Exemple d'un point d'équilibre stable

Question: Considérons l'équation

$$x^{'} = -x................(E)$$

En utilisant la définition, montrer que l'origine est stable.

Réponse: *Rappel:* Considérons sur un intervalle $I =]a, +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$) le système

$$X^{'} = f(X)..........(EA)$$

Soient $t_0 \in I$ et $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre de (EA). On dit que $\overline{X}$ est stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 : \left(\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \delta\right) \Longrightarrow \left(\left\|X(t, t_0, X_0) - \overline{X}\right\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I\right).$$

Ici $X(., t_0, X_0)$ est la solution de $\begin{cases} X^{'} = f(X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$

Ainsi, pour (E), l'origine est stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 : (|x_0| < \delta) \Longrightarrow (|x(t, 0, x_0)| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I =]-1, +\infty[).$$

Où $x(., 0, x_0)$ **est la solution de** $\begin{cases} x^{'} = -x, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$ ....$(*)$

– Si on résout le système (*) on obtient $x(t, 0, x_0) = x_0 e^{-t}$ pour tout $t \in I =]-1, +\infty[$.

– Soit $\varepsilon > 0$.

* Pour tout $t \in]-1, +\infty[$, on a

$$|x(t, 0, x_0)| = \left|x_0 e^{-t}\right| = |x_0| e^{-t} \leq e |x_0| < e\delta .$$

* Il suffit de prendre δ tel que

$$e\delta = \varepsilon.$$

C'est à dire

$$\delta = \frac{\varepsilon}{e}.$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{e} > 0, \forall x_0 : (|x_0| < \delta) \Longrightarrow (|x(t, 0, x_0)| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in I).$$