Université Batna 2, Département de Mathématiques
3ème année Licence Mathématiques
Module: Introduction à la théorie des opérateurs
2020/2021

Examen final

Partie 1 (9 pts) Complète: Soient X et Y deux.............................sur le corp $\mathbb{k}$ =..................

1. $\mathcal{L}(X,Y)$ représente.............................
2. Dans la litérature, $\mathcal{L}(X,Y)$ est noté, aussi, par............................
3. $\mathcal{L}(X,Y)$ est un.......................................muni de l'opération....................(+)
   et l'opération.............................(.).
4. $\mathcal{L}(X,Y)$ est un......................................muni de la norme définie comme suit:..............................
   Cette norme est appellée.................................
5. Si Y est complet alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est....................................
6. L'adjoint d'un opérateur linéaire borné est un opérateur............, ...et....................
7. Si (A_n) est une suite de $\mathcal{L}(X,Y)$ qui converge.....................alors elle converge ....
8. Si (A_n) est une suite de $\mathcal{L}(X,Y)$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n\|=0$ alors (A_n) converge ....
   vers.........................

Partie 2 (11 pts) On considère l'opérateur $A : l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})$ défini par

$$A(x_1,x_2,...) = (0,x_1,x_2,x_3,...) \text{ pour tout } (x_1,x_2,...) \in l_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A est bien défini, linéaire, borné et que $\|A\| = 1$.
2. Montrer que A est injectif. Puis, résoudre l'équation $A(x_1,x_2,...) = (1,1,1,0,0,0,...)$. Que peut on déduire.
3. Calculer A^*. Puis, par deux manières, montrer que A^* est borné.

Correction

Partie 1 (0,5 pt sur chaque réponse juste) Soient X et Y deux **espaces vectoriels normés** sur le corp $\Bbbk = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.

1. $\mathcal{L}(X, Y)$ représente **l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis de X vers Y.**
2. Dans la litérature, $\mathcal{L}(X, Y)$ est noté, aussi, par $\mathcal{B}(X, Y)$.
3. $\mathcal{L}(X, Y)$ est un **espace vectoriel** muni de l'opération **interne** $(+)$

   et l'opération.**externe** $(.)$.
4. $\mathcal{L}(X, Y)$ est un **espace normé** muni de la norme définie comme suit:

   $$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \textbf{ pour tout } A \in \mathcal{L}(X, Y).$$

   Cette norme est appellée.**la norme canonique sur $\mathcal{L}(X, Y)$.**
5. Si Y est complet alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est **complet.**
6. L'adjoint d'un opérateur linéaire borné est un opérateur **linéaire, borné et unique.**
7. Si (A_n) est une suite de $\mathcal{L}(X, Y)$ qui converge **uniformément** alors elle converge **ponctuellement.**
8. Si (A_n) est une suite de $\mathcal{L}(X, Y)$ tel que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n\| = 0$ alors (A_n) converge **uniformément** vers **l'opérateur nul.**

Partie 2 (1 pt sur chaque réponse juste sauf $\|A\| = 1$ sur 2 pts)

1. * Pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a $0^2 + x_1^2 + x_2^2 .... = \|(x_1, x_2, ...)\|_2^2 < +\infty$. Donc

   $$\forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}), A(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}).$$

   Cela veut dire que A est bien défini.

   **Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

   $$\begin{aligned} A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) &= A(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) \\ &= (0, \alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) \\ &= \alpha A(x_1, x_2, ...) + A(y_1, y_2, ...). \end{aligned}$$

Cela veut dire que A est linéaire.

*** Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \|A(x_1, x_2, ...)\|_2^2 &\overset{\text{déf. } A}{=} \|(0, x_1, x_2, x_3, ...)\|_2^2 \\ &\overset{\text{déf. } \|\cdot\|_2^2}{=} |0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + ... \\ = & \|(x_1, x_2, ...)\|_2^2 \leq \|(x_1, x_2, ...)\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$\exists M = 1 > 0, \forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a $\|A(x_1, x_2, ...)\|_2 \leq M \|(x_1, x_2, ...)\|_2 .... (*)$

Cela veut dire que A est borné.

**** De $(*)$, on trouve

$$\|A\| \leq 1........(1)$$

On pose $x_* = (0, 1, 0, 0, 0, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\frac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} = \frac{\|A(0, 1, 0, 0, 0, ...)\|_2}{\|(0, 1, 0, 0, 0, ...)\|_2} = \frac{\|(0, 0, 1, 0, 0, 0, ...)\|_2}{\sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |0|^2 + ...}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Mais

$$\frac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} \leq \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|A(x_1, x_2, ...)\|_2}{\|(x_1, x_2, ...)\|_2} = \|A\|.$$

Alors

$$1 \leq \|A\| .... (2)$$

De (1) et (2), on trouve que

$$\|A\| = 1.$$

2. * Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$[A(x_1, x_2, ...) = 0] \Longrightarrow [(0, x_1, x_2, x_3, ...) = (0, 0, 0, ...)] \Longrightarrow (x_1, x_2, ...) = 0.$$

Donc A est injectif.

** On a

$$[A(x_1, x_2, ...) = (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)] \Longrightarrow [(0, x_1, x_2, x_3, ...) = (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)] \Longrightarrow \underbrace{[0 = 1]}_{\textit{impossible}}$$

Ce qui implique que l'équation n'as pas de solution.

*** A n'est pas surjectif car il existe $(1, 1, 1, 0, 0, 0, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ tel l'équation $A(x_1, x_2, ...) = (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$ n'admet pas une solution (voir cours).

3. * Soient $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\langle A(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle &= \langle (0, x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle \\ &= 0y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + ...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x_1y_2 + x_2y_3 + ... \\ &= \left\langle (x_1, x_2, ...), \underbrace{(y_2, y_3, ...)}_{A^*(y_1, y_2, ...)} \right\rangle.\end{aligned}$$

C'est à dire $A^*(y_1, y_2, ...) = (y_2, y_3, ...)$ pour tout $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$.

** **Maniére 1:** Etude de la bornitude de l'opérateur $A^*(y_1, y_2, ...) = (y_2, y_3, ...)$ pour tout $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$.

Manière 2: Propriété de l'opérateur adjoint.