Université Batna 2
Département de Mathématiques
EDO Master 1: Mathématiques Appliquées
2020/2021

Examen Final

Qu'est ce qu'on a fait dans le chapitre stabilité des systèmes autonomes. (En donnant un exemple sur chaque notion et une application sur chaque résultat).

Correction.

(1pt) Les systèmes autonomes sont donnés par $X^{'} = f(X)$ où f une fonction qui vérifie les conditions de Cauchy Lipschitz.

*** *Exemple*

....

(2pts) $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre de (EA) si $f\left(\overline{X}\right) = 0$.

*** *Exemple*

....

(2pts) Soient $t_0 \in I$. On dit que $\overline{X}$ est stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 : \left(\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \delta\right) \Longrightarrow \left(\left\|X(t, t_0, X_0) - \overline{X}\right\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I\right).$$

Ici $X(., t_0, X_0)$ est la solution de $\begin{cases} X' = f(X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$

*** *Exemple*

....

(1 pts) On dit que $\overline{X}$ est asymptotiquement stable si

1. $\overline{X}$ est stable.
2. Il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall X_0 : \left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \beta \Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} X(t, t_0, X_0) = \overline{X}.$$

*** *Exemple*

....

(1pts) On suppose que $f(0) = 0$. Le système (EA) est stable (resp. asymptotiquement stable) veut dire que l'origine est stable (resp. asymptotiquement stable).

....

(4pts) Méthode de Liapunov: On suppose que $f(0) = 0$ et il existe une fonction V de classe C^1 telle que $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec U un voisinage de 0, $V(0) = 0$ et $V(X) > 0$ pour tout $X \neq 0$.

1. Si $V'(X) := \frac{d}{dt}(V(X)) \leq 0$ pour toute solution X non nulle de (EA) alors 0 est stable.
2. Si $V'(X) < 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est asymptotiquement stable.
3. Si $V'(X) > 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est instable (n'est pas stable).

*** *Application*

....

(3pts) Stabilité des systèmes linéaires: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système $X' = AX$ est asymptotiquement stable Ssi toutes les valeurs propre de A ont une partie réelle strictement négative.
2. S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$ alors le système $X' = AX$ est instable.

*** *Application*

....

(3pts) Méthode de linéairisation: On suppose que $f(0) = 0$. Considérons la matrice Jacobienne de $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ donnée par $Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

1. Si toutes les valeurs propre de $Df(0,0)$ ont une partie réelle strictement négative alors le système (EA) est asymptotiquement stable.
2. S'il existe une valeur propre λ de $Df(0,0)$ telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$ alors le système (EA) est instable.

*** *Application:*

....

(2pts) Stabilité d'un point d'équilibre différent de l'origine: Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre non nul du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y). \end{cases} \quad .... \left(Sys_{(x,y)}\right)$$

On considère le changement de variable $u = x - \overline{x}$ et $v = y - \overline{y}$. On considère le système associé à (u, v) donné par

$$\begin{cases} u' = g_1(u, v), \\ v' = g_2(u, v). \end{cases} \quad ....(Sys_{(u,v)})$$

On a

$$Dg(0, 0) = Df(\overline{x}, \overline{y}).$$

*** *Application:*

....

NB:

— L'étudiant qui a donné une information différente de ce qui existe dans le corrigé **(+1)**.

— **(+1)** sur la présentation de la copie.