Si $\lim_{t \to a} y(t)$ n'exist pas

Alors y maximale

Les intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ sont.

$]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$]a, b[$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

$]-\infty, +\infty[$

(4)

Existence de la solution du problème de Cauchy

Problème de Cauchy

$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ avec

* I un interval ouvert de $\mathbb{R}$
* Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$

<u>Déf</u> La problème $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \to (PC)$

est appelé problème de Cauchy

L'égalité $y(t_0) = y_0$ est appelée une condition initiale de l'éq

$y' = f(t,y)$ ... (E)

<u>Example</u> $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est un problème de Cauchy

$y(0) = 1$ est une condition initiale de $y' = y^2$

Résultat (Th de Cauchy-Piano-Azelo)

on suppose que f est continue sur $I \times \Omega$

pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$

le problème de Cauchy (PC) admet une solution (local) definie

sur $\underbrace{[t_0 - T, t_0 + T]}_{J}$ à valeurs dans $\underbrace{[y_0 - r_0, y_0 + r_0]}_{\Omega}$

Ici $T, r_0 > 0$ tq: $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$

$M = \sup_{(t,y) \in C} |f(t,y)|$ / $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$

Résultat : Si f est continue sur $I \times \Omega$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy (Pc) admet une ~~solutions~~ maximale.

Exemple

Considron le Pb $\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(5) = 2 \end{cases}$ — $(*)$

on a $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, y) \longmapsto t^2 + y^2$ est continue sur $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

car :

c'est une fonction polynôme alors $(*)$ admet une solution maximale.

Existence et unicité de la Solution de Pb de Cauchy

Ils existent des pb de Cauchy qui admettent plus qu'une solution maximale par exemple

$* \begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ — $(*)$

$* \, y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto 0$ solution maximale de $(*)$

$* \, y_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^3$ solution maximale de $(*)$

$y_2' = (t^3)' = 3t^2$ — (1) / $3|y_2|^{\frac{2}{3}} = 3|t^3|^{\frac{2}{3}} = 3|t|^2 = 3t^2$

de (1) et (2) on trouve $y_2' = 3|y_2|^{\frac{2}{3}}$ donc y_2 solution de $y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$

$* \, y_2(0) = 0^3 = 0$ donc $y_2(0) = 0$ .. (4)

De (3) et (4) on trouve que y_2 est $\boxed{2}$ solution de $(*)$

Ainsi, la continuité de f sur $I \times \Omega$ est une condition insuffisante pour avoir l'unicité de la solution de Pb de Cauchy

<u>Résultat</u> <u>(Th de Cauchy - Lipshiz)</u>

Si f est continue et localement Lipshizienne par rapport à y, uniformement par rapport à t, sur $I \times \Omega$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega_0$ (PC) admet une solution maximale unique

<u>Remarque</u> Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors elle verifié les conditions de Cauchy Lipshiz

$f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Fonction Lipshitzienne par rapport à y :

Déf : soit $C = C_1 \times C_2 \subset I \times \Omega$ (inclus) on dit que f est une fct lipsehitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t, sur C s'il esciste $k > 0$ tq : $\forall t \in C_1$, $\forall y_1, y_2 \in C_2$, $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k |y_1 - y_2|$.

Exemple : On considere la fct f définie par $f(t,y) = 2\sqrt{y}$.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in [1;+\infty[$ on a :

$$= \frac{2|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} = \frac{2|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}$$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |2\sqrt{y_1} - 2\sqrt{y_2}| = 2\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} \quad --- (1)$$

mais $y_1 \geq 1$ et $y_2 \geq 1$ alors $\sqrt{y_1} \geq 1$ et $\sqrt{y_2} \geq 1$ donc : $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} \geq 2$

$\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} \leq \frac{1}{2}$ Donc (1) donne : $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \cancel{2}\frac{|y_1 - y_2|}{\cancel{2}} = |y_1 - y_2|$ ($k = 1$)

Donc f est lipshitzienne par rapport à y, uniformiment par rapport à t sur $C : \mathbb{R} \times [1;+\infty[$.

Déf : On dit que f est globalement lipshitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t si f est lipshitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t sur $C = I \times \Omega$.

EX : $f(t,y) = y$ $\quad I = \mathbb{R} \quad \Omega = \mathbb{R}$.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on a : $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$ ($k = 2$)

Donc f est globalement lipshitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t.

Déf : On dit que f est localement lipshitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t sur $I \times \Omega$ si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, il esciste $T_0, r_0 > 0$ tq : $C_{T_0,r_0} = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0] \subset I \times \Omega$.

et f est lipshitzienne par rapport à y uniformément à t sur C_{T_0,r_0}.

Exemple : $f(t,y) = y^2$, $I = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Soient $T_0, r_0 > 0$, soient $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ et $y_1, y_2 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$

on a : $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)| = |(y_1 - y_2)|\,|y_1 + y_2|$.

On a : $|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2|$ mais :

$y_1 \in [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$ donc $y_0 - r_0 \leq y_1 \leq y_0 + r_0$.

$$-r_0 = y_0 - r_0 - y_0 \leq y_1 - y_0 \leq y_0 + r_0 - y_0 = r_0$$

$$|y_0 - y_1| \leq r_0 \ldots \quad (1)$$

$|y_1| = |y_1 - y_0 + y_0| \leq |y_1 - y_0| + |y_0| \overset{(1)}{\leq} r_0 + |y_0|$ donc $|y_1| \leq r_0 + |y_0|$

Dém : $|y_2| \leq r_0 + |y_0|$.

Donc : $|f(t,y_0) - f(t_0,y_1)| \leq |y_1 - y_2|\,(|y_1| + |y_2|)$.

$$\leq (r_0 + |y_0| + r_0 + |y_0|)\,|y_1 - y_2|$$

$$= 2(r_0 + |y_0|)\,|y_1 - y_2|.$$

Il suffit de prendre $k = 2(r_0 + |y_0|) > 0$.

Resultat : si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors f est localement lipshitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t sur $I \times \Omega$

Applications : $f(t,y) = t + y^2$ en l.L y. uni sur $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$ car f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. (f est un fonction polynomiale).

~~EDO~~
3ème Année Maths
Cours et TD Corrigé

Partie I

solution maximale et globale d'une équation du premier ordre :

soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ considérons $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Déf l'équation $y' = f(t, y)$ .... (E)

est appellée une équation différentielle du premier ordre (ou bien d'ordre un) sous la forme normale.

Exemple : $y' = t\,y$ est une équation différentielle (ordinaire) du premier ordre sous la forme normale.

car elle s'écrit comme suit :

$$y' = f(t, y) \text{ avec } f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y) = ty.$$

Ici $*$ $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

$*$ $\Omega = \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}$.

Déf : On dit que y est une solution de (E) s'il existe un intervalle non vide $J \subset I$ tq :

① Pour $t \in J$ on a $y(t) \in \Omega$.

② y est dérivable sur J et vérifie