Université de Batna 2, Département de Mathématiques
1 Année Master (Mathématiques Appliquées)
Equations Différentielles Ordinaires
Interrogations et Examens: 2011-2017

Interrogation (2011/2012)

1. Déterminer le diagramme de phase et le sens de direction des trajectoires du système $\begin{cases} y_1' = y_1 y_2, \\ y_2' = -y_1^2. \end{cases}$

2. Montrer que la fonction définie par $F(x,y) = cx + by - d\ln x - a\ln y$ est une intégrale première du système $\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_1y_2, \\ y_2' = cy_1y_2 - dy_2. \end{cases}$

3. Considérons le système w-périodique $Y' = AY$. Montrer que si la résolvante vérifie $R(w,t_0) = R(0,t_0)$ alors la solution du système $\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ est une solution $w-$périodique.

Contrôle final (2011/2012)

Exercice 1 (4pts)

Donner la définition d'un système autonome puis citer trois propriétés de ce type de système.

Exercice 2 (5pts)

Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue $\omega-$périodique. On considère l'équation différentielle $y' = ay$.

1. Montrer que si $\int_0^\omega a(s)\,ds \neq 0$ alors il n'existe pas une solution non nulle qui est $\omega-$périodique.

2. Montrer que si $\int_0^\omega a(s)\,ds = 0$ alors toute solution de l'équation est $\omega-$périodique.

Exercice 3 (3pts)

Soient a, b, c et d des constantes strictement positives. Montrer que la fonction $F(y_1,y_2) = -c\ln y_1 + dy_1 - a\ln y_2 + by_2$ est une intégrale première du système $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = ay_1 - by_1y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -cy_2 + dy_1y_2. \end{cases}$ Puis déduire qu'il existe $F_0 \in \mathbb{R}$ telle que $F(y_1(t), y_2(t)) = F_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (8pts)

Etudier la stabilité de l'origine des systèmes suivants:

1. $\left\{\begin{array}{c} \frac{dy_1}{dt} = y_2^2 + y_1 \cos y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2 + (y_1+1)\, y_1 + y_1 \sin y_2. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{c} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 y_2 + \varepsilon y_1^3 - 2\omega y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1^2 + \varepsilon y_2^5 + \omega y_1. \end{array}\right.$ $(\omega \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon < 0.)$

   Indication: Utiliser la fonction $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_2^2$.

Correction

Solution 1

Voir Cours.

Solution 2

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont données par $y(t) = ce^{\int_0^t a(s)ds}$ avec $c \in \mathbb{R}$. Toutes les solutions vérifient: $y(0) = c$ et $y(\omega) = ce^{\int_0^\omega a(s)ds}$.

1. Par l'absurde: On suppose qu'il existe une solution non nulle y qui est $\omega-$périodique. D'une part, $c \neq 0$ car $y \neq 0$. D'autre part, y est $\omega-$périodique alors $y(\omega) = y(0)$ c à dire $ce^{\int_0^\omega a(s)ds} = c$. Puisque $c \neq 0$ alors $\int_0^\omega a(s)\, ds = 0$. Contradiction avec $\int_0^\omega a(s)\, ds \neq 0$.

2. Soit y une solution du système considéré alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $y(t) = ce^{\int_0^t a(s)ds}$. Si $\int_0^\omega a(s)\, ds = 0$ alors $ce^{\int_0^\omega a(s)ds} = c$. C. à dire $y(\omega) = y(0)$. Puisque le système est $\omega-$périodique alors y est $\omega-$périodique.

Solution 3

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(y_1, y_2) &= \frac{dy_1}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1, y_2) + \frac{dy_2}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_2}(y_1, y_2) \\ &= -\frac{c}{y_1}\frac{dy_1}{dt} + d\frac{dy_1}{dt} - \frac{a}{y_2}\frac{dy_2}{dt} + b\frac{dy_2}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{c}{y_1}(ay_1 - by_1y_2) + d(ay_1 - by_1y_2) \\ &\quad -\frac{a}{y_2}(-cy_2 + dy_1y_2) + b(-cy_2 + dy_1y_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors, F est une intégrale première du système.

Puisque F est une intégrale première alors $F(y_1, y_2)$ est une fonction constante c. à dire il existe $F_0 \in \mathbb{R}$ telle que $F(y_1(t), y_2(t)) = F_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution 4

1. Le système linéarisé au voisinage de l'origine est $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A admet une valeur propre double $\lambda = 1$. Donc, elle admet une valeur propre à partie réelle strictement positive donc le système nonlinéaire est instable aussi.

2. On a $V(0,0) = 0^2 + 20^2 = 0$ et $V(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_2^2 > 0$ si $(y_1, y_2) \neq 0$. En plus,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(y_1, y_2) &= 2y_1 \frac{dy_1}{dt} + 4y_2 \frac{dy_2}{dt} \\ &= 2y_1 \left(2y_1 y_2 + \varepsilon y_1^3 - 2\omega y_2\right) + 4y_2 \left(-y_1^2 + \varepsilon y_2^5 + \omega y_1\right) \\ &= 2\varepsilon \left(y_1^4 + 2y_2^6\right). \end{aligned}$$

   Puisque $\varepsilon < 0$ alors $\frac{d}{dt} V(y_1, y_2) < 0$ pour $(y_1, y_2) \neq 0$. Donc V est une fonction stricte de Liapunov. Ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable.

Interrogation (2011/2012)

Exercice 1

Soient A est une matrice $\omega-$périodique et M une matrice fondamentale de $X' = A(t) X$. Soient P et B les matrices données dans le théorème de Floquet appliqué sur M.

1. Montrer que $P' = AP - PB$
2. Montrer que le changement de variable $Z = P^{-1}(t) X$ transforme le système $X' = A(t) X$ au système $Z' = BZ$.
3. Quelle est l'objectif de ce changement de variable.

Exercice 2

A est une matrice $\omega-$périodique. Définissons la matrice de Monodromie de $X' = A(t) X$ comme la matrice C associée à la matrice fondamentale $R(., t_0)$. Montrer que $C = R(t_0 + \omega, t_0)$.

Correction

Solution 1

1. M est une matrice fondamentale de $X' = A(t)X$ alors $M'(t) = A(t)M(t)$. Donc

$$\begin{aligned}\left[M'(t) = A(t)M(t)\right] &\Longleftrightarrow \left[\left(P(t)e^{tB}\right)' = A(t)P(t)e^{tB}\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[P'(t)e^{tB} + P(t)Be^{tB} = A(t)P(t)e^{tB}\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[P'(t) = A(t)P(t) - P(t)B\right].\end{aligned}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $Z(t) = P^{-1}(t)X(t)$ implique que $X(t) = P(t)Z(t)$. Alors

$$\begin{aligned}\left[X'(t) = A(t)X(t)\right] &\Longleftrightarrow \left[(P(t)Z(t))' = A(t)P(t)Z(t)\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[P'(t)Z(t) + P(t)Z'(t) = A(t)P(t)Z(t)\right]\\ &\Longleftrightarrow \left[Z'(t) \overset{*}{=} P^{-1}(t)A(t)P(t)Z(t) - P^{-1}(t)P'(t)Z(t)\right]\\ &\overset{question1}{\Longleftrightarrow} \left[Z'(t) = BZ(t)\right].\end{aligned}$$

3. L'objectif de ce changement est de passer d'un système à coefficients variable à un système à coefficients constant.

Solution 2

D'aprés le théorème de Floquet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $R(t, t_0) = P(t)e^{tB}$ où P est une matrice qui dépend de t, qui est $\omega-$périodique et $P(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ et B une matrice constante. On a

$$\begin{aligned}R(t_0+\omega, t_0) &= P(t_0+\omega)e^{(t_0+\omega)B} = P(t_0)e^{t_0B+\omega B} \text{ car } P \text{ est } \omega-\text{périodique}\\ &= P(t_0)e^{t_0B}e^{\omega B} \text{ car } t_0B \text{ et } \omega B \text{ commutent}\\ &= R(t_0, t_0)e^{\omega B} = I_nC = C.\end{aligned}$$

C'est à dire $C = R(t_0+\omega, t_0)$.

Exercice 1

A est une matrice $\omega-$périodique. Montrer que si le système $X' = A(t)X$ admet m valeurs caractéristiques distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ alors il admet m solutions pseudo- périodiques L. I.

Exercice 2 *(Méthode de* $\det A$, trA et Δ_A*)*

On considère le système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Etudier la classification de l'origine en utilisant $\det A$, trA et $\Delta_A = \Delta(P(\lambda))$ où $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$.

Application: Classer l'origine pour le système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction

Solution 1

Le système $X' = A(t)X$ admet m valeurs caractéristiques distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ alors la matrice $C = e^{\omega B}$ admet m valeurs propre distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Donc ils existent m vecteurs propres L. I. $X_1^0, X_2^0, ..., X_m^0$ associés (resp) à $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Pour tout $i = 1, ..., m$, on pose $X_i = R(.,0)X_i^0$. On a vu (voir cours) que X_i est une solution pseudo-périodique.

Montrons que $X_1, X_2, ..., X_m$ *sont L. I.*: Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_m X_m = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + ... + \alpha_m X_m(t) = 0$. Donc $\alpha_1 R(t,0)X_1^0 + \alpha_2 R(t,0)X_2^0 + ... + \alpha_m R(t,0)X_m^0 = 0$. Pour $t = 0$ on trouve $\alpha_1 R(0,0)X_1^0 + \alpha_2 R(0,0)X_2^0 + ... + \alpha_m R(0,0)X_m^0 = 0$ alors $\alpha_1 X_1^0 + \alpha_2 X_2^0 + ... + \alpha_m X_m^0 = 0$. Ce qui implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ car $X_1^0, X_2^0, ..., X_m^0$ sont L. I.

Solution 2

On a $trA = a_{11} + a_{22}$ et $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (trA)\lambda + \det A. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : P(\lambda) = \lambda^2 - (trA)\lambda + \det A.$$

Ainsi

$$\Delta_A = \Delta(P(\lambda)) = \Delta\left(\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A\right) = (trA)^2 - 4\det A.$$

C'est à dire $\Delta_A = (trA)^2 - 4\det A$. D'autre part, si λ_1, λ_2 sont les deux valeurs de A alors elles sont les deux racines de P. Ainsi,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

C'est à dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : P(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

En comparant avec la première formule de $P(\lambda)$ on trouve $trA = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1\lambda_2$.

Etude de la classification de l'origine en utilisant $trA, \det A$ *et* Δ_A : On a

1. Cas $\det A = 0$: A admet une valeur propre nulle (On n'a pas étudier ce cas dans le cours)
2. Cas $\det A < 0$: On a $\det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$ alors λ_1 et λ_2 sont deux réelles de signe différent. D'aprés le cours, l'origine est un col.
3. Cas $\det A > 0$:
   (a) Si $trA = 0$ alors $\Delta_A = (trA)^2 - 4\det A = -4\det A < 0$ alors λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sont deux nombres complexes avec $2\operatorname{Re}\lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = trA = 0$. D'aprés le cours, l'origine est un centre.
   (b) Si $trA > 0$
      i. Si $\Delta_A = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. D'aprés le cours, l'origine est un noeud. répulsif.
      ii. Si $\Delta_A > 0$ alors λ_1 et λ_2 sont deux réelles positives . D'aprés le cours, l'origine est un noeud répulsif.
      iii. Si $\Delta_A < 0$ alors λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sont deux nombres complexes avec $2\operatorname{Re}\lambda_1 = trA > 0$. D'aprés le cours, l'origine est un foyer répulsif.
   (c) Si $trA < 0$. Similaire au cas b.

Interrogation (2013/2014)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Considérons le système de Liénard suivant $\begin{cases} x' = y - f(x), \\ y' = -x. \end{cases}$. Montrer que $(0, f(0))$ est un point d'équilibre et étudier sa nature.

Correction

1. On a $f_1(x,y) = y - f(x)$ et $f_2(x,y) = -x$. Alors, $f_1(0, f(0)) = f(0) - f(0) = 0$ et $f_2(0, f(0)) = -0 = 0$. Ce qui implique que $(0, f(0))$ est un point d'équilibre.

Pour étudier la nature de ce point d'équilibre on distingue deux cas:
Cas I: f est non linéaire. On distingue 2 cas
Cas I. 1: $f(0)=0$. Dans ce cas, $(0,f(0))=(0,0)$ est le point d'équilibre.
La matrice du système linéairisé au voisinage de l'origine est

$$A=Df(x,y)_{(0,0)}=\begin{pmatrix} -f'(x) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{(0,0)}=\begin{pmatrix} -f'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det A=1>0, trA=-f'(0) \text{ et } \Delta_A=(trA)^2-4\det A=\left(f'(0)\right)^2-4.$$

Donc

1. Si $f'(0)\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$ alors $\Delta_A>0$. Ce qui implique que l'origine est un noeud pour le système linéairisé. Ainsi l'origine est un noeud pour le système de Liénard.
2. Si $f'(0)\in[-2,2]-\{0\}$ alors $\Delta_A\leq 0$ et $trA\neq 0$. Ce qui implique que l'origine est un foyer pour le système linéairisé. Ainsi l'origine est un foyer pour le système de Liénard.
3. Si $f'(0)=0$ alors $trA=0$. Ce qui implique que l'origine est un centre pour le système linéairisé. Ainsi on ne peut rien dire sur la nature de l'origine pour le système de Liénard.

Cas I. 2: $f(0)\neq 0$.
Changement de variable: $u=x$ et $v=y-f(0)$. Le nouveau système est $\begin{cases} u'=v+f(0)-f(u), \\ v'=-u. \end{cases}$
La matrice du système linéairisé au voisinege de l'origine est

$$B=Dg(u,v)_{(0,0)}=\begin{pmatrix} -f'(u) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{(0,0)}=\begin{pmatrix} -f'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $B=A$ alors on a les mêmes résultats 1, 2 et 3.
Cas II: f est linéaire. C'est à dire il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=\alpha x$. Dans ce cas, le système de Liénard est un système linéaire sous la forme $X'=\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}X$. On a

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=1>0, tr\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-\alpha$$

et

$$\Delta_{\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \left(tr\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 - 4\det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha^2 - 4.$$

a. Si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors $\Delta_A > 0$. Ce qui implique que l'origine est un noeud.

b. Si $\alpha \in [-2, 2] - \{0\}$ alors $\Delta_A \leq 0$ et $trA \neq 0$. Ce qui implique que l'origine est un foyer

c. Si $\alpha = 0$ alors $trA = 0$. Ce qui implique que l'origine est un centre.

Contrôle final (2013/2014)

Exercice 1 (5pts)
Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x^3. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que le système (1) est un système Hamiltonien.
2. Déduire une intégrale première du système (1).
3. Utiliser deux méthodes pour trouver l'équation des trajectoires.

Exercice 2 (4pts)
Considérons la fonction suivante: $V(x, y) = x^2 + y^2$.
Utiliser deux méthodes pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - y. \end{cases}$

Exercice 3 (6pts) (Et note de l'intérrogation)
On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \tag{2}$$

1. Peut on étudier la stabilité du système (2) par la méthode de linéarisation.
2. Considérons la fonction $V(x, y) = 2x^2 + y^4$. Etudier la stabilité du système (2).

Exercice 4 (5pts)

1. Soit A une matrice $\omega-$périodique sur $\mathbb{R}$. Donner la définition de la valeur caractéristique du système $X^{'} = A(t)X$. Montrer que ce système admet une solution $\omega-$périodique si et seulement si 1 est une valeur caractéristique de ce système.

2. Est ce qu'on peut parler de la trajectoire du point d'équilibre $\overline{X}$ d'un système $X^{'} = f(X)$. Trouver (analytiquement et géométriquement) cette trajectoire.

Correction

Solution 1

1. On pose $f_1(x,y) = y$ et $f_2(x,y) = -x^3$. Pour montrer que le système (1) est Hamiltonien, on montre qu'il existe une fonction H tel que $f_1 = \frac{\partial H}{\partial y}$ et $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

   On a d'une part, $f_1 = \frac{\partial H}{\partial y}$ alors
   $$H(x,y) = \int \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\,dy = \int f_1(x,y)\,dy = \int ydy = \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x).$$
   D'autre part, $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}$ alors
   $$H(x,y) = \int \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,dx = -\int f_2(x,y)\,dy = \int x^3dy = \frac{1}{4}x^4 + \psi(y).$$
   Alors, $\frac{1}{2}y^2 + \varphi(x) = \frac{1}{4}x^4 + \psi(y)$. Ceci est possible, par exemple si on prend $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^4$ et $\psi(y) = \frac{1}{2}y^2$. Ainsi, $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4$.

2. On sait que si le système est Hamiltonien alors H est une intégrale première. Ainsi, la fonction donnée par $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4$ est une intégrale première du (1).

3. **Méthode 1:** Puisque H est une intégrale première alors toute solution (x,y) de (1) vérifie $H(x,y) = C$ avec $C = F(x(0), y(0)) = \frac{1}{2}(x(0))^2 + \frac{1}{4}(x(0))^4 \in \mathbb{R}_+$. Donc, $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 = C$ avec $C \in \mathbb{R}_+$. Ce qui représente l'équation des trajectoires du (1).

   Méthode 2: On a

   Si $x = 0$ alors le point $(x,y) = (0,0)$ est une trajectoire. Elle vérifie $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 = C$ avec $C = 0$.

   Si $x \neq 0$ alors $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x^3}$ ce qui implique que $x^3dx = -ydy$. Ainsi, $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 = C$ avec $C \in \mathbb{R}_+^*$.

   Ce qui implique que l'équation des trajectoires du (1) est $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 = C$ avec $C \in \mathbb{R}_+$.

Solution 2
Méthode 1 (Stabilité des systèmes linéaires)
Le système s'écrit sous la forme $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propre de A sont $\lambda_1 = -1 - i$ et $\lambda_2 = -1 + i$. On a $\operatorname{Re}\lambda_1$ et $\operatorname{Re}\lambda_2$ sont strictement négatives. C. à dire que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelles strictement négatives. Ceci implique que le système est asymptotiquement stable.

Méthode 2 (Méthode de Liapunov)
D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.
D'autre part, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(-x+y) + 2y(-x-y) \\ &= -2\left(x^2+y^2\right) < 0. \end{aligned}$$

Alors le système est asymptotiquement stable.

Solution 3

1. On a
$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
alors $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ les deux valeurs propre de $Df(0,0)$ alors on ne peut rien dire sur le système nonlinéaire. Ainsi, on ne peut pas étudier la stabilité du système (2) par la méthode de linéarisation.

2. D'une part, on a $V(0,0) = 20^2 + 0^4 = 0$ et $V(x,y) = 2x^2 + y^4 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. D'autre part, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a $V'(x,y) = 4x\frac{dx}{dt} + 4y^3\frac{dy}{dt} = -4xy^3 + 4y^3x = 0 \leq 0$, alors le système est stable.

Solution 4

1. La définition de la valeur caractéristique et la démonstration de l'implication indirecte (voir cours).

   Montrons que si le système admet une solution $\omega-$périodique alors 1 *est une valeur caractéristique: Soit* X cette solution. On a $X(t+\omega) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, $X(t) = X(t,0,X(0)) = R(t,0)X(0) = M(t)X(0)$, où $M = R(.,0)$. Soit N la matrice fondamentale donnée par $N(t) = M(t+\omega)$. Comme il existe une matrice constante C tel que $N = MC$ on trouve $X(t+\omega) = M(t+\omega)X(0) = N(t)X(0) = M(t)CX(0)$. C. à dire $M(t+\omega)X(0) = M(t)CX(0)$. Puisque M est inversible (car c'est une matrice fondamentale) alors $CX(0) = X(0)$ alors 1 est une valeur propre de C. Par définition, 1 est une valeur caractéristique du système $X^{'} = A(t)X$.

2. Comme le point d'équilibre $\overline{X}$ nous donne une solution constante $\overline{X}$ on peut parler de la trajectoire du point d'équilibre.

   Méthode géométrique: La trajectoire $T_{\overline{X}}$, qui est la projection sur le plan de phase de la courbe intégrale de la solution $\overline{X}$, est le point $\overline{X}$. C. à dire $T_{\overline{X}} = \left\{\overline{X}\right\}$.

   Méthode analytique: Par définition, la trajectoire d'une solution X est $T_X = \{X(t), t \in I\}$ alors si X est une solution constante alors $T_X = \{X(t), t \in I\}$. Pour le point d'équilibre $X = \overline{X}$, on trouve $T_{\overline{X}} = \left\{\overline{X}\right\}$.

Interrogation (2014/2015)

1. Etudier la nature de l'origine pour le système $\begin{cases} x^{'} = x+y, \\ y^{'} = x+4y. \end{cases}$

2. Montrer que la fonction donnée par $X(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ est une solution de $\begin{cases} x^{'} = -x-y, \\ y^{'} = x-y. \end{cases}$ Puis, trouver la trajectoire associée à cette solution.

Correction

1. Le système s'écrit sous la forme $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\det A = 3 > 0, trA = 5 > 0$ et $\Delta_A = (trA)^2 - 4\det A = 13 > 0$. Alors l'origine est un noeud répulsif.

2. On pose $x(t) = e^{-t}\cos t$ et $y(t) = e^{-t}\sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x^{'}(t) = \left(e^{-t}\cos t\right)^{'} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -x(t) - y(t)$. De même, on montre que $y^{'}(t) = x(t) - y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Trouvons la trajectoire associée à cette solution:

   Méthode 1: *On a*

$$x^2(t) + y^2(t) = \left(e^{-t}\cos t\right)^2 + \left(e^{-t}\sin t\right)^2 = e^{-t}. \tag{3}$$

D'autre part, si on utilise les coordonnées polaires on obtient

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=x\left(x-y\right)-y\left(-x-y\right)=x^2+y^2=r^2.$$

Ainsi, $d\theta=dt$ donc $t=\theta+c$ avec $c\in\mathbb{R}$. Si on remplace dans (3) on obtient $r^2=ce^{-\theta}$. Ainsi, l'équation de la trajectoire de X est donnée par $r^2=ce^{-\frac{\theta}{2}}$ pour un $c\in\mathbb{R}^*$. Elle représente l'équation d'une spirale.

Méthode 2: Le système s'écrit sous la forme $X'=AX$ où $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\det A=2>0, trA=-2<0$ et $\Delta_A=\left(trA\right)^2-4\det A=-4<0$. Alors l'origine est un foyer. Cela implique que toutes les trajectoire sont sous la forme d'une spirale. Ainsi, la trajectoire associée à la solution considérée est une spirale.

Contrôle final (2014/2015)

Exercice 1 (6pts) Les deux questions sont indépendantes:

1. Trouver le diagramme de phase de l'équation $x^{'}=t$. Que peut on remarquer.
2. Classifier le point d'équilibre $(-1,-1)$ pour le système $\begin{cases} x^{'}=x-y, \\ y^{'}=x^2-1. \end{cases}$

Exercice 2 (3pts)

Considérons le système $\begin{cases} x^{'}=1, \\ y^{'}=-\frac{M}{N} \end{cases}$ où M et N sont deux fonctions définies sur un ouvert $D\subset\mathbb{R}^2$ et $N\neq 0$ sur D. Montrer que si $\frac{\partial F}{\partial x}=M$ et $\frac{\partial F}{\partial y}=N$ alors F est une intégrale première de ce système.

Application: Trouver une intégrale première pour le système $\begin{cases} x^{'}=1, \\ y^{'}=-\frac{e^y}{xe^y+2y}. \end{cases}$

Exercice 3 (4pts)

Enoncer le théorème de Floquet. Puis, justifier ce qui suit

1. $P\left(0\right)=P\left(\omega\right).$
2. Pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a $R\left(t+w,t\right)=R\left(w,0\right).$

Exercice 4 (7pts) Les trois questions sont indépendantes:

1. Citer 3 méthodes de la stabilité des systèmes autonomes nonlinéaire.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Etudier la stabilité du système $Y' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} Y$.
3. Utiliser la fonction de Liapunov définie sur $\mathbb{R}^2$ par $V(x, y) = x^2 + y^2$ pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2), \\ y' = -x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$

Correction

Solution 1

1. Les solutions de l'équation $x' = t$ sont données par $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Si on projecte sur l'espace de phase $\mathbb{R}^{m=1} = \mathbb{R}$ on trouve toutes les demi droite sous la forme $[c, +\infty[$ avec $c \in \mathbb{R}$.

   On remarque que la propriété des systèmes autonomes suivante: deux trajectoires sont soit confondues soit disjointes n'est pas vérifiée pour l'équation non autonome $x' = t$.

2. Point d'équilibre différent de l'origine alors

   (a) Changement de variable $u = x - (-1) = x + 1$ et $v = y - (-1) = y + 1$.

   (b) Le système associé au nouveaux variables: On a

   $$\begin{cases} u' = x' = x - y = (u-1) - (v-1), \\ v' = y' = x^2 - 1 = (u-1)^2 - 1. \end{cases}$$

   Ainsi $\begin{cases} u' = u - v, \\ v' = u^2 - 2u. \end{cases}$

   (c) Le système linéairisé: On a $Df(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u - 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi $Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Conclusion: On a $\det Df(0, 0) = -2 < 0$ alors l'origine est un col pour le système linéairisé, il reste un col pour le système nonlinéaire . Ainsi, $(-1, -1)$ est un col pour le système initial.

Solution 2

On a $f_1 = 1$ et $f_2 = -\frac{M}{N}$. Puisque $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ alors $\frac{\partial F}{\partial x} f_1 + \frac{\partial F}{\partial y} f_2 = M - N\frac{M}{N} = 0$. Ce qui implique que F est une intégrale première du système considéré.

Application: On a $M(x,y) = e^y$ et $N(x,y) = xe^y + 2y$. On a $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ implique $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int e^y dx = e^y x + c_1(y)$ et $F(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + c_2(x)$. Par identification, on trouve $c_1(y) = y^2 + c_2(x)$. Il suffit de prendre $c_1(y) = y^2$ et $c_2(x) = 0$. Ainsi, $F(x,y) = xe^y + y^2$.

Solution 3

Pour l'énoncé du théorème de Floquet voir cours.

1. $P(0) = P(\omega)$ car P est $\omega-$ périodique.

2. Soit C la matrice de monodromie. On a $C = R(t+w,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mais $C := e^{\omega B}$ est une matrice constante alors $C = R(0+w,0)$. Ainsi $R(t+w,t) = R(w,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution 4

1. La méthode en utilisant la définition de la stabilité, la méthode de linéairisation et la méthode de la fonction de Liapunov.

2. Les deux valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -a$. Alors l'une des valeurs propre est de partie réelle strictement positive alors le système est instable.

3. *Etudions la fonction* V :

   (a) On a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

   (b) Pour toute solution $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= \frac{dx}{dt}\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \\ &= \left[y - x\left(x^2+y^2\right)\right]2x + \left[-x - y\left(x^2+y^2\right)\right]2y \\ &= -2\left(x^2+y^2\right)^2 < 0. \end{aligned}$$

   Alors le système est asymptotiquement stable.

Interrogation (Décembre 2016)

Soit A une matrice $\omega-$périodique sur $\mathbb{R}$. Considérons le système $Y' = A(t)Y$......(E)

1. Enoncer le théorème de Floquet. Vérifier que $P(0) = P(\omega)$.
2. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la résolvante du système (E) vérifie $R(w, t_0) = R(0, t_0)$. Montrer que la solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ est une solution $w-$périodique.
3. Donner la définition de la valeur caractéristique du système (E). Montrer que (E) admet une solution $\omega-$périodique non nulle si et seulement si 1 est une valeur caractéristique de ce système.

Correction

1. Pour l'énoncé du théorème de Floquet ***(1,5pt* pour un énoncé complet du Th.** *)* voir cours.

   Puique P est $\omega-$ périodique alors $\underbrace{P(t+\omega) = P(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.}_{\textbf{(0,5pt)}}$ $\underbrace{\text{Pour } t = 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$ on trouve $P(0) = P(\omega)$.

2. La solution de $\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ est définie par

   $$Y(t) := Y(t, t_0, Y_0) = R(t, t_0) Y_0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \ \textbf{(0,5pt)}$$

   On a

   $$\begin{aligned} [R(w, t_0) = R(0, t_0)] &\Longrightarrow [R(w, t_0) Y_0 = R(0, t_0) Y_0] \ \textbf{(0,5pt)} \\ &\Longrightarrow Y(w) = Y(0) \ \textbf{(0,5pt)} \\ &\overset{(R.EDO)\textbf{(0,5pt)}}{\Longrightarrow} Y \text{ est } w-\text{périodique.} \end{aligned}$$

3. La définition de la valeur caractéristique **(1pt)** et la démonstration de l'implication indirecte **(1,5pt pour une démonstration complète)** (voir cours).

   Montrons que si le système admet une solution $\omega-$périodique non nulle alors 1 *est une valeur caractéristique de* (E)*: Soit* X cette solution. D'une part, on a

   $$X(t+\omega) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \ \textbf{(0,5pt)}$$

D'autre part,

$$X(t) = X(t, 0, X(0)) = R(t, 0)\, X(0) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \ \textbf{(0,5pt)}$$

On a

$$\begin{aligned}
[X(t+\omega) = X(t)] &\Longrightarrow [R(t+\omega, 0)\, X(0) = R(t, 0)\, X(0)] \ \textbf{(0,25pt)} \\
&\Longrightarrow P(t+\omega)\, e^{(t+\omega)B} X(0) = P(t)\, e^{tB} X(0) \text{ du Th. de Floquet } \textbf{(0,5pt)} \\
&\Longrightarrow P(t)\, e^{(t+\omega)B} X(0) = P(t)\, e^{tB} X(0) \text{ car } P \text{ est } \omega - \text{périod. } \textbf{(0,25pt)} \\
&\Longrightarrow P(t)\, e^{tB} e^{\omega B} X(0) = P(t)\, e^{tB} X(0) \text{ car } tB \text{ et } \omega B \text{ commutent } \textbf{(0,25pt)} \\
&\Longrightarrow \left(P(t)\, e^{tB}\right)^{-1} \left(P(t)\, e^{tB}\right) e^{\omega B} X(0) \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \left(P(t)\, e^{tB}\right)^{-1} \left(P(t)\, e^{tB}\right) X(0) \\
&\Longrightarrow e^{\omega B} X(0) = X(0) \ \textbf{(0,25pt)} \\
&\Longrightarrow 1 \text{ est une valeur propre de } e^{\omega B} \text{ car } X(0) \neq 0 \ \textbf{(0,25pt)} \\
&\Longrightarrow 1 \text{ est une valeur caractéristique de } (E).
\end{aligned}$$

Interrogation 2 (Janvier 2017)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -8y(1+y^2) \end{pmatrix}$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et considérons le système $X' = f(X)$.......(P)

1. Montrer que (P) est un système gradient.
2. Déterminer une fonction de Lyapunov de (P) associée à l'origine. Puis, déduire la stabilité de ce système.

Correction

1. $\underbrace{(P) \text{ est un système gradient Ssi il existe une fonction réelle } h \text{ définie sur } \mathbb{R}^2 \text{ telque } f = -\nabla h}_{(0{,}5pt)}.$

Calculons h : Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\left[f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\nabla h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \implies \left[\begin{pmatrix} -2x \\ -8y\left(1+y^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ -\frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right]$$

$$\implies \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(0,5pt)}{=} 2x \ldots\ldots (1) \\ \frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(0,5pt)}{=} 8y\left(1+y^2\right) \ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

De (1), on obtient

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int \frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx = \int 2x dx = x^2 + C(y) \ldots. (0,25pt).$$

Cela implique que

$$\frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + C(y)\right) = \frac{\partial C}{\partial y}(y) = C'(y) \ldots. (0,25pt).$$

Remplaçons dans (2) pour trouver

$$C'(y) = 8y\left(1+y^2\right) \ldots.. (0,25)$$

Ainsi

$$C(y) = \int C'(y)\, dy = \int 8y\left(1+y^2\right) dy = 4y^2 + 2y^4 + c \text{ avec } c \in \mathbb{R} \ldots\ldots (0,25pt)$$

$\underbrace{\text{Puisque on s'interesse à trouver une seule fonction } h\text{, on prend } c = 0}_{(0,5pt)}$. Ainsi $C(y) \overset{(0,25pt)}{=} 4y^2 + 2y^4$. On déduit alors que

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + C(y) = x^2 + 4y^2 + 2y^4.$$

C'est à dire $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(0,5pt)}{=} x^2 + 4y^2 + 2y^4$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

2. *Calculons les points d'équilibre de* (P) :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \text{ est un point d'équilibre de } (P)\right) &\Longleftrightarrow \left(f\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}\right) \ldots . (0,5pt) \\
&\Longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} -2\overline{x} \\ -8\overline{y}\left(1+\overline{y}^2\right) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -2\overline{x} = 0 \\ -8\overline{y}\left(1+\overline{y}^2\right) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = 0 \\ \overline{y} = 0 \text{ car } 1+\overline{y}^2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \ldots .. (0,5pt)
\end{aligned}$$

Ainsi l'origine est le seule point d'équilibre de (P).

* *Montrons que l'origine est un point d'équilibre isolé:*

$\underbrace{\text{Dans la boule } B(0,1)\text{, l'origine est le seule point d'équilibre}}_{(0,5pt)}$ alors $\underbrace{\text{l'origine est un point d'équilibre isolé.}}_{(0,5pt)}$

* *Montrons que h admet un minimum locale à l'origine:* Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ On a $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+4y^2+2y^4 \geq 0 = h(0)$. Ce qui implique que $\underbrace{h \text{ admet un minimum locale à l'origine.}}_{(0,5pt)}$

Conclusion: Puisque $(0,25pt)$ le système (P) est un système gradient de la forme $X' = -\nabla h$, l'origine est un point d'équilibre isolé et la fonction h admet un minimum locale à l'origine alors

(a) La fonction $V : U = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - h(0) = x^2+4y^2+2y^4 \ldots .. (0,5pt)$$

est une fonction de Lyapunov (stricte) de (P) associée à l'origine.

(b) $\underbrace{\text{L'origine est asymptotiquement stable.}}_{(0,5pt)}$

Contrôle final (Février 2017)

Exercice 1 (7 pts)

Considérons le système $\begin{cases} x^{'} = x - x^2 + 2y, \\ y^{'} = -2xy + 2x. \end{cases}$ ..... (E)

1. Etudier la nature de l'origine du système (E).

2. Montrer que le système linéairisé de (E) au voisinage de l'origine n'admet pas de cycle limite.

Exercice 2 (7 pts)

Considérons le système $\begin{cases} x^{'} = y, \\ y^{'} = x^3 - x. \end{cases}$ ......(sys)

1. Montrer que (sys) est un système Hamiltonien. Puis, déduire l'équation des trajectoires.

2. Classifier les.points d'équilibre. Puis, tracer le diagramme de phase.

Exercice 3 (6 points)

Considérons le système $X' = f(X)$ ......(EA).
Soient $l > 0$ et $V \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie
* $V(0) = 0$ et $V(X) > \|X\|^2_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $X \neq 0$.
* $V^{'}(X) \leq 0$ pour toute solution X de (EA).
Montrer que l'ensemble $\Omega_l := \{X \in \mathbb{R}^2 : V(X) \leq l\}$ est un ensemble non vide, compact et positivement invariant.

Correction

Solution 1

1. La matrice du système linéairisé de (E) au voisinage de l'origine est

$$\begin{aligned} A &= Df(x,y)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}_{(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x - x^2 + 2y) & \frac{\partial}{\partial y}(x - x^2 + 2y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-2xy + 2x) & \frac{\partial}{\partial y}(-2xy + 2x) \end{pmatrix}_{(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2x & 2 \\ -2y + 2 & -2x \end{pmatrix}_{(0,0)} \overset{(1pt)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a $\underbrace{\det A = -4 < 0}_{(1pt)}$. Alors $\underbrace{\text{l'origine est un col pour le système linéairisé}}_{(1pt))}$ ainsi $\underbrace{\text{il reste un col pour le système non linéaire } (E)}_{(1pt)}$.

2. $(0,5pt)$: Le système linéairisé de (E) au voisinage de l'origine est $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y = g_1(x,y), \\ y' = 2x = g_2(x,y). \end{array} \right.$

   On a $\underbrace{\dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \dfrac{\partial g_2}{\partial y} = 1 + 0 = 1}_{(1pt)}$. Alors $\underbrace{\text{le signe de } \dfrac{\partial g_1}{\partial x} + \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \text{ est constant sur } \mathbb{R}^2}_{(1pt)}$. Ainsi, $\underbrace{\text{d'aprés le critère négatif de Bendixon}}_{(0,5pt)}$, le système (sys) n'admet pas de cycle limite.

Solution 2

1. $(0,25pt)$: (sys) est un système Hamiltonien Ssi il existe une fonction H de classe C^1 telle que $\left\{ \begin{array}{r} y = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \ldots\ldots (1) \\ x^3 - x = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \ldots\ldots (2) \end{array} \right.$. *Calculons* H : De (1), on obtient

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int \frac{\partial H}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C(x) \ldots . (0,25pt).$$

   Cela implique que

$$\frac{\partial H}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}y^2 + C(x)\right) = C'(x) \ldots . (0,25pt).$$

   Remplaçons dans (2) pour trouver $C'(x) \overset{(0,25pt)}{=} x - x^3$. Ainsi

$$C(x) = \int C'(x)\, dx = \int \left(x - x^3\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c \text{ avec } c \in \mathbb{R} \ldots\ldots (0,25pt)$$

   $\underbrace{\text{Puisque on s'interesse à trouver une seule fonction } H\text{, on prend } c = 0}_{(0,25pt)}$. Ainsi $C(x) \overset{(0,25pt)}{=} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$. On déduit alors que $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(0,25pt)}{=} \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$.

$\underbrace{\text{* L'équation des trajectoires est donnée par } H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{(0{,}5pt)}$. C'est à dire

$\underbrace{\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{2}y_0^2 + \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{4}x_0^4.}_{(0{,}25pt)}$

2. $\underbrace{(x, y) \text{ est un point d'équilibre de } (sys) \text{ Ssi } y = 0 \text{ et } x^3 - x = 0.}_{(0{,}25pt)}$ Ainsi

$\underbrace{\text{les points d'équilibre sont } (0, 0), (1, 0) \text{ et } (-1, 0).}_{(0{,}25pt)}$

Puisque le système (sys) est Hamiltonien alors les points d'équilibre sont ou bien centre ou bien col $(0, 5pt)$. On a

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} y & \frac{\partial}{\partial y} y \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - x) & \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Classification de $(0, 0)$: On a $A = Df(x, y)_{(0,0)} \overset{(0{,}25pt)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais

$\underbrace{\det A = 1 > 0 \text{ et } trA = 0}_{(0{,}25pt)}$ alors $\underbrace{\text{l'origine est un centre pour le système } (sys)}_{(0{,}25pt)}$.

Classification de $(1, 0)$: On a $A = Df(x, y)_{(1,1)} \overset{(0{,}25pt)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Mais $\underbrace{\det A = -2 < 0}_{(0{,}25pt)}$

alors $\underbrace{\text{l'origine est un col pour le système } (sys)}_{(0{,}25pt)}$.

Clasification de $(-1, 0)$: On a $A = Df(x, y)_{(-1,1)} \overset{(0{,}25pt)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Mais $\underbrace{\det A = -2 < 0}_{(0{,}25pt)}$

alors $\underbrace{\text{l'origine est un col pour le système } (sys)}_{(0{,}25pt)}$.

* $(1pt)$ **pour le diagramme de phase.**

Solution 3

1. Puisque $\underbrace{V(0) = 0 \leq l}_{(0,5pt)}$ alors $\underbrace{0 \in \Omega_l}_{(0,5pt)}$. Ainsi Ω_l est non vide.

2. *Montrons que Ω_l est compacte: Il suffit de montrer qu'il est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$.*

   (a) $(1,5pt)$ Soit $X \in \Omega_l$ alors $V(X) \leq l$ mais $V(X) \geq \|X\|_{\mathbb{R}^2}^2$ alors $\|X\|_{\mathbb{R}^2} \leq \sqrt{l}$. Ainsi, on a montré que pour tout $X \in \Omega_l$ on a $\|X\|_{\mathbb{R}^2} \leq \sqrt{l}$. Ceci implique que Ω_l est borné dans $\mathbb{R}^2$.

   (b) $(1,5pt)$ On a $\Omega_l := \{X \in \mathbb{R}^2 : V(X) \leq l\} = V^{-1}(]-\infty, l])$, V est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car elle est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$) et $]-\infty, l]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors Ω_l est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

3. $(2pts)$ *Montrons que Ω_l est positivement invariant:* Soient $X_0 \in \Omega_l$ et $X(., X_0)$ la solution de (EA) qui vérifie $X(0) = X_0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^t V'(X(s, X_0))\, ds \leq \int_0^t 0 ds = 0$ alors $V(X(t, X_0)) \leq V(X(0, X_0)) = V(X_0)$ mais $V(X_0) \leq l$ (car $X_0 \in \Omega_l$) alors $V(X(t, X_0)) \leq l$. Ainsi $X(t, X_0) \in \Omega_l$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci implique, par définition, que Ω_l est positivement invariant.

Rattrapage (Avril 2017)

(2 *heures*)

Exercice 1 (4 points)
Soit A une matrice $\omega-$périodique sur $\mathbb{R}$. Considérons le système $Y' = A(t)Y$......(E).

1. Donner la condition nécéssaire et suffisante pour que (E) admet une solution $\omega-$périodique.

2. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la résolvante du système (E) vérifie $R(w, t_0) = R(0, t_0)$. Montrer que la solution du système $\left\{ \begin{array}{l} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{array} \right.$ est une solution $w-$périodique.

Exercice 2 (5 points)

Etudier la stabilité de l'origine du système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -8y(1+y^2) \end{pmatrix}$.......$(P)$. *(Ind. Montrer que (P) est un système système gradient puis déduire)*

Exercice 3 (6 points)

Considérons le système $\left\{\begin{array}{c} x^{'}=3x^2y^2-x^2-3y^2+1, \\ y^{'}=-2xy^3+2xy. \end{array}\right.$ ......(sys)

1. Montrer que (sys) est un système Hamiltonien. Puis, déduire l'équation des trajectoires.

2. Classifier le point d'équilibre $(1,1)$.

Exercice 4 (5 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considérons le système $X' = AX$.......(E)

1. Montrer que (E) n'amet pas de cycle limite.

2. Montrer que si $\det A < 0$ alors l'origine est un col pour le système (E).

Correction

Solution 1

1. La condition nécessaire et suffisante pour que (E) admet une solution $w-$périodique Y est $Y(w) = Y(0)$. **(1pt)**

2. La solution de $\left\{\begin{array}{c} Y^{'}=AY, \\ Y(t_0)=Y_0. \end{array}\right.$ est définie par $Y(t) := Y(t, t_0, Y_0) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} R(t, t_0) Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\left[R(w, t_0) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} R(0, t_0)\right] &\Longrightarrow [R(w, t_0) Y_0 = R(0, t_0) Y_0] \;\textbf{(1pt)} \\
&\Longrightarrow Y(w) = Y(0) \;\textbf{(0,5pt)} \\
&\overset{(Q.1)\textbf{(0,5pt)}}{\Longrightarrow} Y \text{ est } w-\text{périodique.}
\end{aligned}$$

Solution 2

* *Montrons que (P) est un système gradient* ***(1,5pt):*** Il existe une fonction réelle h définie sur $\mathbb{R}^2$ telque $\begin{pmatrix} -2x \\ -8y(1+y^2) \end{pmatrix} = -\nabla h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *Calculons* h :

Méthode 1: *Voir Interrogation Janvier 2017*

Méthode 2: Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} -2x \\ -8y\left(1+y^2\right) \end{pmatrix} = -\nabla h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &\Longrightarrow \left[\frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8y\left(1+y^2\right). \right] \\
&\Longrightarrow \begin{cases} h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int \frac{\partial h}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx = \int 2x dx \\ h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int \frac{\partial h}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy = \int 8y\left(1+y^2\right) dy \end{cases} \\
&\Longrightarrow \left[h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + C_1(y) \text{ et } h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4y^2 + 2y^4 + C_2(x) \right]
\end{aligned}$$

Ainsi $x^2 + C_1(y) = 4y^2 + 2y^4 + C_2(x)$. Ceci implique que $C_1(y) - 4y^2 - 2y^4 = C_2(x) - x^2 = C$ avec $C \in \mathbb{R}$ Ainsi pour $C = 0$ on trouve $C_2(x) = x^2$. Ce qui implique que $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4y^2 + 2y^4 + C_2(x) = x^2 + 4y^2 + 2y^4$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

* *Montrons que l'origine est un point d'équilibre isolé* **(1pt)** *: Voir Interrogation Janvier 2017*

* *Montrons que h admet un minimum locale à l'origine* **(1pt)***: Voir Interrogation Janvier 2017*

* *Conclusion* **(1,5pt)** *:* L'origine est asymptotiquement stable *(Voir Interrogation Janvier 2017).*

Solution 3

1. (sys) est un système Hamiltonien **(1,5pt)**: Il existe une fonction H de classe C^1 telle que $\begin{cases} 3x^2y^2 - x^2 - 3y^2 + 1 = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ -2xy^3 + 2xy = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}$. Aprés un calcul classique, on trouve $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2y^3 - x^2y - y^3 + y$. $\underbrace{\text{L'équation des trajectoires est donnée par } H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\textbf{(1pt)}}$.

   C'est à dire $x^2y^3 - x^2y - y^3 + y \overset{\textbf{(1pt)}}{=} x_0^2y_0^3 - x_0^2y_0 - y_0^3 + y_0$.

2. On a $Df(x,y) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \begin{pmatrix} 6xy^2 - 2x & 6yx^2 - 6y \\ -2y^3 + 2y & -6xy^2 + 2x \end{pmatrix}$ alors $A = Df(x,y)_{(1,1)} \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Puisque $\underbrace{\det A = -16 < 0 \text{ et } (sys) \text{ est Hamiltonien}}_{\textbf{(1pt)}}$ alors $\underbrace{(1,1) \text{ est un col pour } (sys}_{\textbf{(0,5pt)}}$

Solution 4
On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Puisque $\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial (ax+by)}{\partial x} + \frac{\partial (cx+dy)}{\partial y} = a + d \text{ alors}}_{\textbf{(1pt)}}$

   $\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \text{ a un signe constant sur } \mathbb{R}^2}_{\textbf{(1pt)}}$. Ainsi, le système (E) n'admet pas de cycle limite.

2. $\det A < 0$ alors la matrice A admet deux valeurs propres **(3pt)** (Voir cours).

Devoir (Décembre 2018)

Question: En utilisant la définition, étudier la stabilité de l'origine du système $x' = -x$.
Réponse: *Montrons que* $\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 : (|x_0| < \delta) \Longrightarrow (|x(t, 0, x_0)| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I)}_{(0{,}25pt)}$.

Où $x(., 0, x_0)$ *est la solution de* $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x, \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$

Notons qu'on a pris $\overline{x} = 0, t_0 = 0$, $\|.\| = |.|$ et $f(x) = -x$ dans la définition de la stabilité de l'origine du système $x' = f(x)$ (vu au cours).

Si on résout le système précédent on obtient $\underbrace{x(t, 0, x_0) = x_0 e^{-t} \text{ pour tout } t \in I =]-1, +\infty[}_{(0{,}25pt)}$.

On a
$$\underbrace{|x(t, 0, x_0)| = \left|x_0 e^{-t}\right| = |x_0| e^{-t} \leq e |x_0| \text{ pour tout } t \in]-1, +\infty[}_{(0{,}25pt)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si on prend $\underbrace{\delta \leq e^{-1}\varepsilon}_{(0{,}25pt)}$ on trouve

$$\forall x_0 : (|x_0| < \delta) \Longrightarrow (|x(t, 0, x_0)| \leq e |x_0| < e\delta \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \in]-1, +\infty[).$$

D'où
$$\forall x_0 : (|x_0| < \delta) \Longrightarrow (|x(t, 0, x_0)| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in]-1, +\infty[).$$

On peut choisir d'autre intervalle ouvert I sous la forme $]a, +\infty[$ et qui contient $t_0 = 0$.

* Respet du délai $(0,25pt)$.
* Présentation $(0,25pt)$
....
Exposé:
* Respet du délai $(0,25pt)$
* Présentation $(0,25pt)$
* Contenu: Définition $(0,25pt)$ avec son exemple $(0,25pt)$. Résultat $(0,25pt)$ avec son application $(0,25pt)$.

Interrogation (Janvier 2018)

Exercice 1 (7 pts)

1. **Complète:** Soit f une fonction continue localement Lipschitzienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Si X est une solution maximale......................de l'équation $X^{'} = f(X)$ alors X est périodique et ....

2. **Enoncer** le théorème de la stabilité du système gradient.

3. Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre de l'équation $X^{'} = f(X)$. **Montrer** que $\overline{X}$ est une solution de $X^{'} = f(X)$.

4. Soit $H = H(x,y)$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. **Montrer** que H est une intégrale première du système $\begin{cases} x^{'} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ y^{'} = \frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$

   Donner une autre intégrale première.

Exercice 2 (9 pts)

Considérons le système $\begin{cases} x^{'} = -x - y^3 \\ y^{'} = x - y \end{cases}$ ....(Sys)

1. **Vérifier** que l'origine est un point d'équilibre de (Sys).

2. En utilisant la méthode de Linéairisation, **étudier** la stabilité de l'origine du système (Sys).

3. Soit $\alpha, \beta > 0$. On pose $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^4$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. **Déterminer** une condition sur α et β pour que V soit une fonction de Liapunov stricte du système. Dans ce cas, **que peut on dire** sur la stabilité de l'origine.

Correction

Solution 1

1. Soit f une fonction continue localement Lipschitzienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Si X est une solution maximale $\underbrace{\textbf{non injective}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ de l'équation $X' = f(X)$ alors X est périodique et $\underbrace{\textbf{définie sur tout } \mathbb{R}.}_{\textbf{(0,5pt)}}$

2. Voir cours **(1,5 pt pour un énoncé complet du théorème)**

3. On a
$$\begin{cases} \underbrace{\overline{X}' = 0}_{\textbf{(0,5pt)}} \text{ car } \underbrace{\overline{X} \text{ est un vecteur constant}}_{\textbf{(0,5pt)}} \\ \underbrace{f\left(\overline{X}\right) = 0}_{\textbf{(0,5pt)}} \text{ car } \underbrace{\overline{X} \text{ est un point d'équilibre}}_{\textbf{(0,5pt)}} \end{cases}$$
Ainsi $\underbrace{\overline{X}' = f\left(\overline{X}\right).}_{\textbf{(0,5pt)}}$ Ceci implique que $\overline{X}$ est une solution de $X' = f(X)$.

4. On a
$$\frac{\partial H}{\partial x} f_1 + \frac{\partial H}{\partial y} f_2 = \frac{\partial H}{\partial x}\left(-\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0 \quad \textbf{(1pt)}$$
Ainsi, H est une intégrale première.

   * Soit $a \in \mathbb{R}$. On $\underbrace{a + H \text{ est une autre intégrale première.}}_{\textbf{(1pt)}}$

Solution 2

1. On a $\underbrace{-0 - 0^3 = 0 - 0 = 0}_{\textbf{(1pt)}}$. Donc, l'origine $(0,0)$ est un point d'équilibre de (Sys).

2. On a
$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-x-y^3) & \frac{\partial}{\partial y}(-x-y^3) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x-y) & \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3y^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \textbf{(0,5pt)} \end{aligned}$$

alors $Df(0,0) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\underbrace{\lambda = -1 \text{ est la valeur propre multiple de } Df(0,0)}_{\textbf{(0,5pt)}}$ avec $\underbrace{\operatorname{Re}\lambda = -1 < 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$ alors $\underbrace{\text{l'origine est asymptotiquement stable.}}_{\textbf{(0,5pt)}}$

3. On a

   (a) $V(0,0) = \alpha.0^2 + \beta.0^4 = 0$ **(1pt)**.

   (b) $\underbrace{\text{Puisque } \alpha, \beta > 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$ alors $\underbrace{V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^4 > 0 \text{ pour tout } (x,y) \neq (0,0)}_{\textbf{(0,5pt)}}$.

   (c) Pour toute solution $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V'(x,y) \quad : &= \frac{d}{dt}(V(x,y)) = \frac{d}{dt}\left(\alpha x^2 + \beta y^4\right) \\ &= 2\alpha x \frac{dx}{dt} + 4\beta y^3 \frac{dy}{dt} \ \textbf{(0,5pt)} \\ &= 2\alpha x\left(-x - y^3\right) + 4\beta y^3 (x - y) \\ &= -2\left(\alpha x^2 + 2\beta y^4\right) + (4\beta - 2\alpha) x y^3. \ \textbf{(0,5pt)} \end{aligned}$$

   Si on prend $\underbrace{4\beta - 2\alpha = 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$ (C'est à dire $\alpha = 2\beta$) alors $\underbrace{V'(x,y) = -2\left(\alpha x^2 + 2\beta y^4\right) < 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$.

Ainsi, $\underbrace{\alpha = 2\beta}_{\textbf{(0,5pt)}}$ est la condition sur α et β pour que V soit une fonction de Liapunov stricte du système (Sys)

* Puisque le système admet une fonction de Liapunov stricte alors $\underbrace{\text{l'origine est asympt. stable.}}_{\textbf{(1pt)}}$

Contrôle final (Février 2018)

Exercice 1 (7 pts)

1. **Montrer** que $(1,1)$ est un foyer pour le système $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x^2 - 1. \end{cases}$

2. Soit A une matrice $w-$périodique. Considérons le système $X' = A(t)X$......... (E)

Complète:

(a) Par définition, les valeurs caractéristiques de (E) sont.................................

(b) Soit Y une solution de (E). On a ....Ssi $Y(w) = Y(0)$.

Exercice 2 (7 pts)

Considérons l'équation $x^{'} = 2x$........ (E)

Résoudre (E). Puis, **déterminer** les courbes intégrales de (E) (analytiquement et géométriquement), l'espace de phase, les trajectoires (analytiquement et géométriquement) et le sens de direction des trajectoires.

Exercice 3 (6 pts)

Soit f un champ de vecteur défini par $f(X) = \begin{pmatrix} -x+6y^5 \\ -x \end{pmatrix}$ pour tout $X := (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considérons l'ensemble non vide compact $\Omega := \{X \in \mathbb{R}^2 / V(X) \leq 1\}$ avec $V(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + 2y^6)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considérons l'équation $X^{'} = f(X)$ ...... (E)

1. **Montrer** que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ on a $V^{'}(X) \leq 0$ *(Ind. On a $V^{'}(X) = \langle \nabla V(X), f(X) \rangle$).* **Montrer** que Ω est positivemnt invariant.
2. Posons $E := \left\{X \in \Omega / V^{'}(X) = 0\right\}$. **Montrer que** $E = \{(0, y) / -1 \leq y \leq 1\}$.
3. Soit M un ensemble de E positivement invariant. **Montrer que** si $X_0 \in M$ alors $X(t, X_0) = (0, y(t))$ avec $-1 \leq y(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.
4. **Montrer que** $M \subset \{(0, 0)\}$. **Que peut on dire** sur $\{(0, 0)\}$.
5. **Déduire** que pour tout $X_0 \in \Omega$ on a $X(t, X_0) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$.

Correction

Solution 1

1. Point d'équilibre $(1, 1)$ différent de l'origine alors

   (a) **(0,5pt)** Changement de variable $u = x - 1$ et $v = y - 1$.

   (b) **(1pt)** Le système associé au nouveaux variables: On a

$$\begin{cases} u^{'} = x^{'} = x - y = (u+1) - (v+1), \\ v^{'} = y^{'} = x^2 - 1 = (u+1)^2 - 1. \end{cases}$$

   Ainsi $\begin{cases} u^{'} = u - v, \\ v^{'} = u^2 + 2u. \end{cases}$

(c) **(1pt)** Le système linéairisé: On a

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Conclusion: On a

$$\textbf{(1pt)} \begin{cases} \det Df(0,0) = 2 > 0, trDf(0,0) = 1 > 0, \\ \Delta_{Df(0,0)} = (trDf(0,0))^2 - 4\det Df(0,0) = -7 < 0. \end{cases}$$

Alors $\underbrace{\text{l'origine est un foyer pour le sys. linéairisé,}}_{\textbf{(0,5)}}$ $\underbrace{\text{il reste un foyer pour le sys. nonlin.}}_{\textbf{(0,5pt)}}$

Ainsi, $\underbrace{(1,1) \text{ est un foyer pour le sys. initial.}}_{\textbf{(0,5pt)}}$

2. Voir cours **(1pt+1pt)**

Solution 2

* On distingue deux cas:

Cas 1: La fonction nulle est une solution de (E). On a $x := 0 = \alpha e^{2t}$ avec $\alpha = 0$.

Cas 2: Si x est une autre solution de (E) différente de la solution nulle alors $x \neq 0$ (c'est à dire $x(t) \neq 0$ pour tout t) *(Rappelons que la fonction $f(x) = 2x$ vérifie les conditions du Théorème de Cauchy-Lipschitz donc les graphes de deux solutions maximales sont ou bien disjoints ou bien confondus).* On a

$$\begin{aligned} \left(x' = 2x\right) &\Longrightarrow \left(\frac{dx}{dt} = 2x\right) \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \left(\int \frac{dx}{x} = \int 2dt\right) \\ &\Longrightarrow (\ln|x| = 2t + \alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow \left(|x| = e^{2t+\alpha} = e^{\alpha}e^{2t} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\right) \\ &\Longrightarrow \left(x = \mp e^{\alpha}e^{2t} = \alpha e^{2t} \text{ avec } \alpha = \mp e^{\alpha} \in \mathbb{R}_*\right) \\ &\Longrightarrow \left(x = \alpha e^{2t} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}^*\right). \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit (des deux cas) que $\underbrace{\text{la solution (générale) de } (E) \text{ est } x = \alpha e^{2t} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.}_{\textbf{(1pt)}}$

* Chaque solution de (E) nous donne une courbe intégrale définie, **analytiquement,** par

$$C_\alpha \overset{\textbf{(0,5pt)}}{:=} \{(t, x(t)) / t \in I\} \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \left\{\left(t, \alpha e^{2t}\right) / t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Géométriquement,

$$\underbrace{\text{les courbes intégrales sont les graphes des solutions de } (E) \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ par } x(t) = \alpha e^{2t}.}_{\textbf{(0,5pt)}}$$

En dissinant ces fonctions, on obtient **(0,5pt)**: (Shéma)

* Le plan de phase est $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^1 \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \mathbb{R}$.

* Chaque solution de (E) nous donne une trajectoire (orbite) définie, **analytiquement**, par

$$T_\alpha \overset{\textbf{(0,5pt)}}{:=} \{x(t) / t \in I\} \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \left\{\alpha e^{2t} / t \in \mathbb{R}\right\} = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \text{ si } \alpha > 0, \\ 0 \text{ si } \alpha = 0, \\ \mathbb{R}_-^* \text{ si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Géométriquement,

$$\underbrace{\text{les trajectoires sont les projections des courbes intégrales sur le plan de phase.}}_{\textbf{(0,5pt)}}$$

Donc **(0,5pt)**: (Shéma)

* Puisque $x' = 2x$ alors

$$\underbrace{\text{si } x > 0 \text{ alors } x' > 0 \text{ donc } x \text{ est croissante}}_{\textbf{(0,5pt)}}$$

et

$$\underbrace{\text{si } x < 0 \text{ alors } x' < 0 \text{ donc } x \text{ est décroissante.}}_{\textbf{(0,5pt)}}$$

Donc, on représente le sens de direction sur les trajectoires comme suit **(0,5pt)**: (Shéma)

Solution 3

1. On a

$$V'(X) = \langle \nabla V(X), f(X) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 6y^5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -x + 6y^5 \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle = -x^2 \leq 0 \ \textbf{(1pt)}.$$

Montrons que Ω est positivemnt invariant **(1pt)***:* Soit $X_0 \in \Omega$ alors $V(X_0) \leq 1$. Puisque $V^{'}(X) \leq 0$ alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t V^{'}(X) \leq 0\right) &\Longrightarrow (V(X(t,X_0)) - V(X(0,X_0)) \leq 0) \\
&\Longrightarrow (V(X(t,X_0)) - V(X_0) \leq 0) \\
&\Longrightarrow (V(X(t,X_0)) \leq V(X_0) \leq 1) \\
&\Longrightarrow (V(X(t,X_0)) \leq 1) \\
&\Longrightarrow (X(t,X_0) \in \Omega).
\end{aligned}$$

Ceci implique que Ω est positivemnt invariant.

2. **(1pt)** On a

$$\begin{aligned}
E \quad : &= \left\{X \in \Omega / V^{'}(X) = 0\right\} = \left\{X \in \mathbb{R}^2 / V(X) \leq 1 \text{ et } V^{'}(X) = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{2}\left(x^2 + 2y^6\right) \leq 1 \text{ et } -x^2 = 0\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^6 \leq 1 \text{ et } x = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1 \text{ et } x = 0\right\} \\
&= \left\{(0,y) / -1 \leq y \leq 1\right\}.
\end{aligned}$$

3. **(1pt)** Puisque $X_0 \in M$ et M est positivement invariant alors $X(t,X_0) \in M$ pour tout $t \geq 0$. Mais $M \subset E$ alors $X(t,X_0) \in E$. Ceci implique que $X(t,X_0) = (0, y(t))$ avec $-1 \leq y(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

4. **(1pt)** Soit $X_0 \in M$ alors, d'aprés la question 3, on trouve $X(.,X_0) = (0,y)$ avec $-1 \leq y \leq 1$. Mais $X(.,X_0)$ est une solution de (E). Alors $(0,y)$ vérifie (E) c'est à dire $\begin{cases} 0^{'} = -0 + 6y^5 \\ y^{'} = -0 \end{cases}$. Donc $y = 0$. Ceci implique que $X_0 = X(0,X_0) = (0, y(0)) = 0$.

   * On peut dire que $\{(0,0)\}$ est le plus grand ensemble de E positivement invariant **(0,5pt)**.

5. Si on utilise la Principe d'Invariance de Lasalle **(0,5pt)**, on obtient que pour tout $X_0 \in \Omega$ on a $X(t,X_0) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$.

Références:

[Be] S. Benzoni, Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés. Dunod Paris 2010

[Cr] G. Croce, Cours Equations différentielles ordinaires Master Maths-Info à l'Université du Havre

[De] J. P. Démaily, Analyse numérique et équations différentielles

[Le].G. Leborgne, Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année (http://www.isima.fr/leborgne) Équations différentielles

[Ra] T.. Raoux, Equations différentielles: (Année 2007-2008, 2^{e}esemestre).