Chapitre 1

•

Dans tout ce qui suit, X et Y sont deux $\mathbb{k}-$e.v.n (espaces vectoriels normé sur le cops $\mathbb{k} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$).

1.1 Espace des opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 *Soit $A : X \longrightarrow Y$. On dit que A est un opérateur linéaire si A est une application linéaire. En d'autre terme, un opérateur linéaire est une application linéaire définie d'un $\mathbb{k}-$e.v.n vers un $\mathbb{k}-$e.v.n.*

Remarque 1.1.1 *Pour un opérateur linéaire, l'image de x par A est notée par Ax au lieu de $A(x)$.*

Exemple 1 *On considère $A : l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})$ défini par*

$$A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...) \text{ pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}).$$

Ici

– $(x_1, x_2, ...) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *représente la suite de $\mathbb{R}$.*
– $l_2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$ *l'ensemble des suites carrée sommables.*

Notons que $l_2(\mathbb{R})$ *est un* $\mathbb{R}-$*e.v.n. muni de la norme usuelle suivante*

$$\|(x_1, x_2, ...)\| = \left(\sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}).$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. *On a*

$$\begin{aligned}
A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) &= A((\alpha x_1, \alpha x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) \text{ produit d'un réel par une suite} \\
&= A(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) \text{ somme de deux suites} \\
&= (0, \alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) \text{ définition de } A \\
&= \alpha(0, x_1, x_2, ...) + (0, y_1, y_2, ...) \\
&= \alpha A(x_1, x_2, ...) + A(y_1, y_2, ...).
\end{aligned}$$

C'est à dire, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}), A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) = \alpha A(x_1, x_2, ...) + A(y_1, y_2, ..$$

Cela veut dire que A *est linéaire.*

Définition 1.1.2 *On dit que l'opérateur linéaire* $A : X \longrightarrow Y$ *est borné si*

$$\exists M \geq 0, \forall x \in X, \|Ax\| \leq M \|x\|.$$

Remarque 1.1.2 – *On peut, aussi, prendre* $M > 0$ *dans la définition de l'opérateur borné.*

- $\|Ax\|$ *est la norme de* Ax *dans* Y.
- $\|x\|$ *est la norme de* x *dans* X.

Exemple 2 *(Opérateur borné) Considérons* $C[0,1]$ *l'ensemble des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$:

$$(f \in C[0,1]) \Longleftrightarrow (f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}).$$

Rappellons que $C[0,1]$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ munit de la norme usuelle (norme de la convergence uniforme) définie par

$$\|f\| = \sup_{s\in[0,1]} |f(s)| \text{ pour tout } f \in C[0,1].$$

Question : *Montrer que $C[0,1]$ est un $\mathbb{R}-e.v.n.$*

Exemple 3 *Considérons l'opérateur*

$$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$f \longmapsto Af$$

avec

$$Af(t) = \int_0^t f(s)\,ds \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

– *Montrons que A est bien défini : (Exercice)*
– *Montrons que A est un opérateur borné : (Exercice)*
– *Montrons que A est borné : Soit $f \in C[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a*

$$\begin{aligned} |Af(t)| &= \left|\int_0^t f(s)\,ds\right| \leq \int_0^t |f(s)|\,ds \\ &\leq \int_0^t \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|\,ds = \int_0^t \|f\|\,ds = \|f\| \int_0^t ds = t\,\|f\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Af\| = \sup_{t\in[0,1]} |Af(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} [t\,\|f\|] = \|f\|.$$

Donc, on a montré que

$$\exists M = 1 \geq 0, \forall f \in C[0,1], \|Af\| \leq M\,\|f\|.$$

Ceci implique que A est borné.

Exemple 4 *(Opérateur non borné) Considérons $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tout les polynômes à coefficients réels :*

$$(P \in \mathbb{R}[X]) \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} : P = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n).$$

– *n est appellé le degré du polynôme P.*

– *$a_0, a_1, ..., a_n$ sont appellés les coeficients de P.*

Rappellons que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ muni de la norme suivante

$$\|a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\| = \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_n|\}.$$

Question : *Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}-e.v.n.$*

Considérons l'opérateur

$$A : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \longmapsto A(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = a_1 + ... + n a_n x^{n-1}.$$

– *Montrons que A est linéaire : (Exercice)*

– *Considérons la suite des polynômes (P_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $P_n = x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\|P_n\| = \|x^n\| = \|0 + 0x + ... + 1.x^n\| = \max(0, 0, ..., 1) = 1$$

et

$$\|AP_n\| = \|A(x^n)\| = \left\|n x^{n-1}\right\| = n.$$

On veut montrer que A est non borné : Par l'absurde, on suppose que A est borné. Donc

$$\exists M \geq 0, \forall P \in \mathbb{R}[X], \|AP\| \leq M \|P\|.$$

Ceci implique que

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : \|AP_n\| \leq M \|P_n\| .$$

Alors

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq M.1 = M.$$

Contradiction avec $\mathbb{N}^*$ n'est pas majoré.

Notation 1 *On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble de tout les opérateurs linéaires bornés définis de X vers Y.*

Théorème 1.1.1 *(Propriétés de $\mathcal{L}(X, Y)$)*

1. *$\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$.*
2. *$\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace normé.*

Idée de la preuve

1. On munit $\mathcal{L}(X, Y)$ de

* l'opération

$$+ : \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B$$

avec

$$A + B : X \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow (A + B)(x) = Ax + Bx.$$

** l'opération

$$. : \Bbbk \times \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

$$(\lambda, A) \longrightarrow \lambda.A$$

avec

$$\lambda.A : X \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow (\lambda.A)(x) = \lambda.Ax.$$

On montre que $+$ est une opération interne sur $\mathcal{L}(X,Y)$ *C'est à dire, on montre que si* $(A,B) \in \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(X,Y)$ *alors* $A+B \in \mathcal{L}(X,Y)$ *(la somme de deux opérateurs linéaires bornés est un opérateur linéaire borné).* Puis, on montre que . est une opération externe sur X. *C'est à dire, on montre que si* $(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(X,Y)$ *alors* $\lambda.A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *(le produit d'un scalaire par un opérateur borné est un opérateur borné).* Enfin, on montre que $(\mathcal{L}(X,Y), +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$.

2. On considère la fonction suivante

$$\|.\| : \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$A \longrightarrow \|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Puis, on montre que $(\mathcal{L}(X,Y), \|.\|)$ est un espace normé. *C'est à dire, on montre que* $\|.\|$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(X,Y)$.

– Cette norme est appellée norme canonique sur l'espace des opérateurs linéaires bornés.

Théorème 1.1.2 *(Propriétés de la norme canonique sur* $\mathcal{L}(X,Y)$*)*

1. Soit $M \geq 0$. *Si*

$$\forall x \in X, \|Ax\| \leq M \|x\|$$

alors

$$\|A\| \leq M.$$

2.

$$\forall x \in X, \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

3.

$$\forall 0 \neq x \in X, \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

4.

$$\|A\| = \min\left\{M \geq 0 / \|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\right\}.$$

5.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{0\neq\|x\|\leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Preuve 1 *Devoir*

Comment calculer la norme d'un opérateur linéaire borné.

Méthode 1 : (En utilisant la définition de la norme) Considérons l'opérateur linéaire borné

$$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$f \longmapsto Af = 3f$$

On a

$$\|A\| = \sup_{0\neq f\in C[0,1]} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{0\neq f\in C[0,1]} \frac{\|3f\|}{\|f\|} = \sup_{0\neq f\in C[0,1]} \frac{3\|f\|}{\|f\|} = 3.$$

Méthode 2 : (En utilisant les propriétés de la norme) Considérons l'opérateur linéaire

$$A : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } Af = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Soit $f \in C[0,1]$. On a

$$|Af| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,dt = \|f\| \int_0^1 1dt = \|f\|.$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 \geq 0, \forall f \in C[0,1], |Af| \leq \|f\| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

De (*), on trouve que

$$\|A\| \leq 1 \ldots\ldots\ldots(1)$$

Soit, maintenant, $f_* = 1$ (la fonction constante $f(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$). On a $0 \neq f_* \in C[0,1]$ (pourquoi). En plus,

$$\frac{|Af_*|}{\|f_*\|} = \frac{\left|\int_0^1 f_*(t)\,dt\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_*(t)|} = \frac{\left|\int_0^1 1dt\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} |1|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Mais

$$\frac{|Af_*|}{\|f_*\|} \leq \sup_{0\neq f\in C[0,1]} \frac{|Af|}{\|f\|} = \|A\|.$$

Alors

$$1 \leq \|A\| \text{..................}(2)$$

De (1) et (2), on trouve que $\|A\| = 1$.

Théorème 1.1.3 *(Relation entre la bornitude, la continuité, la continuité uniforme et la propriété de Lipschitz d'un opérateur linéaire) Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est borné.*
2. *A est Lipschitz sur X :*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in X, \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|.$$

3. *A est uniformément continue sur X :*

$$\forall x_* \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \|x - x_*\| < \delta \Longrightarrow \|Ax - Ax_*\| < \varepsilon.$$

4. *A est continue sur X :*

$$\forall x_* \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(x_*) > 0, \forall x, \|x - x_*\| < \delta(x_*) \Longrightarrow \|Ax - Ax_*\| < \varepsilon.$$

5. *A est continue en un point x_* :*

$$\exists x_* \in X, A \text{ est continue au } x_*.$$

6. *A est continue au zero.*

Preuve 2 *Devoir*

Opérateur à domaine dense : extension borné

Définition 1.1.3 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On dit que A est un opérateur à domaine dense si $D(A)$ est un sous espace vectoriel dense dans X.*

Théorème 1.1.4 *(Extension bornée : Prolongement par continuité) Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné à domaine dense. Si Y est un espace de Banach alors il existe un opérateur linéaire borné $\widetilde{A}$ défini sur X tels que*

– *$\widetilde{A}$ est un prolongement de A :*

$$\widetilde{A}x = Ax \text{ pour tout } x \in D(A).$$

– $\left\|\widetilde{A}\right\| = \|A\|.$

1.2 Convergence ponctuelle et uniforme

Soient (A_n) une suite d'opérateurs linéaires bornés de X vers Y et A un opérateur linéaire borné de X vers Y.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite (A_n) converge ponctuellement (ou bien simplement ou bien fortement) vers A si*

$$\forall x \in X, A_n x \underset{n \to +\infty}{\to} Ax.$$

Exemple 5 *Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés* (A_n) *défini sur* $l_2(\mathbb{R})$ *par*

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, ...).$$

Soit $A = 0$ *l'opérateur nul sur* $l_2(\mathbb{R})$ *donné comme suit :*

$$\begin{array}{rcl} A & : & l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, ...) & \longmapsto & A(x_1, x_2, ...) = 0\,(x_1, x_2, ...) = 0 = 0_{l_2(\mathbb{R})} = (0, 0, ...) \end{array}$$

– *On peut montrer que* A *est un opérateur linéaire borné sur* $l_2(\mathbb{R})$ *(A le faire).*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et* $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned} \|A_n(x_1, x_2, ...) - A(x_1, x_2, ...)\| &= \|A_n(x_1, x_2, ...) - 0\| \\ &= \|A_n(x_1, x_2, ...)\| \\ &= \left\| \frac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, ...) \right\| \\ &= \frac{n}{n^2+1}\|(x_1, x_2, ...)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\textit{Pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : \|A_n(x_1, x_2, ...) - A(x_1, x_2, ...)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela veut dire que (A_n) *converge ponctuellement vers l'opérateur nul* $A = 0$.

Définition 1.2.2 *On dit que la suite* (A_n) *converge uniformément (ou bien en norme) vers* A *si*

$$\|A_n - A\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple 6 *Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés* (A_n) *et l'opérateur nul*

$A = 0$ sur $l_2(\mathbb{R})$ donnés dans l'exemple précédent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\|A_n - A\| &= \|A_n - 0\| = \|A_n\| = \sup_{0 \neq (x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|A_n (x_1, x_2, \ldots)\|}{\|(x_1, x_2, \ldots\ldots)\|} \\
&= \sup_{0 \neq (x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\left\| \frac{n}{n^2+1} (x_1, x_2, \ldots) \right\|}{\|(x_1, x_2, \ldots)\|} = \sup_{0 \neq (x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\frac{n}{n^2+1} \|(x_1, x_2, \ldots)\|}{\|(x_1, x_2, \ldots)\|} \\
&= \sup_{0 \neq (x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\|A_n - 0\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela veut dire que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul $A = 0$.

Lemme 1.2.1 *Si (A_n) converge uniformément vers A alors elle converge ponctuellement vers A.*

Preuve 3 *Soit $x \in X$. On a*

$$0 \leq \|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)\, x\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\| \, .$$

Puisque (A_n) converge uniformément vers A alors

$$\|A_n - A\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\|A_n - A\| \, \|x\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi

$$\text{Pour tout } x \in X : \|A_n x - Ax\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela veut dire que (A_n) converge fortement vers A.

Lemme 1.2.2 *Si (A_n) est une suite qui converge ponctuellement alors on ne peut rien conclure sur sa convergence uniforme.*

Preuve 4 *Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés* (A_n) *définie sur* $l_2(\mathbb{R})$ *par*

$$A_n(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \text{ pour tout } n.$$

Soit I *l'opérateur identité sur* $l_2(\mathbb{R})$ *donné comme suit:*

$$\begin{aligned} I \quad &: \quad l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, ...) &\longmapsto I(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ...). \end{aligned}$$

– *On peut montrer que* I *est un opérateur linéaire borné sur* $l_2(\mathbb{R})$.

– *Montrons que* (A_n) *converge ponctuellement vers l'opérateur identité* I. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ *on a*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|A_n(x_1, x_2, ...) - I(x_1, x_2, ...)\|^2 = \|(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) - (x_1, x_2, ...)\|^2 \\ &= \|-(x_{n+1}, x_{n+2}, ...)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_i|^2. \end{aligned}$$

Puisque $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ *alors la série* $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_i|^2$ *est convergente. Ainsi, son reste vérifie*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_i|^2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Ceci implique que

$$\|A_n(x_1, x_2, ...) - I(x_1, x_2, ...)\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Ainsi (A_n) *converge ponctuellement vers l'opérateur identité* I.

– *Montrons que* (A_n) *ne converge pas uniformément vers l'identité* I : *Au début, on* *pose* $0 \neq x_* = \left(0,0,...0, \underset{n+1}{\underset{\downarrow}{1}}, 0,0,....\right) \in l_2(\mathbb{R})$. *Pour tout* n, *on a*

$$\begin{aligned}
\|A_n - I\| &= \sup_{0 \neq (x_1,x_2,...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|(A_n - I)(x_1,x_2,...)\|}{\|(x_1,x_2,...)\|} \\
&\geq \frac{\|(A_n - I)x_*\|}{\|x_*\|} = \left\|(A_n - I)\left(0,0,...0, \underset{n+1}{\underset{\downarrow}{1}}, 0,0,....\right)\right\| \\
&= \left\|A_n\left(0,0,...0, \underset{n+1}{\underset{\downarrow}{1}}, 0,0,....\right) - I\left(0,0,...0, \underset{n+1}{\underset{\downarrow}{1}}, 0,0,....\right)\right\| \\
&= \left\|(0,0,...0,0,0,0,....) - \left(0,0,...0, \underset{n+1}{\underset{\downarrow}{1}}, 0,0,....\right)\right\| \\
&= \left\|-\left(0,0,...0, \underset{n+1}{\underset{\downarrow}{1}}, 0,0,....\right)\right\| = 1.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\textit{Pour tout } n : \|A_n - I\| \geq 1.....(*)$$

Cela implique que

$$\|A_n - I\| \underset{n \to +\infty}{\nrightarrow} 0 \textit{ (pourquoi).}$$

Ainsi, (A_n) *ne converge pas uniformément vers l'identité.*

Théorème 1.2.1 *Si* Y *est un espace de Banach alors* $\mathcal{L}(X,Y)$ *est un espace de Banach.*

Preuve 5 *Devoir*

1.3 Théorème de Banach Steinhaus

Théorème 1.3.1 *(Banach Steinhaus) Soient X un espace de Banach, Y un $\mathbb{k}-$espace vectoriel normé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}(X,Y)$. Si*

$$\sup_{i\in I}\|A_i x\| < \infty \text{ pour tout } x\in X$$

alors

$$\sup_{i\in I}\|A_i\| < \infty.$$

Preuve 6 *H. Brézis (Analyse fonctionnelle) page 17.*

Remarque 1.3.1 *Dans la littérature Américaine, le théorème de Banach Steinhaus est désigné par le principe de la borne uniforme (Voir H. Brézis).*

Remarque 1.3.2 *L'objectif du théorème de Banach Steinhaus est d'obtenir une estimation uniforme à partir d'une estimation poctuelle.*

Corollaire 1.3.1 *(Application du théorème de Banach Steinhaus) Soient X et Y deux espaces de Banach et $(A_n)\subset\mathcal{L}(X,Y)$. Si*

$$\text{pour tout } x\in X, \text{la suite } (A_n x) \text{ converge, vers une limite notée } Ax,$$

alors

$$A\in\mathcal{L}(X,Y).$$

Preuve 7 *On a A est un opérateur définit de X vers Y par $Ax=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}A_n x$. ($A$ est bien défini car, par hypothèse, la limite existe)*

1. *Montrons que A est linéaire : Soient $x_1,x_2\in X$, on a*

$$\begin{aligned}
& A(x_1+x_2) \overset{\text{déf. } A}{=} \lim_{n\longrightarrow\infty}A_n(x_1+x_2) \overset{A_n \text{ linéaire}}{=} \lim_{n\longrightarrow\infty}(A_n x_1 + A_n x_2) \\
= & \lim_{n\longrightarrow\infty}A_n x_1 + \lim_{n\longrightarrow\infty}A_n x_2 \text{ car } (A_n x_1) \text{ et } (A_n x_2) \text{ convergent} \\
= & Ax_1 + Ax_2.
\end{aligned}$$

C'est à dire $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ *pour tout* $x_1, x_2 \in X$.

De même, on montre que $A(\lambda x) = \lambda Ax$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$ *et* $x \in X$.

2. *Montrons que* A *est borné :*

   * *Puisque pour tout* $x \in X$ *la suite* $(A_n x)$ *est convergente alors pour tout* $x \in X$ *elle est bornée. Ainsi,* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty$ *pour tout* $x \in X$.

   * *D'aprés le théorème de Banach Steinhaus (avec* $I = \mathbb{N}$*) on trouve* $\sup_{n\in I} \|A_n\| < \infty$. *Ainsi la suite* $(\|A_n\|)$ *est bornée. Ceci implique qu'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* n *on a* $\|A_n\| \leq M$.....(1)

   * *Mais pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *l'opérateur* A_n *est borné alors pour tout* n *et pour tout* $x \in X$ *on a* $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\|$ ....(2)

   * *De* (1) *et* (2), *on trouve pour tout* $x \in X$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *que* $\|A_n x\| \leq M \|x\|$ .... (3)

   * *Puisque* $(A_n x)$ *converge vers* Ax *alors* $\|A_n x\|$ *converge vers* $\|Ax\|$ *(car* $\|.\|$ *est continue)*

   * *Par passage à la limite dans* (3), *on trouve pour tout* $x \in X$ *on a* $\|Ax\| \leq M \|x\|$. *Ceci implique que* A *est borné.*

1.4 Opérateur inverse, Théorèmes d'existence de l'opérateur inverse borné

Définition 1.4.1 *On dit que* $A : X \longrightarrow Y$ *est inversible s'il existe* $B : Y \longrightarrow X$ *tel que* $AB = I_Y$ *et* $BA = I_X$.

- *L'opérateur* B *s'appelle opérateur inverse de* A *et on le note par* A^{-1}.
- *Rappelons que* AB *veut dire* $A \circ B$ *et* BA *veut dire* $B \circ A$.

Exemple 7 *Soient* $A, B : X \to X$ *deux opérateurs linéaires tel que* $AB + A + I =$

$BA+A+I=0$. *Ici* 0 *est l'opérateur nul sur* X *et* I *l'opérateur identité sur* X. *On a*

$$[AB+A+I=BA+A+I=0]\Longrightarrow\begin{cases}AB+A+I=0,\\ BA+A+I=0.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A\left(-B-I\right)=I,\\ \left(-B-I\right)A=I.\end{cases}\Longrightarrow[\exists C=-B-I:AC=CA=I]$$

$$\Longrightarrow\left[A\text{ est inversible et }A^{-1}=C=-B-I\right]$$

Lemme 1.4.1 *A est inversible Ssi A est bijectif (injectif et surjectif).*

Preuve 8 *Résultat d'Algèbre.*

Définition 1.4.2 *Soit $A:X\longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On définit (resp.) le noyau et l'image de A par*

$$N\left(A\right)=\left\{x\in X/Ax=0\right\}\text{ et }R\left(A\right)=\left\{y\in Y/\exists x\in X:y=Ax\right\}.$$

Remarque 1.4.1 *On peut aussi noter (resp.) le noyau et l'image de A par* $\ker A$ *et* $\operatorname{Im} A$.

Lemme 1.4.2 *Soit $A:X\longrightarrow Y$ un opérateur* ***linéaire****. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est injectif.*
2. $N\left(A\right)=\left\{0\right\}.$
3. $\forall x\in X:Ax=0\Longrightarrow x=0.$
4. *L'équation $Ax=0$ admet une solutions unique* 0.

Preuve 9 *Résultats d'Algèbre linéaire.*

Lemme 1.4.3 *Soit $A:X\longrightarrow Y$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est surjectif.*
2. $\operatorname{Im} A = Y$.
3. $\forall y \in Y, \exists x \in X : Ax = y$.
4. *Pour tout $y \in Y$, l'équation $Ax = y$ admet une solution.*

Preuve 10 *Résultats d'Algèbre.*

Lemme 1.4.4 *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur **linéaire**. Alors*

1. $(A$ *est inversible*$) \Longleftrightarrow (N(A) = \{0\}$ *et* $R(A) = Y)$.
2. *Si A est inversible alors A^{-1} est linéaire.*

Preuve 11 *Résultats d'Algèbre linéaire.*

Théorème 1.4.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Preuve 12 *F. Kolmogorov (Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle) page 219*

Théorème 1.4.2 *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$R(A) = Y$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on a $\|Ax\| \geq C\|x\|$.*
2. *A^{-1} existe et il est borné.*

Preuve 13 *Voir TD*

Théorème 1.4.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ avec X un espace de Banach. Si $\|A\| < 1$ alors $(I - A)^{-1}$ existe. En plus,*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A^n \text{ et } \left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Ici I est l'opérateur identité sur X.

Preuve 14 *F. Kolmogorov (Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle) page 222.*

....

Chapitre 2

•

2.1 Espace dual d'un espace vectoriel normé

Définition 2.1.1 *L'espace $\mathcal{L}(X, \mathbb{k})$ est appellé le dual de X. On le note par X^*. Ainsi, $f \in X^*$ veut dire que $f : X \to \mathbb{k}$ linéaire borné.*

Définition 2.1.2 *Si $f \in X^*$ alors f est appellée une fonctionnelle linéaire bornée.*

Notation 2 *Si $f \in X^*$ alors l'image de $x \in X$ par la fonctionnelle f est notée par $\langle f, x \rangle$*

.

Remarque 2.1.1 *Tout les résultats du chapitre 1 restent vrai dans X^*. Par exemple :*

$$\text{Pour tout } f \in X^* \text{ on a } \|f\| = \|f\|_{X^*} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\langle f, x \rangle| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle| .$$

Exemple 8 *(Exemple d'une fonctionnelle linéaire bornée) Soient X et Y deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels normés. Soient $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $f \in Y^*$ (donc $f : Y \longrightarrow \mathbb{k}$, linéaire et borné). Considérons l'opérateur $B : X \longrightarrow \mathbb{k}$ défini par*

$$\langle B, x \rangle = \langle f, Ax \rangle \text{ pour tout } x \in X.$$

1. *Montrons que B est linéaire : Soient $x_1, x_2 \in X$. On a*

$$\begin{aligned}
\langle B, x_1 + x_2 \rangle &= \langle f, A(x_1 + x_2) \rangle \ \ (\textbf{\textit{définition de}}\ B) \\
&= \langle f, Ax_1 + Ax_2 \rangle \ \ (A\ \textbf{\textit{linéaire}}) \\
&= \langle f, Ax_1 \rangle + \langle f, Ax_2 \rangle \ \ (f\ \textbf{\textit{linéaire}}) \\
&= \langle B, x_1 \rangle + \langle B, x_2 \rangle .
\end{aligned}$$

   C'est à dire, $\langle B, x_1 + x_2 \rangle = \langle B, x_1 \rangle + \langle B, x_2 \rangle$ pour tout $x_1, x_2 \in X$.

   De même, on montre que $\langle B, \lambda x \rangle = \lambda \langle B, x \rangle$ pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ et $x \in X$.

2. *Montrons que B est borné : Soit $x \in X$. On a*

$$\begin{aligned}
\|\langle B, x \rangle\| &= \|\langle f, Ax \rangle\| \overset{f\ borné}{\leq} \|f\| \|Ax\| \\
&\overset{A\ borné}{\leq} \|f\| \|A\| \|x\| .
\end{aligned}$$

   C'est à dire,

$$\exists M = \|f\| \|A\|, \forall x \in X : \|\langle B, x \rangle\| \leq M \|x\| .$$

   Cela veut dire que B est borné.

3. *Conclusion : On a $B : X \longrightarrow \mathbb{k}$, linéaire et borné. Ainsi, $B \in X^*$.*

2.2 Théorème de Hahn Banach et ses corollaires

Théorème 2.2.1 *(Hahn Banach) Soit f une fonctionnelle linéaire bornée sur un sous espace vectoriel $D(f)$ de X. Alors il existe $\widetilde{f} \in X^*$ tel que $\widetilde{f} = f$ sur $D(f)$ et $\left\|\widetilde{f}\right\| = \|f\|$.*

$\widetilde{f}$ s'appelle extension bornée de f.

Preuve 15 *V. Trenoguine (Analyse fonctionnelle) page 185.*

Remarque 2.2.1 *Le théorème de Hahn Banach représente un résultat sur l'existence de l'extension bornée de la fonctionnelle linéaire bornée f définie sur un sous espace vectoriel $D(f)$ de X. Remarque trés importante que $D(f)$ n'est pas nécessairement dense dans X.*

Remarque 2.2.2 *On peut trouver un résultat similaire si X un $\mathbb{C}-$espace vectoriel normé (Voir V. Trenoguine : Analyse fonctionnelle page 186).*

Corollaire 2.2.1 *Pour tout $x_0 \in X - \{0\}$ il existe $f_{x_0} \in X^*$ tel que $\langle f_{x_0}, x_0 \rangle = \|x_0\|$ et $\|f_{x_0}\| = 1$.*

Preuve 16 *Soit $x_0 \in X - \{0\}$. Considérons la fonctionnelle f_{x_0} définie sur le sous espace vectoriel $D(f_{x_0}) = \{tx_0/t \in \mathbb{R}\}$ par $\langle f_{x_0}, tx_0 \rangle = t\|x_0\|$. On a*

1. *f_{x_0} linéaire : En effet, soient $t_1x_0, t_2x_0 \in D(f_{x_0})$. On a*

$$\begin{aligned}\langle f_{x_0}, t_1x_0 + t_2x_0 \rangle &= \langle f_{x_0}, (t_1 + t_2) x_0 \rangle = (t_1 + t_2) \|x_0\| \\ &= t_1 \|x_0\| + t_2 \|x_0\| = \langle f_{x_0}, t_1x_0 \rangle + \langle f_{x_0}, t_2x_0 \rangle .\end{aligned}$$

   C'est à dire $\langle f_{x_0}, t_1x_0 + t_2x_0 \rangle = \langle f_{x_0}, t_1x_0 \rangle + \langle f_{x_0}, t_2x_0 \rangle$ pour tout $t_1x_0, t_2x_0 \in D(f_{x_0})$.

   De même, on montre que $\langle f_{x_0}, \lambda(tx_0) \rangle = \lambda \langle f_{x_0}, tx_0 \rangle$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $tx_0 \in D(f_{x_0})$.

2. *f_{x_0} bornée : En effet, soit $tx_0 \in D(f_{x_0})$. On a*

$$|\langle f_{x_0}, tx_0 \rangle| = |t\|x_0\|| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\| \leq \|tx_0\| .$$

   C'est à dire, on a montré que

$$\exists M = 1, \forall tx_0 \in D(f_{x_0}) : |\langle f_{x_0}, tx_0 \rangle| \leq M\|tx_0\| .$$

3. *f_{x_0} est une fonctionnelle linéaire bornée sur le sous espace vectoriel $D(f_{x_0})$ de X*

alors, d'aprés le théorème de Hahn Banach, il existe $\widetilde{f}_{x_0} \in X^*$ *tel que* $\widetilde{f}_{x_0} = f_{x_0}$ *sur* $D(f_{x_0})$ *et* $\left\|\widetilde{f_{x_0}}\right\| = \|f_{x_0}\|$. *La fonctionnelle* $\widetilde{f_{x_0}}$ *vérifie*

* $\left\langle \widetilde{f}_{x_0}, x_0 \right\rangle = \|x_0\|$: *En effet, puisque* $x_0 = 1.x_0 \in D(f_{x_0})$ *alors*

$$\left\langle \widetilde{f}_{x_0}, x_0 \right\rangle = \langle f_{x_0}, x_0 \rangle = \langle f_{x_0}, 1.x_0 \rangle = 1. \|x_0\| = \|x_0\|.$$

C'est à dire $\left\langle \widetilde{f}_{x_0}, x_0 \right\rangle = \|x_0\|$.

** $\left\|\widetilde{f_{x_0}}\right\| = 1$: *En effet, on a* $\left\|\widetilde{f_{x_0}}\right\| = \|f_{x_0}\|$ *mais*

$$\|f_{x_0}\| = \sup_{0 \neq tx_0 \in D(f_{x_0})} \frac{|\langle f_{x_0}, tx_0 \rangle|}{\|tx_0\|} = \sup_{0 \neq tx_0 \in D(f_{x_0})} \frac{|t \|x_0\||}{|t| \|x_0\|} = 1$$

alors $\left\|\widetilde{f_{x_0}}\right\| = 1$.

4. Il suffit maintenant de noter $\widetilde{f_{x_0}}$ *par* f_{x_0} *pour conclure.*

Exercice : Montrer que les fonctionnelles de X^* séparent les vecteurs de X : C'est à dire pour tout $x_1, x_2 \in X$ avec $x_1 \neq x_2$ il existe $f \in X^*$ tel que $\langle f, x_1 \rangle \neq \langle f, x_2 \rangle$. (*Ind. Appliquer le corollaire précédent sur* $x_0 = x_1 - x_2$).

2.3 Opérateurs défini sur des espaces de Hilbert

Théorème 2.3.1 *(Représentation de Riesz Fréchet) Soit* H *un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $\langle .,. \rangle$. *Pour tout* $f \in H^*$ *il existe un unique* $y \in H$ *tel que on a* $\langle f, x \rangle = \langle y, x \rangle$ *pour tout* $x \in H$ *et* $\|f\| = \|y\|$.

Preuve 17 *H. Brézis (Analyse fonctionnelle) page 81.*

Remarque 2.3.1 *Dans le théorème précédent :*

– *Les crochets dans* $\langle f, x \rangle$ *représente les crochets de dualité c'est à dire* $\langle f, x \rangle$ *veut dire l'image de* x *par la fonctionnelle linéare* f.

– *Les crochets dans* $\langle y, x\rangle$ *représente les crochets du produit scalaire définit sur* H.

Remarque 2.3.2 *L'application :* $H^* \underset{f \longmapsto y}{\longrightarrow} H$ *est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier l'espace de Hilbert* H *et son dual* $(H = H^*)$.

Définition 2.3.1 $A : X \longrightarrow Y$ *est un isomorphisme isométrique si*

– A *est un isomorphisme :* A *est linéaire bijectif.*

– A *est une isométrie :* A *vérifie* $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$ *pour tout* $x, y \in X$.

Remarque 2.3.3 A *est une isométrie linéaire Ssi* A *est linéaire et* $\|Ax\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in X$.

Théorème 2.3.2 *(Opérateur adjoint : Cas Hilbertien) Soient* H_1,H_2 *deux espcaes de Hilbert et* $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. *Alors il existe un opérateur unique* $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ *qui vérifie* $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ *pour tout* $x \in H_1$ *et* $y \in H_2$. *L'opérateur* A^* *s'appelle l'opérateur adjoint de* A.

Application : Considérons l'opérateur $A : (l_2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \to (l_2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

* *Rappelons que* $l_2(\mathbb{R}) = \left\{(x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire : pour tout* $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ *on a*

$$\langle (x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle = \sum_{i=1}^{i=\infty} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n + ...$$

* Puisque $A \in \mathcal{L}(l_2(\mathbb{R}))$ (A le faire) alors A admet un adjoint $A^* \in \mathcal{L}(l_2(\mathbb{R}))$.

* *Calculons* A^* : Soient $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\langle A(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle &= \langle (0, x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle \\ &= 0y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + ...\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1y_2 + x_2y_3 + ... \\
&= \left\langle (x_1, x_2, ...) , \underbrace{(y_2, y_3, ...)}_{A^*(y_1,y_2,......)} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

C'est à dire $A^*(y_1, y_2, ...) = (y_2, y_3, ...)$ pour tout $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$.

Théorème 2.3.3 *Soient H, H_1, H_2 et H_3 des espaces de Hilbert.*

1. $(I_H)^* = I_H$.
2. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On a $(A+B)^* = A^* + B^*$.*
3. *Soient $\lambda \in \mathbb{k}$ et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On a $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.*

   Notons que l'adjoint dans le cas des espaces normés et l'adjoint dans le cas des espaces de Hilbert sont différents.
4. *Soient $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $B \in \mathcal{L}(H_3, H_1)$. On a $(AB)^* = B^*A^*$.*
5. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ alors $(A^*)^* = A$.*
6. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et inversible alors $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Définition 2.3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $A^* = A$ alors on dit que A est un opérateur autoadjoint.*

Exemple 9 *Soient $(\alpha_1, \alpha_2, ...) \in l_\infty(\mathbb{C})$ et $A : (l_2(\mathbb{C}), \|.\|_2) \to (l_2(\mathbb{C}), \|.\|_2)$ un opérateur défini par*

$$A(x_1, x_2, ...) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...).$$

Rappelons que $l_\infty(\mathbb{C}) = \left\{ (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} : \sup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} |x_i| < \infty \right\}$ *et*

$l_2(\mathbb{C}) = \left\{ (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} : \sum\limits_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire : pour tout $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$ on a*

$$\langle (x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \rangle = \sum_{i=1}^{i=\infty} x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + ... + x_n \overline{y_n} + ...$$

A^* existe (Pourquoi). Soient $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned}\langle A(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle &= \langle(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle \\ &= (\alpha_1 x_1)\overline{y_1} + (\alpha_2 x_2)\overline{y_2} + ... + (\alpha_n x_n)\overline{y_n} + ...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x_1\overline{\overline{\alpha_1}y_1} + x_2\overline{\overline{\alpha_2}y_2} + ... + x_n\overline{\overline{\alpha_n}y_n} + ... \\ &= \left\langle (x_1, x_2, ...), \underbrace{(\overline{\alpha_1}y_1, \overline{\alpha_2}y_2, ...)}_{A^*(y_1, y_2, ...)} \right\rangle.\end{aligned}$$

C'est à dire $A^*(y_1, y_2, ...) = (\overline{\alpha_1}y_1, \overline{\alpha_2}y_2, ...)$ pour tout $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$.

Si (α_i) est une suite réelle alors pour tout $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}A^*(y_1, y_2, ...) &= (\overline{\alpha_1}y_1, \overline{\alpha_2}y_2, ...) \\ &= (\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, ...) = A(y_1, y_2, ...)\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\forall (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C}) : A^*(y_1, y_2, ...) = A(y_1, y_2, ...).$$

Ce qui implique que $A^* = A$. Ainsi A est autoadjoint.

2.4 Spectre d'un opérateur

Soit X un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé.

Définition 2.4.1 *Le spectre d'un opérateur A définit sur X est*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} / L\text{'opérateur } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Définition 2.4.2 *Soient $A : X \longrightarrow X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $A - \lambda I$ n'est pas injectif alors on dit* *que λ est une valeur propre de A.*

Lemme 2.4.1 *Soient $A : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. S'il existe $0 \neq x \in X$ tel que $Ax = \lambda x$ alors λ est une valeur propre de A.*

Preuve 18 *Exercice*

Application : Considérons l'opérateur linéaire $A : l_1(\mathbb{R}) \longrightarrow l_1(\mathbb{R})$ par

$$A(x_1, x_2, ...) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, ...\right).$$

* *Rappellons que* $l_1(\mathbb{R}) = \left\{(x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i| < \infty\right\}$.

* Trouvons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_1$ tel que $A(x_1, x_2, ...) = \lambda(x_1, x_2, ...)$

$$\begin{aligned}
[A(x_1, x_2, ...) = \lambda(x_1, x_2, ...)] &\Longrightarrow \left[\left(x_1, \frac{x_2}{2}, ...\right) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ...)\right] \\
&\Longrightarrow \left[x_1 = \lambda x_1, \frac{x_2}{2} = \lambda x_2, ...\right] \\
&\Longrightarrow \left[(1-\lambda) x_1 = 0, \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) x_2 = 0, ...\right]
\end{aligned}$$

Puisque on s'intéresse à $(x_1, x_2, ...) \neq 0$ alors on prend $x_k \neq 0$ (par exemple $x_k = 1$).

Prenons l'équation k :

$$\left(\frac{1}{k} - \lambda\right) x_k = 0$$

alors

$$\frac{1}{k} - \lambda = 0 \text{ (c'est à dire } \lambda = \frac{1}{k})$$

alors si on remplace dans les équations qui restent on trouve $x_i = 0$ pour tout $i \neq k$. C'est à dire pour tout $k > 0$ on trouve

$$\left(0, 0, ..., \underbrace{1}_{k}, ...\right) \neq 0$$

tel que A

$$\left(0,0,...,\underbrace{1}_{k},...\right)=\frac{1}{k}\left(0,0,...,\underbrace{1}_{k},...\right).$$

Ce qui implique que les valeurs propres de A sont $1,\frac{1}{2},......,\frac{1}{n},....$

Lemme 2.4.2 *Si λ est une valeur propre de l'opérateur linéaire A alors $\lambda\in\sigma\left(A\right).$*

Preuve 19 *Exercice*

Chapitre 3

•

3.1 Exercices résolus

Exercice 1

Soient $(X, \|.\|)$ un $\mathbb{C}-$espace vectoriel normé, $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de X et (λ_n) un suite de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ alors (x_n) est bornée dans X et $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x\|$. Enoncer le premier résultat littérairement.

   Réponse :

   – *Montrons que (x_n) est bornée dans X* : Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ alors

   $$\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ (Pourquoi).}$$

   Cela veut dire que la suite $(\|x_n - x\|)$ est convergente dans $\mathbb{C}$, ainsi elle est bornée dans $\mathbb{C}$ (Pourquoi). C'est à dire,

   $$\exists M_1 \geq 0, \forall n, \|x_n - x\| \leq M_1.$$

Mais, pour tout n on a

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq M_1 + \|x\| = M_2.$$

C'est à dire

$$\exists M_2 \geq 0, \forall n, \|x_n\| \leq M_2.$$

Cela veut dire que (x_n) est bornée dans X.

– *Montrons que* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$: On a

$$v_n := 0 \leq u_n := |\|x_n\| - \|x\|| \leq w_n := \|x_n - x\| \text{ pour tout } n.$$

Puisque

$$v_n = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } w_n = \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors, d'après le critère d'encadrement, on trouve

$$u_n = |\|x_n\| - \|x\|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci implique que

$$\|x_n\| - \|x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (Pourquoi).}$$

donc

$$\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\| \text{ (Pourquoi).}$$

– *Littérairement, le premier résultat veut dire que : Toute suite convergente dans un espace normé est bornée (dans cet espace).*

2. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ alors $\lambda_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda x$.

Réponse : Pour tout n, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x\| \\ &\leq \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) x\| = |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| . \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$ alors (λ_n) est bornée donc

$$\exists M \geq 0, \forall n, \|\lambda_n\| \leq M.$$

Ainsi

$$0 \leq \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq M \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \text{ pour tout } n.$$

Puisque

$$[M \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\|] \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ (Pourquoi)}$$

alors

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ (Pourquoi).}$$

Ceci veut dire que

$$\lambda_n x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda x \text{ (Pourquoi).}$$

3. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ alors $\|x_n - y_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x - y\|$.

   Réponse : Pour tout n on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\|x_n - y_n\| - \|x - y\|| \leq \|(x_n - y_n) - (x - y)\| = \|(x_n - x) - (y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| . \end{aligned}$$

   Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$ alors

$$\|x_n - x\| + \|y_n - y\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

alors, d'après le critère d'encadrement, on trouve

$$|\|x_n - y_n\| - \|x - y\|| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc

$$\|x_n - y_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x - y\| \ \text{(Pourquoi)}.$$

4. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ et $\|x_n - y_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $y_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$.

   Réponse : Pour tout n on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y_n - x\| = \|(y_n - x_n) + (x_n - x)\| \\ &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| = \|x_n - y_n\| + \|x_n - x\| \ \text{(Pourquoi)}. \end{aligned}$$

   Puisque

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x \text{ et } \|x_n - y_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   alors

$$\|x_n - y_n\| + \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   ainsi, d'après le critère d'encadrement, on trouve

$$\|y_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   donc

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\to} x.$$

5. Montrer que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ alors $\|x_n - y\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x - y\|$.

   Réponse : Pour tout n on a

$$0 \leq |\|x_n - y\| - \|x - y\|| \leq \|(x_n - y) - (x - y)\| = \|x_n - x\|.$$

Puisque

$$\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ (Pourquoi)}$$

alors

$$|\|x_n - y\| - \|x - y\|| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc

$$\|x_n - y\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x - y\| \text{ (Pourquoi).}$$

Exercice 2

Soient X et Y deux $\Bbbk-$espaces vectoriels normés et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire.

1. Montrer que A est borné Ssi

$$\exists M > 0, \forall x \in X \text{ tel que } \|x\| \leq 1 \text{ on ait } \|Ax\| \leq M.$$

Que peut on déduire.

Réponse :

– *Montrons que si A est borné alors*

$$\exists M > 0, \forall x \in X \textit{ tel que } \|x\| \leq 1 \textit{ on ait } \|Ax\| \leq M.$$

Puisque A est borné alors

$$\exists M > 0, \forall x \in X \textit{ on ait } \|Ax\| \leq M \|x\|.$$

Ceci implique que

$$\exists M > 0, \forall x \in X \textit{ tel que } \|x\| \leq 1 \textit{ on ait } \|Ax\| \leq M \|x\| \text{ (pourquoi)}$$

Ainsi

$$\exists M>0, \forall x\in X \textit{ tel que } \|x\|\leq 1 \textit{ on ait } \|Ax\|\leq M\|x\|\leq M.1=M.$$

Donc

$$\exists M>0, \forall x\in X \textit{ tel que } \|x\|\leq 1 \textit{ on ait } \|Ax\|\leq M.$$

– *Montrons maintenant que si*

$$\exists M>0, \forall x\in X \textit{ tel que } \|x\|\leq 1 \textit{ on ait } \|Ax\|\leq M.$$

alors A est borné :

* Remarquons que

$$\forall x\in X-\{0\} \text{ on ait } \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\|=\frac{1}{\|x\|}\|x\|=1\leq 1.$$

Puisque

$$\exists M>0, \forall x\in X \text{ tel que } \|x\|\leq 1 \text{ on ait } \|Ax\|\leq M.$$

alors

$$\exists M>0, \forall x\in X-\{0\} \text{ on ait } \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leq M.$$

Mais

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\left\|A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\|=\left\|\frac{1}{\|x\|}Ax\right\|=\frac{1}{\|x\|}\|Ax\|$$

alors

$$\exists M>0, \forall x\in X-\{0\} \text{ on ait } \frac{1}{\|x\|}\|Ax\|\leq M.$$

Alors

$$\exists M>0, \forall x\in X-\{0\} \text{ on ait } \|Ax\|\leq M\|x\| ......(*)$$

** Pour $x = 0$ on a

$$\|Ax\| = \|A0\| = \|0\| = 0 \text{ et } M\|x\| = M\|0\| = M.0 = 0.$$

Ainsi,

$$\text{pour } x = 0 \text{ on ait } \|Ax\| \leq M\|x\| \,......(**)$$

De (*) et (**), on trouve

$$\exists M > 0, \forall x \in X \text{ on ait } \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Cela veut dire que A est borné.

– *Conclusion : Un opérateur est borné Ssi il est une application borné sur la boule unité fermé.*

2. Montrer que si $dimX < +\infty$ alors A est borné. *(Ind. Pour tout $x \in X$, on pose $\|x\|_* := \|x\| + \|Ax\|$ puis on montre que $\|.\|$ et $\|.\|_*$ sont deux normes sur X équivalentes)*

   Réponse : On peut montrer que $\|.\|_*$ est aussi une norme sur X (A le faire). Puisque $dimX < +\infty$ alors $\|.\|$ et $\|.\|_*$ sont équivalentes (pourquoi). Donc,

$$\exists M > 0, \forall x \in X, \|x\|_* \leq M\|x\|.$$

   Mais

$$\forall x \in X, \|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_*.$$

   Alors

$$\exists M > 0, \forall x \in X, \|Ax\| \leq \|x\|_* \leq M\|x\|.$$

   Ainsi

$$\exists M > 0, \forall x \in X, \|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Cela veut dire que A est borné.

3. Montrer que si A est borné alors le noyau de A définit comme suit $N(A) := \{x \in X : Ax = 0\}$ est un fermé de X. *(On peut noter aussi le noyau de A par* $\ker A$).

   Réponse : Pour montrer que $N(A)$ est fermé de X il suffit de montrer que

   $$\forall (x_n) \subset N(A), (x_n) \text{ convergente vers } x \Longrightarrow x \in N(A).$$

   Soit $(x_n) \subset N(A)$. On a

   $$\forall n, Ax_n = 0 \text{ (pourquoi)}.$$

   Alors

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} Ax_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} 0 = 0.$$

   Mais A est linéaire et borné donc il est continue ainsi

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} Ax_n = A\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n\right) = Ax$$

   donc

   $$Ax = 0.$$

   Ceci implique que $x \in N(A)$ (pourquoi).

Exercice 3

On définit $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ par : pour tout $f \in C[0,1]$ on a Af est définit par $(Af)(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que A est bien défini et linéaire.

   Réponse :

– *Montrons que A est bien défini :* Pour cela, on montre que

$$\forall f \in C\,[0,1]\,, Af \in C\,[0,1]\,.$$

Soit $f \in C\,[0,1]$. On a

$$\begin{array}{rcl} Af & : & [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (Af)(x) = f(x) - f(0) = f(x) + (-f(0)) \end{array}$$

alors Af est la somme de deux fonctions continues sur $[0,1]$: la fonction f et la fonction constante $-f(0)$. Donc, Af est continue sur $[0,1]$. Cela veut dire que $Af \in C\,[0,1]$.

– *Montrons que A est linéaire : Pour cela, on montre que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C\,[0,1]\,, A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C\,[0,1]$, on montre que

$$A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag \text{ (égalité de deux fonctions).}$$

Pour cela, on montre que

$$[A(\alpha f + g)](x) = [\alpha Af + Ag](x) \text{ pour tout } x \in [0,1]\,.$$

Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{array}{rcl} [A(\alpha f + g)](x) & = & (\alpha f + g)(x) - (\alpha f + g)(0) \text{ (pourquoi)} \\ & = & [\alpha f(x) + g(x)] - [\alpha f(0) + g(0)] \text{ (pourquoi)} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha\left[f(x) - f(0)\right] + \left[g(x) - g(0)\right] \\
&= \alpha\,(Af)(x) + (Ag)(x) \\
&= \left[\alpha Af + Ag\right](x).
\end{aligned}$$

2. Montrer que pour $C[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, l'opérateur A est borné.

   Réponse : Pour cela, on montre que

$$\exists M \geq 0, \forall f \in C[0,1] : \|Af\|_\infty \leq M\,\|f\|_\infty .$$

   Soit $f \in C[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\|Af\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |(Af)(x)| \ \text{(pourquoi)} \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f(0)| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \left[|f(x)| + |f(0)|\right] \ \text{(pourquoi)} \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(0)| \ \text{(pourquoi)} \\
&= \|f\|_\infty + |f(0)| \ \text{(pourquoi)} \\
&\leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty \ \text{(pourquoi)} \\
&= 2\,\|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 2 \geq 0, \forall f \in C[0,1] : \|Af\|_\infty \leq M\,\|f\|_\infty .$$

3. Montrer que pour $C[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_1$, l'opérateur A est non borné. *(Ind. : Considérer la suite de fonctions $f_n(x) = (n+1)(1-x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$).*

   Réponse : Avant de montrer que A est non borné, on remarque que

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x)|\, dx \text{ (pourquoi)} \\
&= \int_0^1 |(n+1)(1-x)^n|\, dx \\
&= (n+1)\int_0^1 (1-x)^n\, dx \text{ (pourquoi)} \\
&= 1 \text{ (pourquoi)}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_1 = 1 \text{....................} (*)$$

** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\|Af_n\|_1 &= \int_0^1 |(Af_n)(x)|\, dx \\
&= \int_0^1 |f_n(x) - f_n(0)|\, dx \\
&= \int_0^1 |(n+1)(1-x)^n - (n+1)|\, dx \\
&= (n+1)\int_0^1 [1-(1-x)^n]\, dx \text{ (pourquoi)} \\
&= n \text{ (pourquoi)}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|Af_n\|_1 = n \text{....................} (2*)$$

Montrons maintenant que A est non borné : Par l'absurde, on suppose que A est borné, donc

$$\exists M \geq 0, \forall f \in C[0,1] : \|Af\|_1 \leq M\|f\|_1 .$$

Alors

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : \|Af_n\|_1 \leq M\|f_n\|_1 \text{ (pourquoi).}$$

Ce qui implique d'après (*) et (2*) que

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq M.1 = M \ .$$

Ceci veut dire que $\mathbb{N}^*$ est majoré par M. Contradiction.

Exercice 4

1. Montrer que l'opérateur $A : (C[0,1], \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ avec $Af = \int_0^1 f(t) \sin t dt$ (Intégrale de Riemann) est linéaire borné, continue et Lipschitzienne puis déterminer sa norme.

   Réponse :

   – *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C[0,1]$. On a

$$\begin{aligned} A(\alpha f + g) &= \int_0^1 (\alpha f + g)(t) \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\ &= \int_0^1 [(\alpha f)(t) + g(t)] \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\ &= \int_0^1 \alpha f(t) \sin t dt + \int_0^1 g(t) \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\ &= \alpha \int_0^1 f(t) \sin t dt + \int_0^1 g(t) \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\ &= \alpha A f + A g. \end{aligned}$$

   Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C[0,1], A(\alpha f + g) = \alpha A f + A g.$$

   – *Montrons que A est borné :* Soit $f \in C[0,1]$. On a

$$\begin{aligned} |Af| &= \left| \int_0^1 f(t) \sin t dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) \sin t| \, dt = \int_0^1 |f(t)| \, |\sin t| \, dt \\ &\leq \int_0^1 \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \, |\sin t| \, dt = \|f\|_\infty \int_0^1 |\sin t| \, dt. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = \int_0^1 |\sin t|\, dt \geq 0, \forall f \in C[0,1], |Af| \leq M \|f\|_\infty \text{................}(*)$$

– Puisque A est linéaire borné alors il est continue et Lipschitzienne (pourquoi).

– *Calculons* $\|A\|$: De (*), on trouve que

$$\|A\| \leq M = \int_0^1 |\sin t|\, dt \text{ (pourquoi)......................(1)}$$

Considérons, maintenant, la suite de fonctions continues sur $[0,1]$ définie comme suit :

$$f_n(t) = \frac{n \sin t}{n|\sin t| + 1} \text{ pour tout } t \in [0,1] \text{ et pour tout } n \geq 1.$$

D'une part, pour tout $n \geq 1$, on a

$$Af_n = \int_0^1 f_n(t) \sin t dt = \int_0^1 \frac{n \sin^2 t}{n|\sin t| + 1} dt.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \left| Af_n - \int_0^1 |\sin t|\, dt \right| = \left| \int_0^1 \left[\frac{n \sin^2 t}{n|\sin t| + 1} - |\sin t| \right] dt \right| \\ &= \quad \int_0^1 \left[\frac{|\sin t|}{n|\sin t| + 1} \right] dt \leq \frac{1}{n} \text{ (pourquoi).} \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$Af_n \underset{n \to +\infty}{\to} \int_0^1 |\sin t|\, dt \text{ (pourquoi).}$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty \quad &= \quad \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{n \sin t}{n|\sin t| + 1} \right| = \sup_{t \in [0,1]} \left[\frac{n|\sin t|}{n|\sin t| + 1} \right] \\ &\leq \quad 1 \text{ (pourquoi).} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{pour tout } n \geq 1 \text{ on a } Af_n \leq \frac{|Af_n|}{\|f_n\|_\infty} \leq \|A\| \text{ (pourquoi).}$$

C'est à dire

$$\text{pour tout } n \geq 1 \text{ on a } Af_n \leq \|A\| \text{ (pourquoi).}$$

Ceci implique que

$$\int_0^1 |\sin t| \, dt \leq \|A\| \text{ (pourquoi)........(2)}$$

De (1) et (2), on trouve

$$\|A\| = \int_0^1 |\sin t| \, dt.$$

2. Mêmes questions pour $A : (L^2[0,1], \|.\|_2) \to \mathbb{R}$ avec $Af = \int_0^1 f(t) \sin t dt$ (Intégrale de Lebesgue).

   * Rappellons que l'espace de Lebesgue

$$L^2[0,1] := \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est meurable et } \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

   est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) . g(t) \, dt \text{ pour tout } f, g \in L^2[0,1].$$

   La norme sur $L^2[0,1]$ associée à ce produit scalaire est donnée par

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } f \in L^2[0,1].$$

– *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in L^2[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
A(\alpha f + g) &= \int_0^1 (\alpha f + g)(t) \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\
&= \int_0^1 [(\alpha f)(t) + g(t)] \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\
&= \int_0^1 \alpha f(t) \sin t dt + \int_0^1 g(t) \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\
&= \alpha \int_0^1 f(t) \sin t dt + \int_0^1 g(t) \sin t dt \text{ (pourquoi)} \\
&= \alpha A f + A g.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^2[0,1], A(\alpha f + g) = \alpha A f + A g.$$

– *Montrons que A est borné :* Soit $f \in L^2[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
|Af| &= \left| \int_0^1 f(t) \sin t dt \right| = \langle f, \sin \rangle \\
&\leq \|f\|_2 \|\sin\|_2 \text{ d'après Cauchy Schwarz} \\
&= \|f\|_2 \left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = \left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0, \forall f \in L^2[0,1], |Af| \leq M \|f\|_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

– Puisque A est linéaire borné alors il est continue et Lipschitzien.

– *Calculons* $\|A\|$: De (*), on trouve que

$$\|A\| \leq M = \left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

De plus, pour $f_* = \sin \in L^2[0,1]$ (pourquoi) on trouve

$$\frac{|Af_*|}{\|f_*\|_2} = \frac{\left|\int_0^1 f_*(t)\sin t dt\right|}{\left(\int_0^1 |f_*(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\int_0^1 |\sin t|^2 dt}{\left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais

$$\frac{|Af_*|}{\|f_*\|_2} \leq \|A\|$$

alors

$$\left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|A\| \text{............(2)}$$

De (1) et (2), on trouve que

$$\|A\| = \left(\int_0^1 |\sin t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Mêmes questions pour $A : C[0,1] \to C[0,1]$ avec $Af(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.

– *Montrons que* A *est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C[0,1]$. *Montrons que* $A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag$.

* *Remarquer que* $A(\alpha f + g)$ et $\alpha Af + Ag$ *sont des fonctions donc pour montrer que* $A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag$ *on montre que* $A(\alpha f + g)(t) = (\alpha Af + Ag)(t)$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Soit $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} A(\alpha f + g)(t) \quad : \quad &= \int_0^t (\alpha f + g)(s)\,ds = \int_0^t (\alpha f(s) + g(s))\,ds \\ &= \alpha \int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t g(s)\,ds = \alpha Af(t) + Ag(t) \\ &= (\alpha Af + Ag)(t). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C\left[0,1\right] : A\left(\alpha f + g\right) = \alpha Af + Ag.$$

Cela veut dire que A est linéaire.

– *Montrons que A est borné :* Soit $f \in C\left[0,1\right]$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|Af\right\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} \left|Af\left(t\right)\right| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t f\left(s\right) ds\right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left[\int_0^t \left|f\left(s\right)\right| ds\right] \text{ car } \left|\int_0^t f\left(s\right) ds\right| \leq \int_0^t \left|f\left(s\right)\right| ds. \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left[\int_0^t \left\|f\right\|_\infty ds\right] \text{ car } \left|f\left(s\right)\right| \leq \left\|f\right\|_\infty \text{ pour tout } s. \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left[\left\|f\right\|_\infty \int_0^t ds\right] \text{ car } \left\|f\right\|_\infty \in \mathbb{R} \text{ (ne dépend pas de } s\text{)}. \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left[\left\|f\right\|_\infty t\right] = \left\|f\right\|_\infty \text{ (pourquoi)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall f \in C\left[0,1\right] : \left\|Af\right\|_\infty \leq M \left\|f\right\|_\infty \text{........}(*)$$

Cela veut dire que A est borné.

– Puisque A est linéaire borné alors il est continue et Lipschitzien.

– *Calculons* $\left\|A\right\|$: De $(*)$, on trouve que

$$\left\|A\right\| \leq M = 1\text{......}(1)$$

Si on prend $f_* = 1 \in C[0,1]$ (pour tout $t \in [0,1]$: $f_*(t) = 1$) on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\|Af_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} &= \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} |Af_*(t)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_*(t)|} = \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t f_*(s)\,ds\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} |1|} \\
&= \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t 1ds\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} 1} = \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} |t|}{1} = \sup_{t\in[0,1]} t = 1.
\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{\|Af_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} \leq \|A\|$$

alors

$$1 \leq \|A\| .....(2)$$

De (1) et (2), on trouve

$$\|A\| = 1.$$

Devoir 1 : Mêmes questions pour $A : C[0,1] \to C^1[0,1]$ avec $Af(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.

4. Mêmes questions pour $A : (l_2, \|.\|_2) \to (l_2, \|.\|_2)$ avec $A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ (Opérateur Schift : Décalage à gauche).

– *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) &= A(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) \\
&= (\alpha x_2 + y_2, \alpha x_3 + y_3, ...) \\
&= \alpha(x_2, x_3, ...) + (y_2, y_3, ...) \\
&= \alpha A(x_1, x_2, ...) + A(y_1, y_2, ...).
\end{aligned}$$

C'est à dire, on a montré que

$\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) = \alpha A(x_1, x_2, ...) +$

$A(y_1, y_2, ...)$.

Cela veut dire que A est linéaire.

– *Montrons que A est borné :* Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \|A(x_1, x_2, ...)\|_2^2 &\overset{\text{déf. } A}{=} \|(x_2, x_3, ...)\|_2^2 \\ &\overset{\text{déf. } \|\cdot\|_2^2}{=} |x_2|^2 + |x_3|^2 + ... \\ = \sum_{i=2}^{i=\infty} |x_i|^2 \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 = \|(x_1, x_2, ...)\|_2^2 . \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) \text{ on a } \|A(x_1, x_2, ...)\|_2 \leq M \|(x_1, x_2, ...)\|_2 .... (*)$$

Cela veut dire que A est borné.

– Puisque A est linéaire borné alors il est continue et Lipschitzien.

– *Calculons* $\|A\|$: De $(*)$, on trouve

$$\|A\| \leq 1........(*)$$

On pose $x_* = (0, 1, 0, 0, 0, ...)$. On a $0 \neq x_* \in l_2(\mathbb{R})$ car $(0, 1, 0, 0, 0, ...) \neq 0$ et $|0|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |0|^2 .... = 1 < \infty$. De plus

$$\frac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} = \frac{\|A(0, 1, 0, 0, 0, ...)\|_2}{\|(0, 1, 0, 0, 0, ...)\|_2} = \frac{\|(1, 0, 0, 0, ...)\|_2}{\sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |0|^2 + ...}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Mais

$$\frac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} \leq \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|A(x_1, x_2, ...)\|_2}{\|(x_1, x_2, ...)\|_2} = \|A\| .$$

Alors

$$1 \leq \|A\| .... (2)$$

De (1) et (2), on trouve que

$$\|A\| = 1.$$

5. Mêmes questions pour l'opérateur intégrale $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par $Ay(t) = \int_0^1 K(t,s)\,y(s)\,ds$ avec le noyau K est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

– Mo*ntrons que A est linéaire : pour cela, on montre que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^2[0,1] : A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in L^2[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} [A(\alpha f + g)](t) &= \int_0^1 K(t,s)(\alpha f + g)(s)\,ds \\ &= \alpha \int_0^1 K(t,s) f(s)\,ds + \int_0^1 K(t,s)\,g(s)\,ds \\ &= \alpha (Af)(t) + (Ag)(t) = [\alpha Af + Ag](t). \end{aligned}$$

C. à dire

$$[A(\alpha f + g)](t) = [\alpha Af + Ag](t), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ainsi,

$$A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

– *Montrons que A est borné : Pour cela, il suffit de montrer que*

$$\exists M \geq 0, \forall f \in L^2[0,1] : \|Af\|_2 \leq M \|f\|_2.$$

Soit $f \in L^2[0,1]$. Au début, on temarque que pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |(Af)(t)| &= \left|\int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds\right| = |\langle K(t,.), f\rangle| \\ &\leq \|K(t,.)\|_2 \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|Af\|_2^2 &= \int_0^1 |(Af)(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \left[\left(\int_0^1 |K(t,s)|^2 ds\right) \|f\|_2^2\right] dt \\ &= \left[\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)|^2 dsdt\right] \|f\|_2^2 . \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = \left[\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)|^2 dsdt\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0, \forall f \in L^2[0,1] : \|Af\|_2 \leq M \|f\|_2 ....(*)$$

– Puisque A est linéaire borné alors il est continue et Lipschitzien.

Devoir 2 : Est ce qu'on peut trouver une valeur exacte de $\|A\|$.

Exercice 5 :

Considérons l'opérateur $A : (R[X], \|.\|) \to \mathbb{R}$ avec $AP = P(2)$. Montrer que A est linéaire non borné. Est il continue (Justifier).

Réponse :

– *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in R[X]$. On a

$$A(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(2) = \alpha P(2) + Q(2) = \alpha AP + AQ.$$

– *Montrons que A est non borné :* Considérons la suite de $R[X]$ définie par

$$P_n = x^n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

** Signalons, ici, que $P_n = x^n$ veut dire que $P_n(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\|P_n\| = \|x^n\| = \|0 + 0.x + ... + 1.x^n\| = \max\{0, 0, ..., 1\} = 1.............(1)$$

et

$$AP_n = P_n(2) = 2^n...................(2)$$

Pour montrer que A est non borné, on utilise le raisonnement par l'absurde, on suppose qu'il est borné. Donc

$$\exists M \geq 0, \forall P \in R[X] : |AP| \leq M \|P\|.$$

Ceci implique que

$$\exists M \geq 0, \forall n \geq 1 : |AP_n| \leq M \|P_n\|.$$

De (1) et (2), on trouve

$$\exists M \geq 0, \forall n \geq 1 : 2^n \leq M.$$

Ceci veut dire que la suite (2^n) est majorée. Contradiction.

Question : Pourquoi la suite (2^n) n'est pas majorée. *Ind. Par l'absurde.*

– *Est ce que A est continue :* Non, car il est non borné.

Exercice 6

Soit H un espace de Hilbert comlexe de dimension infinie. Soient (e_n) et (f_n) deux suites orthonormées de H. Soit (λ_n) une suite bornée de nombres complexes. On pose $M = \sup\limits_n |\lambda_n|$. Considérons l'opérateur $A : H \to H$ défini par $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, f_n \rangle e_n$. Montrer que A est bien défini, linéaire, borné et que $\|A\| = M$.

Réponse :

** Rappellons, au début, que si (e_n) est une suite orthonormée d'un espace de Hilbert

H alors

$$\text{la série de vecteurs } \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ converge Ssi } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \text{ converge.}$$

En plus, on a

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \text{......}(1*)$$

Ici, (c_n) est une suite de nombres complexes.

– *Montrons que A est bien défini :* Soit $x \in H$. *Montrons que* $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, f_n \rangle e_n < \infty$. *C'est à dire, la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_n \langle x, f_n \rangle}_{c_n} e_n$ *est convergente. Pour cela, il suffit de montrer que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, f_n \rangle|^2$ est convergente : Pour tout k, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n \langle x, f_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 |\langle x, f_n \rangle|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n \rangle|^2 \text{ (pourquoi)} \\ &\underset{\text{Inégalité de Bessel}}{\overset{(f_n) \text{ une suite orthonormée de } H}{\leq}} M^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\sum_{n=1}^{k} |\lambda_n \langle x, f_n \rangle|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \text{......}(2*)$$

Ainsi, la suite croissante $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} |\lambda_n \langle x, f_n \rangle|^2 \right)$ est majorée par $M^2 \|x\|^2$. Ce qui implique qu'elle est convergente.

Question : Voir : la définition d'une suite orthonormée d'un espace de Hilbert, l'inégalité de Bessel et l'identité de Perseval.

– *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x, y \in H$. on a

$$\begin{aligned} A(\alpha x+y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \alpha x+y, f_n\rangle e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [\alpha \langle x, f_n\rangle + \langle y, f_n\rangle] e_n \text{ (pourquoi)} \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, f_n\rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, f_n\rangle e_n \text{ (pourquoi)} \\ &= \alpha Ax + Ay. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H : A(\alpha x+y) = \alpha Ax + Ay.$$

Cela veut dire que A est linéaire.

– *Montrons que A est borné :* Pour tout $x \in H$, on a

$$\|Ax\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, f_n\rangle e_n \right\|^2 \overset{(1*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, f_n\rangle|^2 \overset{(2*)}{\leq} M^2 \|x\|^2 .$$

C'est à dire on a montré que

$$\exists M = \sup_n |\lambda_n| \geq 0, \forall x \in H \text{ on a } \|Ax\| \leq M \|x\| .... (3*)$$

Ainsi, A est borné.

– *Montrons que $\|A\| = M$:* D'une part de $(3*)$, on trouve que

$$\|A\| \leq M = \sup_n |\lambda_n| .....(4*).$$

D'autre part, On a

$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \overset{\text{(pourquoi)}}{=} \frac{|\lambda_n|}{1} = |\lambda_n| \text{ pour tout } n$$

Mais

$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} \leq \sup_{0 \neq x \in H} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| \text{ pour tout } n$$

alors

$$|\lambda_n| \leq \|A\| \text{ pour tout } n.$$

Ceci implique que

$$\text{(pourquoi) } M = \sup_n |\lambda_n| \leq \|A\| \text{ ......(5*)}$$

De (4∗) et (5∗), on trouve $\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$.

Exercice7

Soient X et Y deux $\Bbbk-$ espaces vectoriels normés.

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{R}$ avec $\Phi(A) = \|A\|$ est continue.

   Réponse : Puisque $\Phi = \|.\|$ et on sait que la norme $\|.\|$ est une fonction continue alors Φ est continue.

2. Montrer que si l'on passe des normes sur X et Y aux normes équivalentes, la nouvelle norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$ reste équivalente à l'ancienne.

Réponse : Soients $\|.\|_1^X$ et $\|.\|_2^X$ deux normes sur X équivalentes, $\|.\|_1^Y$ et $\|.\|_2^Y$ sont deux normes sur Y équivalentes. *Montrons que les deux normes sur $\mathcal{L}(X, Y)$ définies comme suit*

$$\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|_1^Y}{\|x\|_1^X} \text{ et } \|A\|_2^{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X}$$

sont équivalentes : Puisque $\|.\|_1^X$ et $\|.\|_2^X$ sont équivalentes, $\|.\|_1^Y$ et $\|.\|_2^Y$ sont équivalentes alors ils existent des constantes positives C_1, C_2, C_3 et C_4 tel que

$$\forall x \in X : C_1 \|x\|_1^X \leq \|x\|_2^X \leq C_2 \|x\|_1^X$$

et

$$\forall y \in Y : C_3 \|y\|_1^Y \leq \|y\|_2^Y \leq C_4 \|y\|_1^Y.$$

Soit $0 \neq x \in X$. On a

$$\left[C_1 \|x\|_1^X \leq \|x\|_2^X \leq C_2 \|x\|_1^X\right] \implies \left[\frac{1}{C_2 \|x\|_1^X} \leq \frac{1}{\|x\|_2^X} \leq \frac{1}{C_1 \|x\|_1^X}\right]$$
$$\implies \left[\frac{\|Ax\|_2^Y}{C_2 \|x\|_1^X} \leq \frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X} \leq \frac{\|Ax\|_2^Y}{C_1 \|x\|_1^X}\right]$$

$$\overset{As\in Y}{\implies} \left[\frac{C_3}{C_1}\frac{\|Ax\|_1^Y}{\|x\|_1^X} \leq \frac{1}{C_2}\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_1^X} \leq \frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X} \leq \frac{1}{C_1}\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_1^X} \leq \frac{C_4}{C_1}\frac{\|Ax\|_1^Y}{\|x\|_1^X}\right]$$

Pour tout $0 \neq x \in X$, on a

$$\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X} \leq \frac{C_4}{C_1}\frac{\|Ax\|_1^Y}{\|x\|_1^X} \leq \frac{C_4}{C_1}\sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Ax\|_1^Y}{\|x\|_1^X} = \frac{C_4}{C_1}\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

C'est à dire

$$\text{Pour tout } 0 \neq x \in X \text{ on a } \frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X} \leq \frac{C_4}{C_1}\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Ceci impliqe que $\frac{C_4}{C_1}\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)}$ est un majorant de $\left\{\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X}/0 \neq x \in X\right\}$. Puisque $\sup B \leq$tout les majorants de B alors

$$\sup\left\{\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X}/0 \neq x \in X\right\} \leq \frac{C_4}{C_1}\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Ainsi

$$\|A\|_2^{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X} = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X}/0 \neq x \in X\right\} \leq \frac{C_4}{C_1}\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

D'où

$$\|A\|_2^{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{C_4}{C_1}\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)} \text{......}(1*)$$

* De même, si on utilise

$$\frac{C_3}{C_1}\frac{\|Ax\|_1^Y}{\|x\|_1^X} \leq \frac{\|Ax\|_2^Y}{\|x\|_2^X} \text{ pour tout } 0 \neq x \in X$$

on peut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$C \|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|A\|_2^{\mathcal{L}(X,Y)} ......(2*)$$

De $(1*)$ et $(2*)$, on obtient que $\|A\|_1^{\mathcal{L}(X,Y)}$ et $\|A\|_2^{\mathcal{L}(X,Y)}$ sont équivalentes

Exercice 8

Soit A un opérateur linéaire borné sur un s. e. v. n. $D(A)$ dense dans un espace normé X à valeur dans un espace de Banach Y. Posons

$$\widetilde{A}x := \begin{cases} Ax & \text{si} \quad x \in D(A), \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n & \text{si} \quad x \notin D(A). \end{cases}$$

Ici, (x_n) est la suite de $D(A)$ qui converge vers x. (Cette suite existe car $D(A)$ est dense dans X).

1. Montrer que $\widetilde{A}$ est bien défini, linéaire et borné sur X.

   Réponse :

   – *$\widetilde{A}$ est bien défini : On distingue deux cas :*

   Cas 1 : $x \in D(A)$. On a $\widetilde{A}x = Ax$ alors $\widetilde{A}x$ est bien défini.

   Cas 2 : $x \notin D(A)$.

   * *Montrons que* $\lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n$ *existe :* Puique A est linéaire borné alors

$$\begin{aligned} \forall p, q \quad : \quad & \|Ax_p - Ax_q\| = \|A(x_p - x_q)\| \\ \leq \quad & \|A\| \|x_p - x_q\| ...... (*) \end{aligned}$$

   Puisque la suite (x_n) est de Cauchy (car elle est convergente) alors de $(*)$ on peut montrer que (Ax_n) est une suite de Cauchy (dans Y) puisque Y est de Banach donc il est complet alors (Ax_n) est une suite convergente. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} Ax_n$ existe.

   Attention : Soit (x_n) la suite de $D(A)$ qui converge vers $x \notin D(A)$. Malgré que A est borné sur $D(A)$ (donc, A est continue sur $D(A)$) mais on ne peut rien dire sur la validité de l'igalité $\lim_{n\to+\infty} Ax_n = A \lim_{n\to+\infty} x_n$ car $x = \lim_{n\to+\infty} x_n \notin D(A)$. Et c'est cette condition qui manque pour voir si on peut inverser la limite avec un opérateur continue.

* *Montrons que* $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$ *ne dépend pas du choix de la suite de* $D(A)$ *qui converge vers* x *: C'est à dire, on montre que si* (x_n) *et* (y_n) *sont deux suites de* $D(A)$ *qui convergent vers* x *alors* $\lim_{n\to+\infty} Ax_n = \lim_{n\to+\infty} Ay_n$: Posons $a = \lim_{n\to+\infty} Ax_n$ et $b = \lim_{n\to+\infty} Ay_n$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \|a - Ax_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|Ay_n - b\| = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0 \text{ car } 0 \leq \|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|a - b\| \\ &\leq \|a - Ax_n\| + \|Ax_n - Ay_n\| + \|Ay_n - b\| \\ &\leq \|a - Ax_n\| + \|A\| \|x_n - y_n\| + \|Ay_n - b\| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|a - b\| = 0.$$

Donc $a = b$.

– $\widetilde{A}$ *est linéaire :* Soit $\alpha \in \mathbb{k}$ et $x, y \in X$. On distingue 4 cas :

Cas 1 : $x, y \in D(A)$. Donc

$$\alpha\widetilde{A}x + \widetilde{A}y = \alpha Ax + Ay....(1).$$

Puisque $D(A)$ est un sous e.v. alors $\alpha x + y \in D(A)$. Ainsi

$$\widetilde{A}(\alpha x + y) = A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay....(2)$$

De (1) et (2) on trouve $\widetilde{A}(\alpha x + y) = \alpha\widetilde{A}x + \widetilde{A}y$.

Cas 2 : $x, y \notin D(A)$. Soient (x_n) et (y_n) les deux suites de $D(A)$ qui convergent (resp.) vers x et y. On a

$$\begin{aligned}
\alpha\widetilde{A}x + \widetilde{A}y &= \alpha \lim_{n\to\infty} Ax_n + \lim_{n\to\infty} Ay_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (\alpha Ax_n + Ay_n) \text{ car } (Ax_n) \text{ et } (Ay_n) \text{ convergentes} \\
&= \lim_{n\to\infty} A(\alpha x_n + y_n) \\
&= \widetilde{A}(\alpha x + y) \text{ car } (\alpha x_n + y_n) \subset D(A) \text{ converge vers } \alpha x + y.
\end{aligned}$$

Cas 3 : $x \in D(A)$ et $y \notin D(A)$. Soit (y_n) la suite de $D(A)$ qui converge vers y. On a

$$\begin{aligned}
\alpha\widetilde{A}x + \widetilde{A}y &= \alpha Ax + \lim_{n\to\infty} Ay_n \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} Ax + \lim_{n\to\infty} Ay_n \text{ car } Ax \text{ est une suite constante (ne dépend pas de } n\text{)} \\
&= \lim_{n\to\infty} A(\alpha x + y_n) \\
&= \widetilde{A}(\alpha x + y) \text{ car la suite } (\alpha x + y_n) \text{ converge vers } \alpha x + y.
\end{aligned}$$

Cas 4 : $x \notin D(A)$ et $y \in D(A)$. A le faire (Similaire au cas 3).

– $\widetilde{A}$ *est borné :* Soit $x \in X$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $x \in D(A)$. On a

$$\left\|\widetilde{A}x\right\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| .... (1)$$

Cas 2 : $x \notin D(A)$. Soit (x_n) la suite de $D(A)$ qui converge vers x. On a

$$\|Ax_n\| \leq \|A\| \|x_n\| \text{ pour tout } n$$

Puisque $\|.\|$ est continue sur X, les suites (x_n), $(Ax_n) \subset X$ sont convergentes (resp.) vers x, $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n \in X$ alors, par passage à limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\left\| \lim_{n\to\infty} Ax_n \right\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Ainsi

$$\left\| \widetilde{A}x \right\| \leq \|A\| \|x\| \ldots\ldots (2)$$

De (1) et (2), on trouve

$$\exists M = \|A\| \geq 0, \forall x \in X : \left\| \widetilde{A}x \right\| \leq \|A\| \|x\| \ldots\ldots (*).$$

Cela veut dire que $\widetilde{A}$ est borné.

2. Montrer que $\left\| \widetilde{A} \right\| = \|A\|$.

Réponse : D'une part, de $(*)$, on obtient

$$\left\| \widetilde{A} \right\| \leq \|A\| \ldots (2*).$$

D'autre part, on a

$$\|A\| = \sup_{0\neq x\in D(A)} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{0\neq x\in D(A)} \frac{\left\| \widetilde{A}x \right\|}{\|x\|} = \sup \left\{ \frac{\left\| \widetilde{A}x \right\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in D(A) \right\}.$$

Mais

$$\sup\left\{\frac{\left\|\widetilde{A}x\right\|}{\|x\|}:0\neq x\in D(A)\right\} \leq \sup\left\{\frac{\left\|\widetilde{A}x\right\|}{\|x\|}:0\neq x\in X\right\}$$
$$\text{car } B \subset C \Longrightarrow \sup B\leq \sup C.$$

alors

$$\|A\|\leq \sup\left\{\frac{\left\|\widetilde{A}x\right\|}{\|x\|}:0\neq x\in X\right\}=\sup_{0\neq x\in X}\frac{\left\|\widetilde{A}x\right\|}{\|x\|}=\left\|\widetilde{A}\right\|.$$

C'est à dire

$$\|A\|\leq\left\|\widetilde{A}\right\| ......(3*).$$

De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve $\left\|\widetilde{A}\right\|=\|A\|$.

3. Enoncer ce théorème.

Réponse : Soit A un opérateur linéaire borné sur un s. e. v. n. $D(A)$ dense dans un espace normé X à valeur dans un espace de Banach Y. Alors, il existe un opérateur $\widetilde{A}$ linéaire borné sur X tel que

– $\widetilde{A}x=Ax$ pour tout $x\in D(A)$.

– $\left\|\widetilde{A}\right\|=\|A\|$.

L'opérateur $\widetilde{A}$ s'appelle prolongement par continuité de A ou bien extension bornée de A.

Exercice 9

Montrer que si X est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X)$ est une **algèbre** de Banach.

Réponse :

Rappellons que, par définition, $\mathcal{L}$ est une algèbre de Banach sur le corp $\Bbbk$ si

– $\mathcal{L}$ *est un espace vectoriel normé complet sur* $\Bbbk$. (On note $\|.\|$ la norme)

– $\mathcal{L}$ *est muni d'une loi interne* . tel que pour tout $\alpha\in\Bbbk$ et pour tout $x,y,z\in\mathcal{L}$ *on a*

* $(xy)z=x(yz)$ et $(y+z)x=yx+zx$.

* $x(y+z) = xy + xz$ et $(\alpha x) y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$.

* $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

Montrons, maintenant, que si X est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach :

– On a $\mathcal{L}(X)$ est un espace vectoriel normé sur $\Bbbk$ muni de la norme d'opérateurs canonique définie comme suit $\|A\| := \sup\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. On a $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$ est un espace de Banach (complet) car X (l'espace d'arrivé) est un espace de Banach.

– Considérons une loi sur $\mathcal{L}(X)$ qui est le produit de deux opérateurs de $\mathcal{L}(X)$ (composition de deux opérateurs de $\mathcal{L}(X)$) C'est à dire, $AB = A\circ B$ pour tout $A, B \in \mathcal{L}(X)$.

a. *La loi est interne sur* $\mathcal{L}(X)$: C'est à dire, pour tout $A, B \in \mathcal{L}(X)$ on a $AB \in \mathcal{L}(X)$. En effet,

* Pour tout $\alpha \in \Bbbk$ et $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} AB(\alpha x + y) &= A[B(\alpha x + y)] \text{ définition de la composition} \\ &= A(\alpha Bx + By) \text{ car } B \text{ est linéaire } (B \in \mathcal{L}(X)) \\ &= \alpha A(Bx) + A(By) \text{ car } A \text{ est linéaire } (A \in \mathcal{L}(X)) \\ &= \alpha ABx + ABy. \end{aligned}$$

Donc AB est linéaire......(1$*$)

* Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned} \|ABx\| &= \|A(Bx)\| \\ &\leq \|A\| \|Bx\| \text{ car } A \text{ est borné } (A \in \mathcal{L}(X)) \\ &\leq \|A\| \|B\| \|x\| \text{ car } B \text{ est borné } (B \in \mathcal{L}(X)). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = \|A\| \|B\| \geq 0, \forall x \in X : \|ABx\| \leq M \|x\| ....(*)$$

Cela veut dire que AB est borné...... $(2*)$

De $(1*)$ et $(2*)$, on obtient que $AB \in \mathcal{L}(X)$.

b. Pour tout $\alpha \in \mathbb{k}$ et pour tout $A, B, C \in \mathcal{L}(X)$ on a

* $(AB)C = A(BC)$ et $(B + C)A = BA + CA$.

* $A(B + C) = AB + AC$ et $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

* $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. D'aprés $(*)$.

Exercice 10 : *Existence de l'inverse d'un opérateur linéaire.*

Soient $A, B : X \to X$ deux opérateurs linéaires ;

1. Montrer que si $AB + A + I = BA + A + I = 0$ alors A est inversible. Déterminer A^{-1}.

   Réponse : On a $AB + A + I = BA + A + I = 0$ alors $AB + A + I = 0$ et $BA + A + I = 0$. Ce qui implique que $A(-B - I) = I$ et $(-B - I)A = I$. Alors,

   $$\exists C = -B - I : AC = I \text{ et } CA = I.$$

   Cela veut dire que A est inversible et $A^{-1} = C = -B - I$.

2. Montrer que si $(AB)^{-1}$ et $(BA)^{-1}$ existent alors A^{-1} et B^{-1} existent.

   Réponse :

   – A^{-1} *existe :*

   * Soit $x \in X$ tel que $Ax = 0$. On a

   $$\begin{aligned} (BA)x &= B(Ax) \\ &= B0 \text{ car } B \text{ est linéaire } (B0 = 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est à dire $(BA)\, x = 0$. Ceci implique que $x = 0$ car BA est injectif (on a $(BA)^{-1}$existe donc il est bijectif). C'est à dire, on a montré que

$$\forall x \in X : Ax = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Cela veut dire que A est injectif................(1$*$)

* Soit $y \in X$. Puisque $(AB)^{-1}$ existe alors AB est surjectif. Donc, il existe $z \in X$ tel que $y = (AB)\, z$. Ceci implique que $y = A\,(Bz) = Ax$ avec $x = Bz$. Ainsi on a montré que

$$\forall y \in X, \exists x = Bz \in X : y = Ax.$$

Cela veut dire que A est surjectif................(2$*$)

Conclusion : De (1$*$) et (2$*$), on trouve que A est bijectif. Donc, A^{-1} existe.

– B^{-1} *existe :* De même.

....

3.2 Exercices suplimentaires

Exercice 1 : *Convergence ponctuelle (dite simple où bien forte) dans* $\mathcal{L}\,(X, Y)$.

Connaissances : La suite d'opérateurs $(A_n) \subset \mathcal{L}\,(X, Y)$ converge fortement vers $A \in \mathcal{L}\,(X, Y)$.

Enoncé de l'exercice : Considérons la suite d'opérateurs (A_n) défini sur $C\,[0, 1]$ (muni de la norme de la convergence uniforme) par $A_n f = \left(1 + \frac{1}{n}\right) f$.

1. Vérifier la linéarité et la bornitude de A_n. Puis calculer $\|A_n\|$.
2. Etudier la convergente forte de (A_n) vers l'opérateur identité.

....

Exercice 2 : *Convergence uniforme (dite en norme) dans* $\mathcal{L}\,(X, Y)$.

Connaissances :

– La suite d'opérateurs $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ converge uniformément vers $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. (On peut dire seulement (A_n) converge vers A (voir Ex 1))

– Relations qui existent entre la convergence forte et uniforme dans $\mathcal{L}(X,Y)$.

Enoncé de l'exercice : Considérons la suite d'opérateurs (A_n) défini sur l_2 par

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{1}{n}(x_1, x_2, ...).$$

1. Vérifier la linéarité et la bornitude de A_n. Puis calculer $\|A_n\|$.
2. Etudier la convergente uniforme de (A_n) vers l'opérateur nul. Puis, la convergence forte de (A_n).

....

Exercice 3 : *Application du Théorème de Banach Steinhauss.*

Connaissances :

– Définition d'un espace complet

– Théorème de Banach Steinhauss (*Désigné dans la littérature Américaine par Le principe de la borne uniforme).*

Enoncé de l'exercice : Soient X et Y deux $\mathbb{k}-$e. v. n. On suppose que X est un espace complet.

1. Monter que si $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ alors $(\|A_n\|)$ est bornée.
2. On suppose que Y est complet. Soit $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$. On suppose que pour tout $x \in X$ la suite $(A_n x)$ est de Cauchy. Montrer qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que (A_n) converge fortement vers A.
3. Soient (x_n) une suite de X qui converge vers $x \in X$ et (A_n) une suite de $\mathcal{L}(X,Y)$ qui converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Montrer que $(A_n x_n)$ converge vers Ax.

4. Soient $(A_n) \subset \mathcal{L}(X), (B_n) \subset \mathcal{L}(X)$ et $A, B \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que (A_n) converge vers A et (B_n) converge vers B. Montrer que $(A_n B_n)$ converge vers AB.

....

Exercice 4 : *Injectivité, surjectivité et inversibilité.*

Connaissances : Définition d' : Opérateur injectif, opérateur surjectif, opérateur inversible.

Enoncé de l'exercice : Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de l'opérateur linéaire définit sue $l_2(\mathbb{C})$ par $A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, x_3, x_4, ...)$.

....

Exercice 5 : *Existence d'un inverse linéaire borné.*

Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $R(A) = Y$ et il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on a $\|Ax\| \geq C\|x\|$.
2. A^{-1} existe et il est borné.

Application : Soit (λ_n) une suite réelle tel que $0 < \inf\limits_n |\lambda_n| \leq \sup\limits_n |\lambda_n| < +\infty$. Considérons l'opérateur A défini sur $l_2(\mathbb{C})$ par $A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$.

1. Vérifier la linéairité de A.
2. Par deux façons, montrer que A^{-1} existe et il est borné.

....

Exercice 6 : *L'adjoint d'un opérateur linéaire borné.*

Connaissances :

Adjoint d'un opérateur linéaire borné et ses propriétés :

Cas où $A : X \to Y$ avec X et Y deux $\mathbb{k}-$e. v. n.

Cas où $A : H_1 \to H_2$ avec H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.

Enoncé de l'exercice : Calculer l'adjoint des opérateurs suivants :

1. L'opérateur $A : (l_2, \|.\|_2) \to (l_2, \|.\|_2)$ avec $A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.
2. L'opérateur $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par $Ay(t) = \int_0^1 K(t,s)\, y(s)\, ds$ où le noyau K est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

....

Exercice 7 *Opérateur auto adjoint.*

Connaissances : Définition d'un opérateur auto adjoint.

Enoncé de l'exercice :

1. Montrer que l'opérateur $A : (l_2, \|.\|_2) \to (l_2, \|.\|_2)$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, 0....)$$

   est un opérateur auto adjoint.

2. Déterminer la condition sur le noyau K pour que L'opérateur $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par $Ay(t) = \int_0^1 K(t,s)\, y(s)\, ds$ soit auto adjoint.

....

Exercice 8 : *Valeur propre et spectre d'un opérateur.*

Connaissances : Définition de valeur propre et spectre d'un opérateur.

Enoncé de l'exercice : Considérons l'opérateur $A : (l_2, \|.\|_2) \to (l_2, \|.\|_2)$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

1. Montrer que A n'as pas de valeur propre.
2. Montrer que $0 \in \sigma(A)$.

....

Exercice 9 : *Opérateur compact.*

Connaissances : Définition d'un opérateur compact (dans le cas où l'espace d'arrivé est de Banach). L'espace $\mathcal{K}(X, Y)$.

Enoncé de l'exercice : Soit K une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Montrer que l'opérateur $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds$ est compact.

Chapitre 4

•

Examens et interrogation corrigés

Interrogation (2015/2016)

Exercice 1 Soient X un $\Bbbk-$e.v. , $x_0 \in X$ et $f : X \longrightarrow \Bbbk$ une forme linéaire *(une fonctionnelle linéaire)* tel que $f(x_0) \neq 0$. Montrer que f est surjectif.

Exercice 2 Considérons l'opérateur

$$T : (C[0,1], \|.\|_\infty) \underset{f \longmapsto Tf}{\rightarrow} (C[0,1], \|.\|_\infty)$$

telque $Tf(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que T est linéaire, borné puis trouver $\|T\|$.

Exercice 3 Soit X l'ensemble des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $[0, 2\overline{\wedge}]$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. Considérons l'opérateur

$$A : X \underset{f \rightarrow Af = f'}{\rightarrow} X.$$

1. Montrer que A est linéaire.
2. Montrer que $\ker A$ est un fermé.
3. Soit la suite $f_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ pour tout $t \in [0, 2\overline{\wedge}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n'\|_\infty$.

4. Utiliser la suite de fonctions (f_n) pour montrer que A n'est pas borné.

Correction

Solution 1 Soit $y \in \mathbb{k}$. Puisque $f(x_0) \neq 0$ alors $y = \frac{yf(x_0)}{f(x_0)}$ mais

$$\frac{yf(x_0)}{f(x_0)} = \frac{y}{f(x_0)} f(x_0) \underset{\frac{y}{f(x_0)} \in \mathbb{k}}{\overset{f \text{ linéaire}}{=}} f\left(\frac{y}{f(x_0)} x_0\right)$$

alors $y = f\left(\frac{y}{f(x_0)} x_0\right)$. C'est à dire, on a montré que

$$\forall y \in \mathbb{k}, \exists x = \frac{y}{f(x_0)} x_0 \in X : y = f(x).$$

Cela veut dire que f est surjectif.

Solution 2

* *Montrons que* T *est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C[0,1]$. *Montrons que* $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$.

Remarquer que $T(\alpha f + g)$ et $\alpha Tf + Tg$ *sont des fonctions donc pour montrer que* $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$ *on montre que* $T(\alpha f + g)(x) = (\alpha Tf + Tg)(x)$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g)(x) \quad : & = \int_0^x (\alpha f + g)(t)\, dt = \int_0^x (\alpha f(t) + g(t))\, dt \\ & = \alpha \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^x g(t)\, dt = \alpha Tf(x) + Tg(x) \\ & = (\alpha Tf + Tg)(x). \end{aligned}$$

C'est à dire $T(\alpha f + g)(x) = (\alpha Tf + Tg)(x)$. Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C[0,1] : T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg.$$

Cela veut dire que T est linéaire.

* *Montrons que T est borné :* Soit $f \in C[0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t)\,dt \right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \left[\int_0^x |f(t)|\,dt \right] \text{ car } \left| \int_0^x f(t)\,dt \right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt. \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \left[\int_0^x \|f\|_\infty\,dt \right] \text{ car } |f(t)| \leq \|f\|_\infty \text{ pour tout } t. \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left[\|f\|_\infty \int_0^x dt \right] \text{ car } \|f\|_\infty \text{ ne dépend pas de } t. \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left[\|f\|_\infty x \right] = \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

C'est à dire $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall f \in C[0,1] : \|Tf\|_\infty \leq M\|f\|_\infty \text{........}(1*)$$

Cela veut dire que T est borné.

* *Calculons $\|T\|$:*

– De $(1*)$, on trouve que $\|T\| \leq M = 1$......$(2*)$

– Si on prend $f_* = 1$ (pour tout $x \in [0,1] : f_*(x) = 1$) on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\|Tf_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} &= \frac{\sup_{x\in[0,1]} |Tf_*(x)|}{\sup_{x\in[0,1]} |f_*(x)|} = \frac{\sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f_*(t)\,dt \right|}{\sup_{x\in[0,1]} |1|} \\
&= \frac{\sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x 1dt \right|}{\sup_{x\in[0,1]} 1} = \frac{\sup_{x\in[0,1]} |x|}{1} \\
&= \sup_{x\in[0,1]} x = 1.
\end{aligned}$$

Mais $\frac{\|Tf_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} \leq \|T\|$ alors $1 \leq \|T\|$ .....$(3*)$

De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve $\|T\| = 1$.

Solution 3

1. *Montrons A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in X$. On a

$$\begin{aligned} A(\alpha f + g) &: = (\alpha f + g)' \\ &= \alpha f' + g' \text{ car la dérivation est linéaire} \\ &= \alpha A f + A g. \end{aligned}$$

   Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in X : A(\alpha f + g) = \alpha A f + A g.$$

   Cela veut dire que A est linéaire.

2. *Montrons que* $\ker A$ *est un fermé :* Soit (f_n) une suite de $\ker A$ convergente vers f.

   (a) (f_n) est une suite de $\ker A$ alors pour tout n on a $f_n \in \ker A$. Ainsi (de la définition du $\ker A$) on trouve que $Af_n = 0$ pour tout n. D'où (de la définition du A) on trouve que $f_n' = 0$ sur l'intervalle $[0, 2\overline{\wedge}]$ pour tout n. Ceci implique que pour tout n on a $f_n = c_n$ sur $[0, 2\overline{\wedge}]$ avec $c_n \in \mathbb{R}$. C'est à dire, $(f_n) = (c_n) \ldots\ldots (*)$ ((f_n) est une suite de nombres réelles.)

   (b) (f_n) est une suite convergente vers f. De $(*)$, on trouve que la suite de nombres réelles (c_n) est convergente vers f. Ceci implique que f est une fonction constante sur $[0, 2\overline{\wedge}]$. Ce qui implique que $Af = f' = 0$.

   Ainsi, $f \in \ker A$.

   C'est à dire, on montré que pour toute suite (f_n) de $\ker A$ convergente vers f on a $f \in \ker A$. Cela implique que $\ker A$ est fermé.

3. *Calculons $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n'\|_\infty$:* On a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\overline{\wedge}]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [0, 2\overline{\wedge}]} \left| \frac{\sin nt}{n} \right| = \frac{1}{n} \max_{t \in [0, 2\overline{\wedge}]} |\sin nt| = \frac{1}{n},$$

et

$$\left\|f_n^{'}\right\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\overline{\wedge}]} \left|f_n^{'}(t)\right| = \sup_{t\in[0,2\overline{\wedge}]} |\cos nt| = \max_{t\in[0,2\overline{\wedge}]} |\cos nt| = 1.$$

4. *Utilisons la suite de fonctions (f_n) pour montrer que A n'est pas borné :* Par l'absurde, on suppose que A est borné alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in X$ on $\|Af\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$. Cette inégalité reste vérifie pour toutes les fonctions f_n car $f_n \in X$ (Pourquoi). C'est a dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|Af_n\|_\infty \leq M\|f_n\|_\infty.$$

Ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\|f_n^{'}\right\|_\infty \leq M\|f_n\|_\infty.$$

Alors de la question 3 on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq M\frac{1}{n}.$$

Par passage à limite quand $n \to \infty$, on trouve $1 \leq 0$: Contradiction.

....

Contrôle final (2015/2016)

Exercice 1 Soit $l_2(\mathbb{C}) = \left\{(x_1, x_2, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} : \sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$. Pour tout $n \geq 1$, on définit l'opérateur $A_n : l_2(\mathbb{C}) \longrightarrow l_2(C)$ par

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, A_n est linéaire borné et que $\|A\| = 1$.
2. Montrer que A_n n'est pas injectif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Est ce que A_n est surjectif.
4. Montrer que $N_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) / x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}\}$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que pour tout $x \in l_2(\mathbb{C})$ la suite $(A_n x)$ est convergente vers une limite que l'on détermine.

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. Soient (e_n) une base Hilbertienne de H et (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls. On définit deux opérateurs A et B sur H par

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \text{ et } Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ pour tout } x \in H.$$

1. Montrer que $A \in \mathcal{L}(H)$ Ssi (λ_n) est bornée.
2. On suppose que (λ_n) est bornée et que $\inf_n |\lambda_n| > 0$.
   (a) Trouver $\|A\|$.
   (b) Montrer que $B \in \mathcal{L}(H)$ et calculer Ae_n et Be_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déduire que $AB = BA$.
   (d) Déduire que A est inversible. Puis, déterminer A^{-1}.

Correction

Solution 1 :

1. *Montrons que pour tout $n \geq 1$, A_n est linéaire borné et que $\|A\| = 1$:* Soit $n \geq 1$ (n fixé)

   * *Montrons que A_n est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$. on a

$$\begin{aligned} A_n(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) &= A_n(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...) \\ &= \left(\underbrace{0, .., 0}_{n}, \alpha x_{n+1} + y_{n+1}, \alpha x_{n+2} + y_{n+2}, ..\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, \alpha x_{n+1}, \alpha x_{n+2}, .. \right) + \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, y_{n+1}, y_{n+2}, .. \right)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ... \right) + \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, y_{n+1}, y_{n+2}, ... \right) \\ &= \alpha A_n \left(x_1, x_2, ... \right) + A_n \left(y_1, y_2, ... \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall \alpha &\in \mathbb{C}, \forall \left(x_1, x_2, .. \right), \left(y_1, y_2, .. \right) \in l_2 \left(\mathbb{C} \right) : \\ A_n \left(\alpha \left(x_1, x_2, ... \right) + \left(y_1, y_2, .. \right) \right) &= \alpha A_n \left(x_1, x_2, .. \right) + A_n \left(y_1, y_2, .. \right). \end{aligned}$$

Cela veut dire que A_n est linéaire.

* *Montrons que A_n est borné :* Soit $\left(x_1, x_2, ... \right) \in l_2 \left(\mathbb{C} \right)$. On a

$$\begin{aligned} \left\| A_n \left(x_1, x_2, .. \right) \right\|^2 &\overset{\text{déf. } A}{=} \left\| \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, .. \right) \right\|^2 \\ &\overset{\text{déf. } \|.\|^2}{=} \underbrace{|0|^2 + |0|^2 + ... + |0|^2}_{n} + |x_{n+1}|^2 + |x_{n+2}|^2 + ... \\ &= \sum_{i=n+1}^{i=\infty} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 = \left\| \left(x_1, x_2, ... \right) \right\|^2, \end{aligned}$$

donc $\left\| A_n \left(x_1, x_2, ... \right) \right\| \leq \left\| \left(x_1, x_2, ... \right) \right\|$. Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall \left(x_1, x_2, ... \right) \in l_2 \left(\mathbb{C} \right) \text{ on a } \left\| A_n \left(x_1, x_2, ... \right) \right\| \leq M \left\| \left(x_1, x_2, ... \right) \right\| .... (1*)$$

Cela veut dire que A_n est borné.

* *Montrons que $\|A_n\| = 1$:*

a. De $(1*)$, on trouve $\|A_n\| \leq M = 1$. Donc $\|A_n\| \leq 1$........$(2*)$

b. *Montrons que* $1 \leq \|A_n\|$: On pose $x_* = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, 1, 0, 0, 0, ...\right)$. On a $0 \neq x_* \in l_2(\mathbb{C})$ car

$$\underbrace{|0|^2 + ... + |0|^2}_{n} + |1|^2 + |0|^2 + |0|^2 + ... = 1 < \infty$$

et

$$\left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, 0, 0, 0, ...\right) \neq 0 \text{ une suite non nulle car le terme } n+1 \text{ est non nul..}$$

De plus,

$$\|x_*\| = \left\| \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, 0, 0, 0, ...\right) \right\| = \sqrt{\underbrace{|0|^2 + .. + |0|^2}_{n} + |1|^2 + |0|^2 + ...} = 1$$

et

$$\|A_n x_*\| = \left\| A_n \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, 0, 0, ..\right) \right\| = \left\| \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, 0, 0, ..\right) \right\| = 1.$$

Alors $\frac{\|A_n x_*\|}{\|x_*\|} = 1$. Mais

$$\frac{\|A_n x_*\|}{\|x_*\|} \leq \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})} \frac{\|A_n (x_1, x_2, ...)\|}{\|(x_1, x_2, ...)\|} = \|A_n\|.$$

Alors $1 \leq \|A_n\| .... (3*)$

De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve que $\|A_n\| = 1$.

2. *Montrons que A_n n'est pas injectif pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

   Rappel : Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On a

$$(A \textit{ est injectif}) \Longleftrightarrow (\ker A = \{0\}) \Longleftrightarrow (\forall x \in X : Ax = 0 \Longrightarrow x = 0).$$

Donc

$$(A \text{ n'est pas injectif}) \Longleftrightarrow (\ker A \neq \{0\}) \Longleftrightarrow (\exists x \neq 0 : Ax = 0)\,.$$

Méthode 1 : On a $A_n\,(1,0,......) = \left(\underbrace{0,0,.....,0}_{n},0,0,......\right)$. Alors, il existe $x \neq 0$ (par exemple $x = (1,0,......) \neq 0$) telque $A_n x = 0$. Ceci implique que A_n n'est pas injectif.

Méthode 2 : On a $A_n\,(1,0,......) = \left(\underbrace{0,0,.....,0}_{n},0,0,......\right)$. Alors, $(1,0,......) \in \ker A$. Ce qui implique que $\ker A \neq \{0\}$. Ainsi, A_n n'est pas injectif.

3. *Est ce que A_n est surjectif :*

   Rappel : Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On a

$$(A \text{ est surjectif }) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} A = Y) \Longleftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X : Ax = y)\,.$$

Donc

$$(A \text{ n'est pas surjectif}) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im} A \neq Y) \Longleftrightarrow (\exists y \in Y, \forall x \in X : Ax \neq y)\,.$$

Méthode 1 : On remarque que pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l_2\,(\mathbb{C})$ on a

$$A_n\,(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0,0,.....,0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right) \neq (1,0,0,......)$$

C'est à dire

$$\exists\,(y_1, y_2, ...) = (1,0,0,...) \in l_2\,(\mathbb{C})\,, \forall\,(x_1, x_2, ...) \in l_2\,(\mathbb{C}) : A_n\,(x_1, x_2, ...) \neq (y_1, y_2, ...)\,.$$

Ceci implique que A_n n'est pas surjectif.

Méthode 2 : On remarque que pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$ on a

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right) \neq (1, 0, 0, ...)$$

C'est à dire $(1, 0, 0, ...) \notin \operatorname{Im} A$. Donc, $\operatorname{Im} A \neq Y$. Ceci implique que A_n n'est pas surjectif.

4. *Montrons que* $N_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) / x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}\}$ *est fermé pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

   Rappel : Si $A : X \longrightarrow Y$ *est un opérateur linéaire borné alors le noyau* $\ker A$ *est fermé.*

   On a

$$\begin{aligned}
[(x_1, x_2, ...) \in \ker A_n] &\iff [(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C}) : A_n(x_1, x_2, ...) = 0] \\
&\iff \left[(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C}) : \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right) = 0\right] \\
&\iff [(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C}) : x_i = 0 \text{ pour tout } i \geq n+1] \\
&\iff [(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) / x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}] \\
&\iff [(x_1, x_2, ...) \in N_n].
\end{aligned}$$

   Ainsi $N_n = \ker A_n$. Puisque A_n est linéaire borné alors N_n est fermé.

5. *Montrons que pour tout* $x \in l_2(\mathbb{C})$ *la suite* $(A_n x)$ *est convergente vers une limite que l'on détermine :* De la question 1, on a

$$\|A_n x - 0\|^2 = \|A_n x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{i=\infty} |x_i|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

   car $R_n := \sum_{i=n+1}^{i=\infty} |x_i|^2$ est le reste de la série convergente $\sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2$. Ici, $\sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2$ est convergente ($\sum_{i=1}^{i=\infty} |x_i|^2 < \infty$) car $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$.

Ainsi, $(A_n x)$ est convergente vers 0.

Solution 2

1. *Montrons que $A \in \mathcal{L}(H)$ Ssi $(\lambda_n)_n$ est bornée :*

   Rappelons que

   (a) *$\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$ l'espace des opérateurs linéaire bornés définit de H dans H.*

   (b) (e_n) est une base Hilbertienne de H (ou bien une base orthonormale de H) veut dire que :

   – (e_n) est une suite orthonormale : Pour tout n et k, on a $\langle e_n, e_n \rangle = 1$ et $\langle e_n, e_k \rangle = 0$ pour $k \neq n$.

   – (e_n) est totale (voir la définition).

   * *On suppose que $A \in \mathcal{L}(H)$ et on montre que (λ_n) est bornée*: Soit $n \geq 1$ (fixé). Puisque $Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$ alors

$$\begin{aligned}
\|Ae_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_n, e_k \rangle e_k \right\| \\
&= \left\| \lambda_n \langle e_n, e_n \rangle e_n + \sum_{k=1 \text{ et } k \neq n}^{\infty} \lambda_k \langle e_n, e_k \rangle e_k \right\| \\
&= \|\lambda_n e_n\| \text{ car } \langle e_n, e_n \rangle = 1 \text{ et } \langle e_n, e_k \rangle = 0 \text{ pour tout } k \neq n \\
&= |\lambda_n| \|e_n\| \text{ de la définition de la norme} \\
&= |\lambda_n| \text{ car } \|e_n\| = \sqrt{\langle e_n, e_n \rangle} = 1.
\end{aligned}$$

   Mais $\|Ae_n\| \leq \|A\| \|e_n\|$ car $A \in \mathcal{L}(H)$. Ainsi

$$|\lambda_n| = \|Ae_n\| \leq \|A\| \|e_n\| = \|A\|.$$

C'est à dire, on a montré que

$$\forall n, |\lambda_n| \leq \|A\|.$$

Cela veut dire que (λ_n) est bornée par $\|A\|$.

* *On suppose que (λ_n) est bornée et on montre que $A \in \mathcal{L}(H)$ (c'est à dire on montre que A est bien défini, linéaire et borné) :* Puisque (λ_n) est bornée alors $M = \sup_n |\lambda_n|$ existe (c. à d. $M \in \mathbb{R}$).

Rappel : Si (e_n) est une suite orthonormale d'un espace de Hilbert H alors la série de vecteurs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ converge Ssi $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ converge. *En plus, on a* $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ ......(1∗)

– *A est bien définit :* Soit $x \in H$. *Montrons que* $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n < \infty$. *C'est à dire, la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_n \langle x, e_n \rangle}_{c_n} e_n$ *est convergente. Pour cela, il suffit de montrer que* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente : Pour tout k, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n \langle x, e_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \underset{\text{Identité de Perseval}}{\overset{(e_n) \text{ base Hilbertienne de } H}{=}} M^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\sum_{n=1}^{k} |\lambda_n \langle x, e_n \rangle|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \text{......}(2*)$$

Ainsi, la suite croissante $\left(\sum_{n=1}^{k} |\lambda_k \langle x, e_k \rangle|^2\right)_k$ est majorée par $M^2 \|x\|^2$. Ce qui implique qu'elle est convergente.

– *A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x, y \in H$. on a

$$\begin{aligned}
A(\alpha x + y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \alpha x + y, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\alpha \langle x, e_n \rangle + \langle y, e_n \rangle\right] e_n \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, e_n \rangle e_n \\
&= \alpha A x + A y.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H : A(\alpha x + y) = \alpha A x + A y.$$

Cela veut dire que A est linéaire.

– *A est borné* : Pour tout $x \in H$, on a

$$\|Ax\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 \overset{(1*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_n \langle x, e_n \rangle\right|^2 \overset{(2*)}{\leq} M^2 \|x\|^2 .$$

C'est à dire on a montré que

$$\exists M = \sup_n |\lambda_n| > 0, \forall x \in H \text{ on a } \|Ax\| \leq M \|x\| \ldots\ldots\ldots. (3*)$$

Ainsi A est borné.

2. a. *Trouvons* $\|A\|$: D'une part de (3∗), on trouve que

$$\|A\| \leq M = \sup_n |\lambda_n| \ldots..(4*)$$

D'autre part, On a

$$\frac{\|Ae_n\|}{\|e_n\|} = \frac{|\lambda_n|}{1} = |\lambda_n| .$$

Mais

$$\frac{\|Ae_n\|}{\|e_n\|} \leq \sup_{0 \neq x \in H} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

alors $|\lambda_n| \leq \|A\|$. C'est à dire

$$\forall n : |\lambda_n| \leq \|A\| \text{ (C. à dire } \|A\| \text{ est un majorant de la suite } (\lambda_n))$$

Ceci implique que

$$M = \sup_n |\lambda_n| \leq \|A\| \text{......}(5*)$$

De $(4*)$ et $(5*)$, on trouve $\|A\| = \sup_n |\lambda_n|$.

b. *Montrons que* $B \in \mathcal{L}(H)$ *et calculons* Ae_n *et* Be_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$:

– $B \in \mathcal{L}(H)$: On a

$$0 \overset{hypoth\grave{e}se}{<} \inf_n |\lambda_n| \overset{\text{propriété } inf}{\leq} |\lambda_n| \text{ pour tout } n,$$

alors $\lambda_n \neq 0$ pour tout n et on a

$$\left|\lambda_n^{-1}\right| = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\left|\inf\limits_n |\lambda_n|\right|} \text{ pour tout } n,$$

ainsi la suite $\left(\lambda_n^{-1}\right)$ est bornée. Si on applique la question 1 on trouve que $B \in \mathcal{L}(H)$.

– *Calculons* Ae_n *et* Be_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$: On a

$$Ae_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_n, e_k \rangle e_k = \lambda_n \langle e_n, e_n \rangle e_n = \lambda_n e_n$$

et

$$Be_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle e_n, e_k \rangle e_k = \lambda_n^{-1} \langle e_n, e_n \rangle e_n = \lambda_n^{-1} e_n.$$

1. c. *Déduire que* $AB = BA$: Soit $x \in H$. On a

$$\begin{aligned} ABx &= A(Bx) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle x, e_k\rangle e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle x, e_k\rangle Ae_k \text{ car } A \text{ est est continue } (A \text{ est linéaire borné}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{(2.b))}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle x, e_k\rangle \lambda_k e_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \\ &\overset{(e_n) \text{ base Hilbertienne de } H}{=} x \\ &= Ix \text{ (Ici, } I : H \to H \text{ l'opérateur identité)} \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$ABx = Ix \text{ pour tout } x \in H.$$

Cela veut dire que $AB = I$.

De même, on montre que $BA = I$.

d. *Déduire que* A *est inversible, déterminer* A^{-1} *:* Puisque

$$\exists C = B : AC = CA = I$$

alors A est inversible et $A^{-1} = C = B$.

....

Rattrapage (2015/2016)

Exercice 1 Considérons l'opérateur $A : (C[0,1], \|.\|_\infty) \longrightarrow (C[0,1], \|.\|_\infty)$ définit par

$$Af(t) = \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right) f(t) \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

1. Montrer que $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$.

2. Trouver $\|A\|$.

3. Montrer que $A - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda \notin [0,1]$.

Exercice 2 Considérons l'opérateur $A : l_1(\mathbb{R}) \to l_1(\mathbb{R})$ définit par

$$A(x_1, x_2, ...) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ..., \frac{1}{n}x_n......\right).$$

1. Montrer que A est bien défini.

2. Montrer que $A \in \mathcal{L}(l_1(\mathbb{R}))$ et calculer $\|A\|$.

3. Résoudre l'équation $Ax = x$.

Correction

Solution 1

1. *Montrons que* $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$:

   * *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} A(\alpha f + g)(t) &= \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)(\alpha f + g)(t) = \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)(\alpha f(t) + g(t)) \\ &= \alpha \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right) f(t) + \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right) g(t) = \alpha A f(t) + A g(t) \\ &= (\alpha A f + A g)(t). \end{aligned}$$

   Ainsi, on a montré que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C[0,1] : A(\alpha f + g) = \alpha A f + A g.$$

   Cela veut dire que A est linéaire.

* *Montrons que A est borné :* Soit $f \in C[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\|Af\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |Af(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left| \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2} t\right) f(t) \right| = \sup_{t\in[0,1]} \left[\left| \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2} t\right) \right| |f(t)| \right] \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \ \text{ car } \left| \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2} t\right) \right| |f(t)| \leq |f(t)| \ \ \forall t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall f \in C[0,1] \ \text{ on a } \ \|Af\|_\infty \leq M \|f\|_\infty \text{..........} (*)$$

Cela veut dire que A est borné.

Conclusion : A est linéaire et borné alors $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$.

2. *Trouvons* $\|A\|$:

   * De $(*)$, on trouve $\|A\| \leq M = 1$. Donc $\|A\| \leq 1$........$(2*)$

   * On prend $f_* = 1$. On a $0 \neq f_* \in C[0,1]$ et

$$\frac{\|Af_*\|_\infty}{\|f_*\|_\infty} = \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} |Af_*(t)|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_*(t)|} = \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2} t\right) f_*(t)\right|}{\sup\limits_{t\in[0,1]} |1|} = \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2} t\right)\right|}{1}$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2} t\right) \right| = \max_{t\in\left[0,\frac{\overline{\wedge}}{2}\right]} \sin t = 1.$$

   Mais

$$\frac{\|Af_*\|}{\|f_*\|} \leq \sup_{0\neq f\in C[0,1]} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \|A\|.$$

   Alors $1 \leq \|A\|$ .... $(3*)$

   De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve que $\|A\| = 1$.

3. *Montrons que* $A - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda \notin [0,1]$ *:* Soit $\lambda \notin [0,1]$. Puisque $A - \lambda I$ est linéaire (pourquoi) alors il suffit de montrer que $N(A - \lambda I) = \{0\}$ et $R(A - \lambda I) = C[0,1]$:

   * *Montrons que* $N(A - \lambda I) = \{0\}$: Il suffit de montrer que si $f \in C[0,1]$ tel que

$(A-\lambda I)f=0$ alors $f=0$. On a

$$\begin{aligned}[(A-\lambda I)f=0] &\Longrightarrow [Af-\lambda f=0] \underset{nulle}{\overset{fct}{\Longrightarrow}} [(Af-\lambda f)(t)=0 \text{ pour tout } t\in[0,1]] \\ &\Longrightarrow [Af(t)-\lambda f(t)=0 \text{ pour tout } t\in[0,1]]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \left[\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)f(t)-\lambda f(t)=0 \text{ pour tout } t\in[0,1]\right] \\ &\Longrightarrow \left[\left(\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)-\lambda\right)f(t)=0 \text{ pour tout } t\in[0,1]\right]........(*)\end{aligned}$$

On a

$$t\in[0,1]\Longrightarrow \frac{\overline{\wedge}}{2}t\in\left[0,\frac{\overline{\wedge}}{2}\right]\Longrightarrow \sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)\in[0,1].$$

Puisque $\lambda\notin[0,1]$ alors

$$\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)-\lambda\neq 0 \text{ pour tout } t\in[0,1]........(2*).$$

Ainsi $(*)$ implique que $f(t)=0$ pour tout $t\in[0,1]$. D'où $f=0$.

* *Montrons que* $R(A-\lambda I)=C[0,1]$: Il suffit de montrer que pour tout $g\in C[0,1]$ il existe $f\in C[0,1]$ tel que $(A-\lambda I)f=g$. Soit $g\in C[0,1]$. Trouvons $f\in C[0,1]$ tel que $(A-\lambda I)f=g$. On a

$$\begin{aligned}&[(A-\lambda I)f=g] \overset{\text{A le faire}}{\Longrightarrow} \left[\left(\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)-\lambda\right)f(t)=g(t) \text{ pour tout } t\in[0,1]\right] \\ &\overset{(2*)}{\Longrightarrow} \left[f(t)=\frac{g(t)}{\sin\left(\frac{\overline{\wedge}}{2}t\right)-\lambda} \text{ pour tout } t\in[0,1]\right]\end{aligned}$$

Solution 2 *Rappelons que* $l_1(\mathbb{R}):=\left\{(x_1,x_2,......)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}:\sum_{i=1}^{i=\infty}|x_i|<\infty\right\}$ est un e. v. n. muni de la norme $\|(x_1,x_2,......)\|=\sum_{i=1}^{i=\infty}|x_i|$ pour tout $(x_1,x_2,......)\in l_1(\mathbb{R})$.

1. *Montrons que* A *est bien défini :* Pour tout $(x_1,x_2,......)\in l_1(\mathbb{R})$ on a $A(x_1,x_2,......)=$

$\left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots.., \frac{1}{n}x_n \ldots\ldots\right)$ et

$$|x_1|+\frac{1}{2}|x_2|+\ldots\ldots+\frac{1}{n}|x_n|+\ldots \underset{\frac{1}{i}\leq 1}{\overset{\forall i}{\leq}} |x_1|+|x_2|+\ldots\ldots+|x_n|+\ldots = \sum_{i=1}^{i=\infty}|x_i| \overset{(x_1,x_2,\ldots\ldots)\in l_1(\mathbb{R})}{<} \infty.$$

Ainsi

$$A(x_1, x_2, \ldots\ldots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots.., \frac{1}{n}x_n \ldots\ldots\right) \in l_1(\mathbb{R}).$$

C'est à dire, on a montré que

$$\forall (x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_1(\mathbb{R}) : A(x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_1(\mathbb{R}).$$

Ceci veut dire que A est bien défini.

2. *Montrons que* $A \in \mathcal{L}(l_1(\mathbb{R}))$ *et calculons* $\|A\|$:

   * *Montrons que A est linéaire : (A le faire)*

   * *Montrons que A est borné :* Soit $(x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_1(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\|A(x_1, x_2, \ldots\ldots)\| &= \left\|\left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots.., \frac{1}{n}x_n \ldots\ldots\right)\right\| = \sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}|x_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{i=\infty}|x_i| = \|(x_1, x_2, \ldots\ldots)\|.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall (x_1, x_2, \ldots) \in l_1(\mathbb{R}) \text{ on a } \|A(x_1, x_2, ..)\| \leq M\|(x_1, x_2, ..)\| \ldots. (1*)$$

Ceci veut dire que A est borné.

Conclusion : A est linéaire et borné alors $A \in \mathcal{L}(l_1(\mathbb{R}))$.

* *Calculons* $\|A\|$:

a. De $(1*)$, on trouve $\|A\| \leq M = 1$. Donc $\|A\| \leq 1 \ldots\ldots..(2*)$

b. *Montrons que* $1 \leq \|A\|$: On pose $x_* = (1, 0, 0, 0, \ldots\ldots)$. On a $0 \neq x_* \in l_1(\mathbb{C})$. De plus

$$\|x_*\| = \|(1,0,0,0,......)\| = |1| + |0| + ... = 1$$

et

$$\|Ax_*\| = \|A\,(1,0,0,0,......)\| = \left\| \left(1, \frac{1}{2}0, \frac{1}{3}0, ..., \frac{1}{n}0...... \right) \right\| = 1.$$

Alors $\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} = 1$. Mais

$$\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} \leq \sup_{0 \neq (x_1,x_2,......) \in l_1(\mathbb{R})} \frac{\|A\,(x_1,x_2,......)\|}{\|(x_1,x_2,......)\|} = \|A\|\,.$$

Alors $1 \leq \|A\|$ .... $(3*)$

De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve que $\|A_n\| = 1$.

3. *Résoudre l'équation* $Ax = x$: On a

$$\begin{aligned}
[Ax = x] &\Longrightarrow [A\,(x_1,x_2,......) = (x_1,x_2,......)] \\
&\Longrightarrow \left[\left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ..., \frac{1}{n}x_n...... \right) = (x_1,x_2,......) \right] \\
&\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 = x_2 \\ \quad . \\ \frac{1}{n}x_n = x_n \\ \quad . \end{cases} \\
&\Longrightarrow [x_1 = x_1 \text{ et } x_i = 0 \text{ pour tout } n \geq 2] \\
&\Longrightarrow [x = (x_1,0,0,......) \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}]
\end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de $Ax = x$ sont $x = (x_1,0,0,......)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$.

....

Interrogation (Mai 2017)

Partie I : (4points)

Répondre par vrai ou faux, en justifiant.

1. Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé et (x_n) une suite de E convergente vers $x \in E$. On a $\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.
2. Soient X, Y deux $\mathbb{k}-$e. v. normés, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $M > 0$. S'il existe $x_* \in X - \{0\}$ tel que $M \leq \frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|}$ alors $M \leq \|A\|$.
3. $A : l_2(\mathbb{R}) \to l_2(\mathbb{R})$ avec $A(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0, 0, ...)$ est bien défini.
4. Soient X, Y deux $\mathbb{k}-$e. v. normés et $A : X \longrightarrow Y$ une application linéaire borné sur la boule unité fermé $\overline{B}(0, 1) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. On a $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Partie II : (6points)

Considérons l'opérateur $A : (l_2(\mathbb{C}), \|.\|) \to (l_2(\mathbb{C}), \|.\|)$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{2017}, x_{2018}, x_{2019}, ...\right).$$

1. Que veut dire $(l_2(\mathbb{C}), \|.\|)$.
2. Montrer que A est linéaire, borné et $\|A\| = 1$.
3. Déduire que A est continu et Lipschitzienne.

Correction

Partie I :

1. $\underbrace{\text{Vrai}}_{\textbf{(0,5pt)}}$: $\underbrace{\text{Par la définition de la convergence de } (x_n) \subset E \text{ vers } x \in E.}_{\textbf{(0,5pt)}}$
2. $\underbrace{\text{Vrai}}_{\textbf{(0,5pt)}}$: Car $\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{\leq} \sup\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \|A\|$.
3. $\underbrace{\text{Vrai}}_{\textbf{(0,5pt)}}$: Pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a $A(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0, 0, ...)$ et

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |0|^2 + |0|^2 + ... = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 < \infty.\textbf{(0,25pt)}$$

ainsi

$$A(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0, 0, ...) \in l_2(\mathbb{R}) .\textbf{(0,25pt)}$$

C'est à dire, on a montré que

$$\forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : A(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}).$$

Ceci veut dire que A est bien défini.

4. $\underbrace{\text{Vrai}}_{\textbf{(0,5pt)}}$:

$$\textbf{(0,25pt)}\begin{cases} A \text{ est une application linéaire d'un espace normé } X \text{ à un espace normé } Y \\ \text{alors} \\ A \text{ est un opérateur linéaire} \end{cases}$$

$$\textbf{(0,25pt)}\begin{cases} \text{L'application } A \text{ est borné sur } \overline{B}(0,1) \text{ alors} \\ \exists M > 0, \forall x \in \overline{B}(0,1) \text{ on a } \|Ax\| \leq M. \\ \text{Ainsi} \\ \exists M > 0, \forall x \in X \text{ tel que } \|x\| \leq 1 \text{ on ait } \|Ax\| \leq M. \\ \text{Ceci implique, d'aprés l'exercice 2, que l'opérateur } A \text{ est borné} \end{cases}.$$

Conclusion : A est un opérateur linéaire et borné alors $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Partie II :

1. $(l_2(\mathbb{C}), \|.\|)$ est un espace normé avec $l_2(\mathbb{C}) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \left\{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} / \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ et $\|(x_1, x_2, ..., x_n, ...)\| \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \left(\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2(\mathbb{C})$.
2. *Montrons que A est linéaire* **(1pt)** *:* Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})$. on a

$$\begin{aligned} A(\alpha(x_1, x_2, ...) + \beta(y_1, y_2, ...)) &= A(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, ...) \\ &= \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{2017}, \alpha x_{2018} + \beta y_{2018}, \alpha x_{2019} + \beta y_{2019}, ...\right) \end{aligned}$$

$$= \Bigg(\underbrace{0,0,.....,0}_{2017},\alpha x_{2018},\alpha x_{2019},......\Bigg)+\Bigg(\underbrace{0,0,.....,0}_{2017},\beta y_{2018},\beta y_{2019},......\Bigg)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\Bigg(\underbrace{0,0,.....,0}_{2017},x_{2018},x_{2019},......\Bigg)+\beta\Bigg(\underbrace{0,0,.....,0}_{2017},y_{2018},y_{2019},......\Bigg) \\ &= \alpha A(x_1,x_2,......)+\beta A(y_1,y_2,.....). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall\alpha,\beta &\in \mathbb{C},\forall(x_1,x_2,......),(y_1,y_2,.....)\in l_2(\mathbb{C}): \\ A(\alpha(x_1,x_2,......)+\beta(y_1,y_2,.....)) &= \alpha A(x_1,x_2,......)+\beta A(y_1,y_2,.....). \end{aligned}$$

Cela veut dire que A est linéaire.

Montrons que A est borné **(1pt)** *:* Soit $(x_1,x_2,......)\in l_2(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned} \|A(x_1,x_2,......)\|^2 &\overset{\text{déf. }A}{=} \left\|\Bigg(\underbrace{0,0,.....,0}_{2017},x_{2018},x_{2019},......\Bigg)\right\|^2 \\ &\overset{\text{déf. }\|\cdot\|^2}{=} \underbrace{|0|^2+|0|^2+.....+|0|^2}_{2017}+|x_{2018}|^2+|x_{2019}|^2+....... \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=2018}^{i=\infty}|x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{i=\infty}|x_i|^2=\|(x_1,x_2,......)\|^2.$$

donc $\|A(x_1,x_2,......)\|\leq\|(x_1,x_2,......)\|$. Ainsi, on a montré que

$$\exists M=1>0,\forall(x_1,x_2,......)\in l_2(\mathbb{C}) \text{ on a } \|A(x_1,x_2,......)\|\leq M\|(x_1,x_2,......)\| ....(*)$$

Cela veut dire que A est borné.

Montrons que $\|A\|=1$:

* *Montrons que $\|A\|\leq 1$* **(1pt) :** De $(*)$, on trouve $\|A\|\leq M=1$. Donc $\|A\|\leq$

$1........(2*)$

* *Montrons que* $1 \leq \|A\|$ **(1pt)**: On pose $x_* = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{2017}, 1, 0, 0, 0, ... \right)$. On a $0 \neq x_* \in l_2(\mathbb{C})$, $\|x_*\| = 1$ et $\|Ax_*\| = 1$. Alors $\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} = 1$. Mais

$$\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} \leq \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C})} \frac{\|A(x_1, x_2, ...)\|}{\|(x_1, x_2, ...)\|} = \|A\|.$$

Alors $1 \leq \|A\| .... (3*)$

De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve que $\|A\| = 1$.

3. **(1pt)** Puisque A est linéaire et borné alors il est continu et Lipschitzienne.

....

Contrôl Final (23 Mai 2017)

Partie 1 (3 pts)

Complète :

1. Soient X et Y deux espaces normés. L'opérateur...........$A : X \to Y$ est inversible Ssi $\ker A = \{0\}$ et..................
2. Si......................et $A : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné et .... alors $A^{-1} : Y \to X$ est un opérateur linéaire borné.
3. Soit X un espace normé. Si $f \in X^*$ alors f est appellée......................

Partie 2 (7 pts)

Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $l_2(\mathbb{R})$ par

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{n}{n^2 + 1}(x_1, x_2, ...).$$

1. Montrer que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul. Ici $\|.\| = \|.\|_2$.
2. Utiliser deux manières différentes pour montrer que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur nul.

Partie 3 (10 pts)

Considérons l'opérateur linéaire borné $A : l_2(\mathbb{R}) \to l_2(\mathbb{R})$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = \left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, ..., \frac{n+1}{n}x_n, ...\right).$$

1. Montrer que A est un opérateur bijectif. Calculer A^{-1}. Puis déduire que $0 \notin \sigma(A)$.
2. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a

$$\|A(x_1, x_2, ...)\| \geq M \|(x_1, x_2, ...)\|.$$

   Ici $\|.\| = \|.\|_2$

3. Pourquoi A^* existe. Calculer A^*. Est ce que A est un opérateur auto adjoint.
4. Trouver les valeurs propres de A.

Correction

Partie 1

1. Soient X et Y deux espaces normés. L'opérateur $\underbrace{\text{linéaire}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ $A : X \to Y$ est inversible Ssi $\ker A = \{0\}$ et $\underbrace{\operatorname{Im} A = Y}_{\textbf{(0,5pt)}}$.
2. Si $\underbrace{X \text{ et } Y \text{ sont deux espaces de Banach}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ et $A : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné et $\underbrace{\text{inversible}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ alors $A^{-1} : Y \to X$ est un opérateur linéaire borné.
3. Soit X un espace normé. Si $f \in X^*$ alors f est dite $\underbrace{\text{fonctionnelle linéaire bornée sur } X}_{\textbf{(1pt)}}$.

Partie 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\|A_n - 0\|}_{(\mathbf{1pt})} &= \|A_n\|_{\mathcal{L}(l_2(\mathbb{R}))} \overset{(\mathbf{0,5pt})}{=} \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|A_n (x_1, x_2, ...)\|}{\|(x_1, x_2, ...)\|} \\
&\overset{(\mathbf{0,5pt})}{=} \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\left\| \frac{n}{n^2+1} (x_1, x_2, ...) \right\|}{\|(x_1, x_2, ...)\|} \\
&= \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\frac{n}{n^2+1} \|(x_1, x_2, ...)\|}{\|(x_1, x_2, ...)\|} \\
&= \sup_{0 \neq (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{n}{n^2+1} \overset{(\mathbf{0,5pt})}{=} \frac{n}{n^2+1} \underbrace{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}}_{(\mathbf{0,5pt})} 0.
\end{aligned}$$

C'est à dire $\|A_n - 0\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela veut dire que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul.

2. Montrons que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur nul :

Manière 1 *(En utilisant le résultat suivant : La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle)* ***(2pt)*** *:* Puisque (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul alors elle converge ponctuellement vers l'opérateur nul.

Manière 2 *(En utilisant la définition de la convergence ponctuelle) :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\|A_n (x_1, x_2, ...) - 0\|}_{(\mathbf{0,5pt})} &= \|A_n (x_1, x_2, ...)\| \\
&\overset{(\mathbf{0,5pt})}{=} \left\| \frac{n}{n^2+1} (x_1, x_2, ...) \right\| \\
&\overset{(\mathbf{0,5pt})}{=} \frac{n}{n^2+1} \|(x_1, x_2, ...)\| \underbrace{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}}_{(\mathbf{0,5pt})} 0.
\end{aligned}$$

C'est à dire $\|A_n (x_1, x_2, ...) - 0\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela veut dire que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur nul.

Partie 3

1. *Montrons que A est bijectif :*

* Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\left[\underbrace{A(x_1, x_2, ...) = 0}_{\textbf{(0,5pt)}}\right] \Longrightarrow \left[\underbrace{\left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, .., \frac{n+1}{n}x_n, ...\right) = 0}_{\textbf{(0,25pt)}}\right]$$
$$\Longrightarrow \left[2x_1 = 0, \frac{3}{2}x_2 = 0, .., \frac{n+1}{n}x_n = 0, ...\right]$$
$$\Longrightarrow [x_1 = x_2 = ... = x_n = ... = 0]$$
$$\Longrightarrow \left[\underbrace{(x_1, x_2, .., x_n, ...) = 0}_{\textbf{(0,5pt)}}\right].$$

Ainsi on montré que

$$\forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : [A(x_1, x_2, ...) = 0] \Longrightarrow [(x_1, x_2, .., x_n, ...) = 0].$$

Cela implique que $\ker A \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \{0\}$ .... (1)

* Soit $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\left.\begin{array}{l} \left[\underbrace{A(x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...)}_{\textbf{(0,5pt)}}\right] \Longleftrightarrow \left[\underbrace{\left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, .., \frac{n+1}{n}x_n, ...\right) = (y_1, y_2, ...)}_{\textbf{(0,25pt)}}\right] \\ \Longleftrightarrow \left[2x_1 = y_1, \frac{3}{2}x_2 = y_2, .., \frac{n+1}{n}x_n = y_n, ...\right] \\ \Longleftrightarrow \left[x_1 = \frac{1}{2}y_1, x_2 = \frac{2}{3}y_2, ..., x_n = \frac{n}{n+1}y_n, ...\right] \\ \Longleftrightarrow \left[\underbrace{(x_1, x_2, ...) = \left(\frac{1}{2}y_1, \frac{2}{3}y_2, .., \frac{n}{n+1}y_n, ...\right)}_{\textbf{(0,5pt)}}\right] \end{array}\right\} (*).$$

Ainsi

$$\forall (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}), \exists (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : A(x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...).$$

Ceci implique que $ImA \overset{(\mathbf{0{,}5pt})}{=} l_2(\mathbb{R})$ .... (2)

Conclusion **(0,5pt) :** Puisque A est linéaire alors de (1) et (2) on trouve que A est un opérateur bijectif.

Calculons A^{-1} **(1pt)**: De (*) on trouve que pour tout $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a

$$A^{-1}(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = \left(\frac{1}{2}y_1, \frac{2}{3}y_2, .., \frac{n}{n+1}y_n, ...\right).$$

Déduire que $0 \notin \sigma(A)$ **(1pt) :** Puisque $A - 0I = A$ est inversible alors $0 \notin \sigma(A)$.

2. **(1pt)** Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, x_2, ...)\|^2 &= \left\|\left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, .., \frac{n+1}{n}x_n, ...\right)\right\|^2 \\
&= (2x_1)^2 + \left(\frac{3}{2}x_2\right)^2, .., \left(\frac{n+1}{n}x_n\right)^2 + ... \\
&\geq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + ... = \|(x_1, x_2, ...)\|^2.
\end{aligned}$$

C'est à dire on a montré qu'il existe $M = 1$ tel que pour tout $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ on a $\|A(x_1, x_2, ...)\| \geq M \|(x_1, x_2, ...)\|$.

3. *Justification de l'existence de* A^* **(0,5pt) :** Puisque A est linéaire borné alors A^* existe.

Calculons A^* ***(1pt) :*** Soient $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\langle A(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle &= \left\langle \left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, .., \frac{n+1}{n}x_n, ...\right), (y_1, y_2, ...)\right\rangle \\
&= (2x_1)y_1 + \left(\frac{3}{2}x_2\right)y_2 + ... + \left(\frac{n+1}{n}x_n\right)y_n + ...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1(2y_1)+x_2\left(\frac{3}{2}y_2\right)+.....+x_n\left(\frac{n+1}{n}y_n\right)+..... \\ &= \left\langle (x_1,x_2,.......),\underbrace{\left(2y_1,\frac{3}{2}y_2,...,\frac{n+1}{n}y_n,...\right)}_{A^*(y_1,y_2,......)}\right\rangle. \end{aligned}$$

C'est à dire $A^*(y_1,y_2,......)=\left(2y_1,\frac{3}{2}y_2,...,\frac{n+1}{n}y_n,...\right)$ pour tout $(y_1,y_2,......)\in l_2(\mathbb{R})$.

* **(0,5pt)** Oui A est auto adjoint car $A^*=A$.

4. Calculons les valeurs propre de A **(1pt)**: c'est à dire trouvons $\lambda\in\mathbb{R}$ et $0\neq (x_1,x_2,......)\in l_2(\mathbb{R})$ tel que $A(x_1,x_2,......)=\lambda(x_1,x_2,......)$

$$\begin{aligned} [A(x_1,x_2,......)=\lambda(x_1,x_2,......)] &\Longrightarrow \left[\left(2x_1,\frac{3}{2}x_2,..,\frac{n+1}{n}x_n,......\right)=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n,...)\right] \\ &\Longrightarrow \left[2x_1=\lambda x_1,\frac{3}{2}x_2=\lambda x_2,...,\frac{n+1}{n}x_n=\lambda x_n,....\right] \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left[(2-\lambda)x_1=0,\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)x_2=0,...,\left(\frac{n+1}{n}-\lambda\right)x_n=0,....\right]$$

Puisque on s'intéresse à $(x_1,x_2,......)\neq 0$ alors il existe $x_k\neq 0$. Prenons l'équation k : $\left(\frac{k+1}{k}-\lambda\right)x_k=0$ alors $\frac{k+1}{k}-\lambda=0$ (c'est à dire $\lambda=\frac{k+1}{k}$) alors si on remplace dans les équations qui restent on trouve $x_i=0$ pour tout $i\neq k$. C'est à dire pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on trouve $\left(0,0,...,\underbrace{x_k}_{k},...\right)\neq 0$ tel que $A\left(0,0,...,\underbrace{x_k}_{k},...\right)=\frac{k+1}{k}\left(0,0,...,\underbrace{x_k}_{k},...\right)$. Ce qui implique que les valeurs propres de A sont de la forme $\frac{k+1}{k}$ avec $k\in\mathbb{N}^*$.

....

Rattrapage (15 Juin 2017)

Partie 1 (3 pts)

1. Justifier ce qui suit

(a) $\mathcal{L}(C[0,1])$ est un espace de Banach.

(b) Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ deux opérateurs autoadjoints alors l'opérateur $A + B$ est autoadjoint.

2. Enoncer le théorème de l'existence de l'extension bornée.

Partie 2 (11 pts)

Considérons l'opérateur $A : l_2(\mathbb{R}) \to l_2(\mathbb{R})$ avec $A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

1. Montrer que A est un opérateur linéaire borné. Puis, calculer sa norme.
2. Montrer que : A est surjectif, A n'est pas injectif et $0 \in \sigma(A)$.
3. Justifier l'existence de A^*. Puis, calculer A^*. Est ce que A est un opérateur autoadjoint (Justifier).
4. Résoudre l'équation $A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, 0, ...)$. Puis, montrer que $\{(x, 0, 0, ...) : x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $l_2(\mathbb{R})$.

Partie 3 (6 pts)

1. Soit $k > 0$. Soient X, Y deux espaces normés et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire tel que $\|Ax\| = k\|x\|$ pour tout $x \in X$.

   (a) Montrer que A est un opérateur borné. Puis, détrminer $\|A\|$ (*Ind. Utiliser la définition de la norme canonique d'opérateur).*

   (b) *Rappelons que si $k = 1$ l'opérateur A est appellé une isométrie.* Enoncer le résultat dans ce cas.

2. *Application :* Considérons l'opérateur linéaire $A : C[0,1] \to C[0,1]$ avec $Af = 2017f$. Montrer que A est un opérateur borné. Puis, déterminer sa norme.

Correction

Partie 1

1. Justification :

(a) $\mathcal{L}(C[0,1])$ est un espace de Banach car $\mathcal{L}(C[0,1]) \underset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \mathcal{L}(C[0,1], C[0,1])$ et $\underbrace{C[0,1] \text{ l'espace d'arrivé est un espace de Banach}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ muni de la norme de convergence uniforme.

(b) On a

$$\begin{aligned}(A+B)^* &= A^* + B^* \text{ propriété de l'adjoint } \textbf{(0,5pt)} \\ &= A + B \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont autoadjoint } \textbf{(0,5pt)}\end{aligned}$$

Alors $(A+B)^* = A+B$. Cela veut dire que $A+B$ est autoadjoint.

2. **Théorème de l'existence de l'extension bornée :**

Soient

$$\textbf{(0,5pt)} \begin{cases} X \text{ un espace vectoriel normé et } Y \text{ un espace de Banach,} \\ D(A) \text{ un s.e.v dense de } X \\ A : D(A) \subset X \longrightarrow Y \text{ un opérateur linéaire borné (sur } D(A)). \end{cases}$$

Alors

$$\textbf{(0,5pt)} \left\{ \text{il existe un opérateur } \widetilde{A} \text{ tels que } \widetilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y), \widetilde{A} = A \text{ sur } D(A) \text{ et } \|A\| = \left\|\widetilde{A}\right\|. \right.$$

L'opérateur $\widetilde{A}$ s'appelle l'extension bornée de A.

Partie 2

1. * *Montrons que A est linéaire* ***(1pt)*** *:* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in$

$l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} A(\alpha(x_1,x_2,...)+(y_1,y_2,...)) &= A(\alpha x_1+y_1,\alpha x_2+y_2,...) \\ &= (\alpha x_2+y_2,\alpha x_3+y_3,...) \\ &= \alpha(x_2,x_3,...)+(y_2,y_3,...) \\ &= \alpha A(x_1,x_2,...)+A(y_1,y_2,...). \end{aligned}$$

C'est à dire, on a montré que

$\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall(x_1,x_2,...),(y_1,y_2,...)\in l_2(\mathbb{R}):A(\alpha(x_1,x_2,...)+(y_1,y_2,...))=\alpha A(x_1,x_2,...)+$
$A(y_1,y_2,...)$

Cela veut dire que A est linéaire.

* *Montrons que A est borné **(1pt)** :* Soit $(x_1,x_2,......)\in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \|A(x_1,x_2,......)\|^2 &\overset{\text{déf. } A}{=} \|(x_2,x_3,......)\|^2 \\ &\overset{\text{déf. } \|.\|^2}{=} |x_2|^2+|x_3|^2+....... \\ =\sum_{i=2}^{i=\infty}|x_i|^2 &\leq \sum_{i=1}^{i=\infty}|x_i|^2=\|(x_1,x_2,......)\|^2. \end{aligned}$$

donc $\|A(x_1,x_2,......)\|\leq\|(x_1,x_2,......)\|$. Ainsi, on a montré que

$$\exists M=1>0,\forall(x_1,x_2,......)\in l_2(\mathbb{R}) \text{ on a } \|A(x_1,x_2,......)\|\leq M\|(x_1,x_2,......)\|..........(*)$$

Cela veut dire que A est borné.

* *Calculons* $\|A\|$ **(1pt)**:

a. De $(*)$, on trouve $\|A\|\leq M=1$. Donc $\|A\|\leq 1$........$(2*)$

b. *Montrons que* $1\leq\|A\|$: On pose $x_*=(0,1,0,0,0,......)$. On a $0\neq x_*\in l_2(\mathbb{R})$ car $|0|^2+|1|^2+|0|^2+|0|^2.......=1<\infty$ et $(0,1,0,0,0,......)\neq 0$. De plus

$$\|x_*\|=\|(0,1,0,0,0,......)\|=\sqrt{|0|^2+|1|^2+|0|^2+.......}=1$$

et

$$\|Ax_*\| = \|A(0,1,0,0,0,......)\| = \|(1,0,0,0,......)\| = 1.$$

Alors $\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} = 1$. Mais $\frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|} \leq \sup_{0 \neq (x_1,x_2,......) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|A(x_1,x_2,......)\|}{\|(x_1,x_2,......)\|} = \|A\|$. Alors $1 \leq \|A\|$ .... $(3*)$

De $(2*)$ et $(3*)$, on trouve que $\|A\| = 1$.

2. * *Montrons que A est surjectif* **(1pt)** *:* Soit $(y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} [A(x_1,x_2,......) = (y_1,y_2,......)] &\Longrightarrow [(x_2,x_{3,}...) = (y_1,y_2,......)] \\ &\Longrightarrow [x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = y_1, x_3 = y_2, ...]. \end{aligned}.$$

Dans la dérnière étape, on peut prendre par exemple $x_1 = 0$ car on a aucune condition sur le réel x_1.

Ainsi on a montré que

$$\forall (y_1,y_2,......) \in l_2(\mathbb{R}), \exists (x_1,x_2,......) = (0,y_1,y_2...) \in l_2(\mathbb{R}) : A(x_1,x_2,......) = (y_1,y_2,......).$$

Cela veut dire que A est surjectif.

* *Montrons que A n'est pas injectif* **(1pt)** *:* On a $A(1,0,...) = (0,0,...)$. Alors $(1,0,...) \in \ker A$. Ainsi $\ker A \neq \{0\}$. Ceci implique que A n'est pas injectif.

* *Montrons que* $0 \in \sigma(A)$ **(1pt)**: Puisque A n'est pas injectif alors il n'est pas bijectif. Ainsi $A - 0I = A$ n'est pas bijectif. Ceci implique, de la définition de $\sigma(A)$, que $0 \in \sigma(A)$.

3. * *Justifions que A^* existe* **(1pt)** *:* Puisque $A \in \mathcal{L}(l_2(\mathbb{R}))$ alors A^* existe.

* *Calculons A^** ***(1pt)*** *:* Soient $(x_1,x_2,......), (y_1,y_2,......) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle A(x_1,x_2,......),(y_1,y_2,......)\rangle &= \langle (x_2,x_3,.....),(y_1,y_2,......)\rangle \\ &= x_2y_1 + x_3y_2 + ... + x_{n+1}y_n + ... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_1.0 + x_2y_1 + x_3y_2 + ... + x_{n+1}y_n + ... \\ &= \left\langle (x_1, x_2, ...), \underbrace{(0, y_1, y_2, ...)}_{A^*(y_1, y_2, ...)} \right\rangle . \end{aligned}$$

C'est à dire $A^* : l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})$ avec $A^*(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

* *Est ce que A est un opérateur auto adjoint* **(1pt) :** A n'est pas autoadjoint car $A^* \neq A$.

4. * *Résolvons l'équation $A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, 0, ...)$* **(1pt)**: On a

$$\begin{aligned} [A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, 0, ...)] &\Longrightarrow [(x_2, x_3, ...) = (0, 0, 0, ...)] \\ &\Longrightarrow [x_1 \in \mathbb{R}, x_i = 0 \text{ pour tout } i \geq 2.] \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de $A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, 0, ...)$ sont de la forme $(x, 0, 0, ...)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

* *Montrons que $\{(x, 0, 0, ...) : x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $l_2(\mathbb{R})$* **(1pt)**: Puisque les solutions de $A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, 0, ...)$ sont de la forme $(x, 0, 0, ...)$ avec $x \in \mathbb{R}$ alors $\ker A = \{(x, 0, 0, ...) : x \in \mathbb{R}\}$. Puisque A est borné alors $\ker A$ est un fermé de $l_2(\mathbb{R})$. Ainsi $\{(x, 0, 0, ...) : x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $l_2(\mathbb{R})$.

Partie 3

1.a * *Montrons que A est borné* : Pour tout $x \in X$ on a $\|Ax\| = k\|x\| \underset{\textbf{(0,5pt)}}{\leq} k\|x\|$ (car $a \leq a$). Alors

$$\exists M = k > 0, \forall x \in X \text{ on a } \|Ax\| \leq M\|x\| \ \textbf{(0,5pt)}$$

Cela veut dire que A est borné.

* *Déterminons* $\|A\|$: On a

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \text{ (définition de la norme canonique d'opérateur) } \textbf{(0,5pt)}\\
&= \sup_{0\neq x\in X}\frac{k\|x\|}{\|x\|} \text{ (hypothèse sur } A\text{) } \textbf{(0,5pt)}\\
&= \sup_{0\neq x\in X} k \text{ car } x\neq 0 \text{ donc } \|x\|\neq 0\\
&= k\ \textbf{(0,5pt)}
\end{aligned}$$

C'est à dire $\|A\| = k$.

1.b *Le résultat dans le cas où* $k = 1$ **(1pt)**: Les isométries linéaires sont des opérateurs linéaires bornés de norme 1.

2. Pour tout $f \in C[0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\|Af\| &= \|2017f\| \text{ définition de } A\ \textbf{(0,5pt)}\\
&= 2017\|f\| \text{ propriété de la norme } \textbf{(0,5pt)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\|Af\| = k\|f\|$ avec $k = 2017 > 0$.

$\underbrace{\text{D'aprés 1.a, on trouve que } A \text{ est borné et } \|A\| = k = 2017.}_{\textbf{(1,5pt)}}$

....

Examen final (2017/2018)

Exercice 1 (6 pts)

Soit (λ_n) une suite réelle tel que $M := \sup_n |\lambda_n| < +\infty$. Considérons l'opérateur A défini sur $l_2(\mathbb{R})$ par

$$A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...).$$

1. *(1,5pt+1,5pt+1pt)* **Montrer** que A est linéaire, borné et $\|A\| \leq M$.
2. *(1pt)* **Est ce que** A est Lipschitzienne (Justifier).

3. *(0,5pt+0,5pt)* **Montrer** que

$$\Big(\underbrace{1,1,......,1}_{2018},0,0,.....\Big) \in l_2(\mathbb{R}) \text{ et } (1,1,......,1,..,1,....) \notin l_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 2 (7 pts)

Justifier ce qui suit :

1. *(1pt)* Un espace de Hilbert H est un espace de Banach.
2. *(2pts)* Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $C[0,1]$ (muni de la norme de la convergence uniforme) par $A_n f = \left(\frac{n}{n^2+1}+1\right) f$.

   La suite (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur identité I.

   – Dans tout ce qui suit, X et Y sont deux $\mathbb{k}-$ espaces vectoriels normés.
3. *(1pt)* Soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. On a $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ pour tout $x \in X - \{0\}$.
4. *(2pts)* Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire injectif. On pose $\|x\|_* := \|Ax\|$ pour tout $x \in X$. On a $\|.\|_*$ est une norme sur X.
5. *(1pt)* Soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$. On a AB est borné.

Exercice 3 (7 pts)

Soient X, Y deux $\mathbb{k}-$espaces vectoriels normés et $A : X \to Y$ une isométrie linéaire : C'est à dire, A est linéaire tel que $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$.

1. *(1pt+1pt+1pt)* **Montrer** que A est un opérateur injectif et borné. Puis, utiliser la définition de $\|A\|$ pour **calculer** la valeur de $\|A\|$.
2. *(0,75pt)* **Complète :** On obtient le résultat suivant : Les isométries linéaires sont des opérateurs...............,............de norme...........
3. On suppose que $R(A) = Y$.

   (a) *(1pt+1pt+0,5pt)* **Montrer** que A^{-1} existe et qu'il est une isométrie linéaire.

   (b) *(0,75pt)* **Donner** d'autre propriétés de A^{-1} (En justifiant).

Bonus (1pt)

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $(A^*)^* = A$.

Correction

Solution 1

1. *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. on a

$$A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) \overset{(0,25pt)}{=} A(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, ...)$$
$$\overset{(0,25pt)}{=} (\lambda_1(\alpha x_1 + y_1), \lambda_2(\alpha x_2 + y_2), ...)$$

$$= (\alpha(\lambda_1 x_1) + (\lambda_1 y_1), \alpha(\lambda_2 x_2) + (\lambda_2 y_2), ...)$$
$$\overset{(0,25pt)}{=} (\alpha(\lambda_1 x_1), \alpha(\lambda_2 x_2), ...) + (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, ...)$$

$$\overset{(0,25pt)}{=} \alpha(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...) + (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, ...)$$
$$\overset{(0,5pt)}{=} \alpha A(x_1, x_2, ...) + A(y_1, y_2, ...).$$

Ainsi, on a montré que

$$\begin{aligned} \forall \alpha &\in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : \\ A(\alpha(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...)) &= \alpha A(x_1, x_2, ...) + A(y_1, y_2, ...). \end{aligned}$$

Cela veut dire que A est linéaire.

* *Montrons que A est borné :* Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\|A(x_1, x_2, ...)\|^2 \overset{(0,5pt)}{=} \|(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)\|^2$$
$$\overset{(0,5pt)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i x_i|^2 \overset{(0,25pt)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |x_i|^2$$

$$\overset{\textbf{(0,25pt)}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} M^2 |x_i|^2 \overset{\textbf{(0,5pt)}}{\leq} M^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = M^2 \|(x_1, x_2, ...)\|^2 .$$

donc $\|A(x_1, x_2, ...)\| \overset{\textbf{(0,5pt)}}{\leq} M \|(x_1, x_2, ...)\|$. Ainsi, on a montré que

$$\exists M := \sup_n |\lambda_n| \geq 0, \forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : \|A(x_1, x_2, ...)\| \leq M \|(x_1, x_2, ...)\| ... (*)$$

Cela veut dire que A est borné.

* *Montrons que* $\|A\| \leq M$ **:** $\underbrace{\text{De } (*)}_{\textbf{(1pt)}}$, on trouve $\|A\| \leq M$.

2. $\underbrace{\text{Oui}}_{\textbf{(0,25pt)}}$, A est Lipschitzienne car A est $\underbrace{\text{linéaire}}_{\textbf{(0,25pt)}}$ et $\underbrace{\text{borné}}_{\textbf{(0,5pt)}}$.
3. Rappellons que l'ensemble des suites (réelles) carrée sommables est

$$l_2(\mathbb{R}) := \left\{ (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Ici, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ veut dire que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ est convergente.

* *Montrons que* $\left(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{2018}, 0, 0, ... \right) \in l_2(\mathbb{R})$ **(0,5pt)** : On a

$$\underbrace{|1|^2 + ... + |1|^2}_{2018} + |0|^2 + ... = 2018 < \infty$$

alors $\left(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{2018}, ... \right) \in l_2(\mathbb{R})$.

* *Montrons que* $(1, 1, ..., 1, .., 1, ..) \notin l_2(\mathbb{R})$ **(0,5pt) :** On a

$$|1|^2 + ... + |1|^2 + ... = \sum_{i=1}^{\infty} 1$$

est une série divergente car le terme géneral $u_n = 1$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $|1|^2 + ... + |1|^2 + ... \not< \infty$. Ceci implique que $(1, 1, ..., 1, .., 1, ...) \notin l_2(\mathbb{R})$.

Solution 2

1. H est un espace de Hilbert alors H est un espace préhilbertien $\underbrace{(\text{muni d'un produit scalaire } \langle .,. \rangle}_{\textbf{(0,25pt)}}$ et il est $\underbrace{\text{complet}}_{\textbf{(0,25pt)}}$ pour $\underbrace{\text{la norme définie par } \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \text{ pour tout } x \in H}_{\textbf{(0,25pt)}}$. Ainsi, $\underbrace{H \text{ est un espace normé complet}}_{\textbf{(0,25pt)}}$. Cela veut dire que H est un espace de Banach.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C[0,1]$, on a

$$\|A_n f - If\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \left\| \left(\frac{n}{n^2+1} + 1 \right) f - f \right\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \left\| \frac{n}{n^2+1} f \right\| \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \frac{n}{n^2+1} \|f\|.$$

Mais $\underbrace{\frac{n}{n^2+1}\|f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$ pour tout $f \in C[0,1]$ alors $\underbrace{\|A_n f - If\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}_{\textbf{(0,5pt)}}$ pour tout $f \in C[0,1]$. Cela veut dire que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur identité I.

3. Pour tout $x \in X - \{0\}$, on a $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \overset{\textbf{(0,5pt)}}{\leq} \sup\limits_{x \in X-\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \|A\|$.

4. *Montrons que* $\forall x \in X,\ \|x\|_* = 0 \Longrightarrow x = 0$: Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned}
[\|x\|_* = 0] &\Longrightarrow [\|Ax\| = 0] \ \text{(définition de } \|.\|_*) \\
&\overset{\textbf{(0,25pt)}}{\Longrightarrow} [Ax = 0] \ (\|.\| \text{ est une norme}) \\
&\overset{\textbf{(0,25pt)}}{\Longrightarrow} [x = 0] \ (A \text{ est injectif}).
\end{aligned}$$

* *Montrons que* $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in X : \|\lambda x\|_* = |\lambda| \|x\|_*$: Soit $\lambda \in \mathbb{k}$ et $x \in X$. On a

$$\|\lambda x\|_* := \|A(\lambda x)\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \|\lambda A x\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} |\lambda| \|Ax\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} |\lambda| \|x\|_*.$$

* *Montrons que* $\forall\ x,y \in X : \|x+y\|_* \leq \|x\|_* + \|y\|_*$: Soient $x,y \in X$. On a

$$\begin{aligned} \|x+y\|_* &: \overset{(0,25pt)}{=} \|A(x+y)\| \overset{(0,25pt)}{=} \|Ax+Ay\| \\ \overset{(0,25pt)}{\leq} \|Ax\| + \|Ay\| &= \|x\|_* + \|y\|_* . \end{aligned}$$

5. Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned} \|ABx\| = \|A(Bx)\| &\overset{(0,25pt)}{\leq} \|A\| \|Bx\| \text{ car } A \text{ est borné } (A \in \mathcal{L}(X)) \\ &\overset{(0,25pt)}{\leq} \|A\| \|B\| \|x\| \text{ car } B \text{ est borné } (B \in \mathcal{L}(X)). \end{aligned}$$

C'est à dire, $\|ABx\| \overset{(0,5pt)}{\leq} \|A\| \|B\| \|x\|$.

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = \|A\| \|B\| \geq 0, \forall x \in X : \|ABx\| \leq M \|x\|$$

Cela veut dire que AB est borné.

Solution 3

1. *Montrons que A est injectif :* $\underbrace{\text{Soit } x \in X \text{ tel que } Ax = 0}_{(0,25pt)}.....(*)$. On a

$$\begin{aligned} \|x\| &\overset{(0,25pt)}{=} \|Ax\| \text{ car } A \text{ est une isométrie linéaire} \\ &\overset{(0,25pt)}{=} \|0\| \text{ de } (*) \\ &\overset{(0,25pt)}{=} 0 \text{ car } \|.\| \text{ est une norme.} \end{aligned}$$

C'est à dire, on a trouvé que $\|x\| = 0$. Ceci implique que $x = 0$.

Ainsi, on a montré que

$$\forall x \in X : Ax = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Ceci implique (car A est linéaire) que A est injectif.

* *Montrons que A est borné :* Soit $x \in X$. On a

$$\|Ax\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \|x\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{\leq} \|x\|.$$

Donc, $\|Ax\| \overset{\textbf{(0,5pt)}}{\leq} \|x\|$.

C'est à dire, on a montré que

$$\exists M = 1 > 0, \forall x \in X, \|Ax\| \leq M \|x\|.$$

Cela veut dire que A est borné.

* *Déterminons la valeur de $\|A\|$:* On a

$$\begin{aligned}
\|A\| \ : \ & \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \\
& \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|x\|}{\|x\|} \text{ car } A \text{ est une isométrie linéaire} \\
& \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \sup_{0 \neq x \in X} 1 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi $\|A\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} 1$.

Remarque : $\sup\limits_{0 \neq x \in X} 1 = \sup \{1 / 0 \neq x \in X\} = \sup \{1\} = 1$.

2. **(0,25pt) sur chaque réponse :** On obtient le résultat suivant : Les isométries linéaires sont des opérateurs **injectifs, bornés** de norme **1.**

3.a *Montrons que A^{-1} existe :* Puisque A est $\underbrace{\text{injectif}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ (question 1) et $\underbrace{\text{surjectif}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ $(R(A) = Y)$ alors A^{-1} existe.

* *Montrons que A^{-1} est une isométrie linéaire :*

– $\underbrace{A \text{ est linéaire}}_{\textbf{(0,5pt)}}$ alors A^{-1} est linéaire. (Résultat d'algèbre linéaire)

– $\underbrace{\text{Soit } y \in Y}_{\textbf{(0,25pt)}}$. Puisque $R(A) = Y$ alors $\underbrace{\text{il existe } x \in X \text{ tel que } y = Ax}_{\textbf{(0,25pt)}}$ (donc $\underbrace{A^{-1}y = x}_{\textbf{(0,25pt)}}$).

On a

$$\left\|A^{-1}y\right\| = \|x\| \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \|Ax\| = \|y\|.$$

C'est à dire, on a montré que

$$\forall y \in Y, \left\|A^{-1}y\right\| = \|y\| \ldots\ldots\textbf{(0,25pt)}$$

3.b * *Propriétés* ((0,25pt) sur chaque propriété) : A^{-1} est injectif, borné de norme 1.

* *Justification* (0,25pt) : A^{-1} est une isométrie linéaire.

....

Bonus : Soient $x, y \in X$. On a

$$\langle A^*x, y\rangle \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \overline{\langle y, A^*x\rangle} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \overline{\langle Ay, x\rangle} \overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} \langle x, Ay\rangle.$$

C'est à dire, on a montré que

$$\forall x, y \in X, \langle A^*x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.\textbf{(0,25pt)}$$

Cela veut dire (par la définition de l'adjoint) que $(A^*)^* = A$.

....

Examen final (13 Juin 2019)
Partie I :

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soient X, Y deux $\mathbb{k}-$e. v. n., $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $(A_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

   (a) Complète :

   – (1pt) $\mathbb{k}$ représente........................

   – (1pt) (A_n) converge ponctuellement vers A veut dire ....

(b) (1pt) Quelle est la relation entre la convergence ponctuelle et la convergence uniforme.

2. (1,5pt) Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $C[0,1]$ par $A_n f = \left(\frac{n}{n^2+1}+1\right) f$. Montrer que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur identité.

3. (1,5pt) Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $l_2(\mathbb{R})$ par $A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{1}{n^2}(x_1, x_2, ...)$. Montrer que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul.

4. (1,5pt) Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ deux opérateurs autoadjoints. Montrer que l'opérateur $A+B$ est autoadjoint.

5. (1,5pt) Soit X un espace normé réel et $A : X \to X$ une isométrie linéaire. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $|\lambda| = 1$.

   Bonus (1pt) : Pourquoi on a supposé que A est définie de X **dans lui même.**

6. (0,5pt+0,5pt+1pt) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace de tout les polynômes à coefficients réels muni de la norme $\left\|\sum_{i=0}^{i=k} a_i x^i\right\| = \max_{i=\overline{0,k}} |a_i|$ (ici $a_i \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$). Considérons l'opérateur linéaire $A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $AP = P'$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|x^n\|$ et $\|Ax^n\|$. Déduire que A n'est pas borné.

7. (0,5pt +0,5pt) Présentation de la copie et signalisation du numéro de groupe.

Partie II :

Considérons l'opérateur A définit par

$$Af = \int_0^1 f(t)\,dt \text{ pour tout } f \in C[0,1].$$

$C[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme.

1. (0,5 pt +0,5pt) Déterminer l'espace d'arrivé de A ainsi que la norme sur cet espace.

2. (0,75pt+0,75pt+1,5pt) Montrer que A est linéaire, borné et $\|A\| = 1$.

3. (1,5pt) Est ce que A est injectif (*Ind. : Calculer Ag avec $g(t) = \cos \pi t$ pour tout $t \in [0,1]$*).

Partie III :

Soient H un espace de Hilbert, A et B deux opérateurs linéaires bornés sur H.

1. (0,5pt+0,5pt+0,5pts) Montrer que l'opérateur $A+B$ est linéaire borné. Puis, déduire que $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
2. (1pt) Montrer que $(A+B)^* = A^* + B^*$.

....

Rattrapage (4 Juillet 2019)
Partie I :

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soient X, Y deux $\mathbb{k}-$e. v. n., $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné.
   (a) Complète :
   – (1pt) A est borné veut dire........................
   – (1pt) $\|A\| =$......................
   (b) (1,25pt) Enoncer le théorème de Banach Steinhaus.
2. (1pt) Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ... \right).$$

   Montrer que (X_n) converge vers 0.
3. (1,5pt) Considérons l'opérateur linéaire

$$A : \underset{(x_1,x_2,...)\longmapsto A(x_1,x_2,...)=(x_1,2x_2,3x_3,...,nx_n,...)}{l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})}$$

   Montrer que A est injectif.

4. (1pt+1pt) Considérons l'opérateur

$$A : \underset{(x_1,x_2,...)\longmapsto A(x_1,x_2,...)=\left(2x_1,\frac{3}{2}x_2,...,\frac{n+1}{n}x_n,...\right)}{l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})}$$

Calculer $A(1,0,...,0,...)$. Puis, déduire que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A.

5. (1,5pt) Montrer que l'opérateur

$$A : \underset{f\longmapsto Af=\int_0^1 f(s)ds}{C[0,1] \longrightarrow C[0,1]}$$

est linéaire.

6. (1,5pt) Considérons l'opérateur linéaire borné

$$A : \underset{f\longrightarrow Af=2019f}{C[0,1] \longrightarrow C[0,1]}$$

Utiliser la définition de $\|A\|$ pour montrer que $\|A\| = 2019$.

7. (0,5pt+0,5pt) Présentation de la copie et signalisation du numéro de groupe.

Partie II :

1. Rappellons que l'espace de Lebesgue

$$L^2[0,1] := \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est meurable et } \int_0^1 |f|^2 < \infty \right\}$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f.g \text{ pour tout } f, g \in L^2[0,1].$$

(0,5pt +0,5pt) Déterminer la norme sur $L^2[0,1]$ associée à ce produit scalaire. Puis, justifier que $(L^2[0,1])^* = L^2[0,1]$.

2. Considérons l'opérateur

$$A : L^2[0,1] \underset{f \longmapsto Af}{\longrightarrow} L^2[0,1]$$

tel que

$$(Af)(t) = \int_0^1 te^s f(s)\, ds \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Montrer que

(a) (0,5pt) A est bien défini.

(b) (1pt +0,75pt+0,5pt+0,5pt) A est linéaire, borné, continue et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{e^2-1}$.

(c) (1pt) $N(A)$ est fermé.

(d) (1pt) A^* existe.

(e) (2pt) A n'est pas autoadjoint.

Correction

Partie I :

1. (a) – (1pt) A est borné veut dire

$$\exists M \geq 0 \ (M > 0), \|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in X.$$

– (1pt) $\|A\| := \sup\limits_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

(b) Enoncé du Théorème de Banach Steinhaus : Soient

$$\underbrace{X \text{ un espace de Banach}}_{(0{,}25pt)}, \ \underbrace{Y \text{ un e. v. n.}}_{(0{,}25pt)} \text{ et } \underbrace{(A_i)_{i\in I} \text{ une famille de } \mathcal{L}(X,Y)}_{(0{,}25pt)}.$$

Si

$$\underbrace{\sup_{i\in I} \|A_i x\| < \infty \text{ pour tout } x \in X}_{(0{,}25pt)}$$

alors

$$\underbrace{\sup_{i\in I}\|A_i\| < \infty.}_{(0{,}25pt)}$$

2. *Pour montrer que* (X_n) *converge vers* 0 *il suffit de montrer, par définition, que*

$$\|X_n - 0\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|X_n - 0\|^2 &= \left\|\left(\underbrace{0,0,...,0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right) - (0,0,...,0,0,.....)\right\|^2 \\
&\overset{(0{,}25pt)}{=} \left\|\left(\underbrace{0,0,...,0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right)\right\|^2 \\
&= \underbrace{0^2+0^2+...+0^2}_{n} + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + ... \\
&\overset{(0{,}25pt)}{=} \sum_{i=n+1}^{i=+\infty} x_i^2 \underbrace{\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0}_{(0{,}25pt)} \underbrace{\text{ car c'est le reste de la série convergente } \sum_{i=1}^{i=+\infty} x_i^2.}_{(0{,}25pt)}
\end{aligned}$$

3. (1,5pt) *Puisque* A *est linéaire, alors pour montrer que* A *est injectif il suffit de montrer que*

$$\forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : [A(x_1, x_2, ...) = 0] \Longrightarrow [(x_1, x_2, ...) = (0,0,...)].$$

Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\left[A(x_1, x_2, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} 0\right] &\Longrightarrow \left[(x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n, ...) \overset{(0{,}25pt)}{=} (0,0,...,0,0,...)\right] \\
&\Longrightarrow [x_1 = 0, 2x_2 = 0, 3x_3 = 0, ..., nx_n = 0, ...] \\
&\Longrightarrow [x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, ..., x_n = 0, ...] \ (0,25pt) \\
&\Longrightarrow \left[(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} (0,0,...,0,0,...)\right].
\end{aligned}$$

4. – On a

$$A\left(1,0,...,0,...\right)\overset{(0{,}5pt)}{=}\left(2.1,\frac{3}{2}.0,...,\frac{n+1}{n}.0,...\right)\overset{(0{,}5pt)}{=}\left(2,0,...,0,...\right).$$

– *Pour montrer que $\lambda=2$ est une valeur propre de A il suffit de montrer que*

$$\exists\left(x_1,x_2,...\right)\in l_2\left(\mathbb{R}\right)-\{0\}:A\left(x_1,x_2,...\right)=2\left(x_1,x_2,...\right).$$

On a

$$A\left(1,0,...,0,.....\right)\overset{(0{,}5pt)}{=}\left(2,0,...,0,...\right)\overset{(0{,}5pt)}{=}2\left(1,0,...,0,...\right).$$

Ainsi

$$\exists\left(x_1,x_2,...\right)=\left(1,0,...,0,...\right)\in l_2\left(\mathbb{R}\right)-\{0\}:A\left(x_1,x_2,...\right)=2\left(x_1,x_2,...\right).$$

5. Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f,g\in C\left[0,1\right]$. On a

$$A\left(\alpha f+g\right)\overset{(0{,}5pt)}{=}\int_0^1\left(\alpha f+g\right)\left(s\right)ds\overset{(0{,}5pt)}{=}\alpha\int_0^1 f\left(s\right)ds+\int_0^1 g\left(s\right)ds\overset{(0{,}5pt)}{=}\alpha Af+Ag.$$

Ainsi, A est linéaire.

6. On a

$$\begin{aligned}\|A\|&\overset{(0{,}5pt)}{=}\sup_{0\neq f\in C[0,1]}\frac{\|Af\|}{\|f\|}\overset{(0{,}25pt)}{=}\sup_{0\neq f\in C[0,1]}\frac{\|2019f\|}{\|f\|}\\&\overset{(0{,}25pt)}{=}\sup_{0\neq f\in C[0,1]}\frac{2019\,\|f\|}{\|f\|}\overset{(0{,}25pt)}{=}\sup_{0\neq f\in C[0,1]}2019\overset{(0{,}25pt)}{=}2019.\end{aligned}$$

7. (0,5pt +0,5pt) Présentation de la copie et signalisation du numéro de groupe.

Partie II :

1. – La norme sur $L^2[0,1]$ associée à ce produit scalaire est donnée par

$$\|f\| \overset{(0{,}25pt)}{:=} \sqrt{\langle f,f\rangle} \overset{(0{,}25pt)}{=} \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } f \in L^2[0,1].$$

– On a $(L^2[0,1])^* = L^2[0,1]$ car $\underbrace{L^2[0,1] \text{ est un epace de Hilbert}}_{(0{,}5pt)}$.

(a) (0,5pt) *Pour montrer que A est bien défini il suffit de montrer que*

$$\forall f \in L^2[0,1] : Af \in L^2[0,1].$$

Soit $f \in L^2[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |(Af)(t)| &= \left|\int_0^1 te^s f(s)\,ds\right| = |\langle te^s, f\rangle| \\ &\leq \|te^s\|\,\|f\| \text{ d'après Cauchy Schwarz} \\ &= \left(\int_0^1 t^2e^{2s}ds\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^1 t^2e^{2s}ds = \frac{1}{2}t^2e^{2s}\Big|_{s=0}^{s=1} = \frac{1}{2}t^2\left(e^2-1\right).$$

Donc

$$|(Af)(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}t\left(e^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\|f\| \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(Af)(t)|^2\,dt &\leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2}t^2\left(e^2-1\right)\|f\|^2\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2-1\right)\|f\|^2 \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{6}\left(e^2-1\right)\|f\|^2 < \infty ....(*) \end{aligned}$$

C. à dire

$$\int_0^1 |(Af)(t)|^2\,dt < \infty.$$

Ainsi, $Af \in L^2[0,1]$.

(b) – (1pt) *Pour montrer que A est linéaire il suffit de montrer que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^2[0,1] : A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in L^2[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} [A(\alpha f + g)](t) &= \int_0^1 te^s (\alpha f + g)(s)\, ds = \alpha \int_0^1 te^s f(s)\, ds + \int_0^1 te^s g(s)\, ds \\ &= \alpha (Af)(t) + (Ag)(t) = [\alpha Af + Ag](t). \end{aligned}$$

C. à dire

$$[A(\alpha f + g)](t) = [\alpha Af + Ag](t), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ainsi,

$$A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

– (0,75pt) *Pour montrer que A est borné il suffit de montrer que*

$$\exists M \geq 0, \forall f \in L^2[0,1] : \|Af\| \leq M \|f\| ....(**)$$

On a

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 |(Af)(t)|^2\, dt \overset{*}{\leq} \frac{1}{6}\left(e^2 - 1\right) \|f\|^2.$$

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{e^2 - 1} > 0$.

– Puisque A est un opérateur $\underbrace{\text{linéaire}}_{(0{,}25pt)}$ $\underbrace{\text{borné}}_{(0{,}25pt)}$ alors A et continue.

– $\underbrace{\text{De (**)}}_{(0{,}5pt)}$, on trouve que

$$\|A\| \leq M = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{e^2 - 1}.$$

(c) Puisque A est $\underbrace{\text{linéaire}}_{(0{,}5pt)}$ $\underbrace{\text{borné}}_{(0{,}5pt)}$ alors $N(A)$ est fermé.

(d) Puisque A est $\underbrace{\text{linéaire}}_{(0{,}5pt)}$ $\underbrace{\text{borné}}_{(0{,}5pt)}$ alors A^* existe.

(e) *Pour montrer que A n'est pas autoadjoint il suffit de calculer A^* puis de vérifier que $A \neq A^*$:*

– (1pt) *Calcul de A^** : Soient $f, g \in L^2[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_0^1 (Af)(t)\, g(t)\, dt = \int_0^1 \left[\int_0^1 te^s f(s)\, ds\right] g(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 te^s f(s)\, g(t)\, dsdt = \int_0^1 \int_0^1 te^s f(s)\, g(t)\, dtds \\
&= \int_0^1 f(s) \left[\int_0^1 te^s g(t)\, dt\right] ds \\
&= \left\langle f, \underbrace{\int_0^1 te^s g(t)\, dt}_{A^*g} \right\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi

$$A^* : L^2[0,1] \underset{f \longmapsto A^*f}{\longrightarrow} L^2[0,1]$$

avec

$$(A^*f)(t) = \int_0^1 se^t g(s)\, ds \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

– $\underbrace{\text{De la définition de } A \text{ et } A^*}_{(0{,}5pt)}$ on trouve que $\underbrace{A \neq A^*}_{(0{,}5pt)}$. Donc, A n'est pas autoadjoint.

....

Rattrapage (4 Juillet 2019)
Partie I :

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soient X, Y deux $\mathbb{k}-$e. v. n., $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné.

(a) Complète :

- (1pt) A est borné veut dire........................
- (1pt) $\|A\| =$......................

(b) (1,25pt) Enoncer le théorème de Banach Steinhaus.

2. (1pt) Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ... \right).$$

Montrer que (X_n) converge vers 0.

3. (1,5pt) Considérons l'opérateur linéaire

$$A : \underset{(x_1,x_2,...)\longmapsto A(x_1,x_2,...)=(x_1,2x_2,3x_3,...,nx_n,...)}{l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})}$$

Montrer que A est injectif.

4. (1pt+1pt) Considérons l'opérateur

$$A : \underset{(x_1,x_2,...)\longmapsto A(x_1,x_2,...)=\left(2x_1,\frac{3}{2}x_2,...,\frac{n+1}{n}x_n,...\right)}{l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R})}$$

Calculer $A(1, 0, ..., 0, ...)$. Puis, déduire que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A.

5. (1,5pt) Montrer que l'opérateur

$$A : \underset{f\longmapsto Af=\int_0^1 f(s)ds}{C[0,1] \longrightarrow C[0,1]}$$

est linéaire.

6. (1,5pt) Considérons l'opérateur linéaire borné

$$A : \underset{f\longrightarrow Af=2019f}{C[0,1] \longrightarrow C[0,1]}$$

Utiliser la définition de $\|A\|$ pour montrer que $\|A\| = 2019$.

7. (0,5pt+0,5pt) Présentation de la copie et signalisation du numéro de groupe.

Partie II :

1. Rappellons que l'espace de Lebesgue

$$L^2[0,1] := \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est meurable et } \int_0^1 |f|^2 < \infty \right\}$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f.g \text{ pour tout } f, g \in L^2[0,1].$$

(0,5pt +0,5pt) Déterminer la norme sur $L^2[0,1]$ associée à ce produit scalaire. Puis, justifier que $(L^2[0,1])^* = L^2[0,1]$.

2. Considérons l'opérateur

$$A : L^2[0,1] \underset{f \longmapsto Af}{\longrightarrow} L^2[0,1]$$

tel que

$$(Af)(t) = \int_0^1 te^s f(s)\, ds \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Montrer que

(a) (0,5pt) A est bien défini.

(b) (1pt +0,75pt+0,5pt+0,5pt) A est linéaire, borné, continue et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{e^2-1}$.

(c) (1pt) $N(A)$ est fermé.

(d) (1pt) A^* existe.

(e) (2pt) A n'est pas autoadjoint.

Correction

Partie I :

1. (a) – (1pt) A est borné veut dire

$$\exists M \geq 0 \ (M > 0), \|Ax\| \leq M \|x\|, \forall x \in X.$$

– (1pt) $\|A\| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

(b) Enoncé du Théorème de Banach Steinhaus : Soient

$$\underbrace{X \text{ un espace de Banach}}_{(0{,}25pt)}, \ \underbrace{Y \text{ un e. v. n.}}_{(0{,}25pt)} \text{ et } \underbrace{(A_i)_{i\in I} \text{ une famille de } \mathcal{L}(X,Y)}_{(0{,}25pt)}.$$

Si

$$\underbrace{\sup_{i\in I} \|A_i x\| < \infty \text{ pour tout } x \in X}_{(0{,}25pt)}$$

alors

$$\underbrace{\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty.}_{(0{,}25pt)}$$

2. *Pour montrer que* (X_n) *converge vers* 0 *il suffit de montrer, par définition, que*

$$\|X_n - 0\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|X_n - 0\|^2 &= \left\| \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ... \right) - (0, 0, ..., 0, 0, ...) \right\|^2 \\
&\overset{(0{,}25pt)}{=} \left\| \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ... \right) \right\|^2 \\
&= \underbrace{0^2 + 0^2 + ... + 0^2}_{n} + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + ... \\
&\overset{(0{,}25pt)}{=} \sum_{i=n+1}^{i=+\infty} x_i^2 \underbrace{\underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow}}_{(0{,}25pt)} 0 \underbrace{\text{ car c'est le reste de la série convergente } \sum_{i=1}^{i=+\infty} x_i^2}_{(0{,}25pt)}.
\end{aligned}$$

3. (1,5pt) *Puisque A est linéaire, alors pour montrer que A est injectif il suffit de montrer que*

$$\forall (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) : [A(x_1, x_2, ...) = 0] \Longrightarrow [(x_1, x_2, ...) = (0, 0, ...)] .$$

Soit $(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\left[A(x_1, x_2, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} 0 \right] &\Longrightarrow \left[(x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n, ...) \overset{(0{,}25pt)}{=} (0, 0, ..., 0, 0, ...) \right] \\
&\Longrightarrow [x_1 = 0, 2x_2 = 0, 3x_3 = 0, ..., nx_n = 0, ...] \\
&\Longrightarrow [x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, ..., x_n = 0, ...] \ (0, 25pt) \\
&\Longrightarrow \left[(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} (0, 0, ..., 0, 0, ...) \right] .
\end{aligned}$$

4. – On a

$$A(1, 0, ..., 0, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} \left(2.1, \frac{3}{2}.0, ..., \frac{n+1}{n}.0, ... \right) \overset{(0{,}5pt)}{=} (2, 0, ..., 0, ...) .$$

– *Pour montrer que* $\lambda = 2$ *est une valeur propre de* A *il suffit de montrer que*

$$\exists\,(x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}) - \{0\} : A(x_1, x_2, ...) = 2(x_1, x_2, ...).$$

On a

$$A(1, 0, ..., 0, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} (2, 0, ..., 0, ...) \overset{(0{,}5pt)}{=} 2(1, 0, ..., 0, ...).$$

Ainsi

$$\exists\,(x_1, x_2, ...) = (1, 0, ..., 0, ...) \in l_2(\mathbb{R}) - \{0\} : A(x_1, x_2, ...) = 2(x_1, x_2, ...).$$

5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C[0,1]$. On a

$$A(\alpha f + g) \overset{(0{,}5pt)}{=} \int_0^1 (\alpha f + g)(s)\,ds \overset{(0{,}5pt)}{=} \alpha \int_0^1 f(s)\,ds + \int_0^1 g(s)\,ds \overset{(0{,}5pt)}{=} \alpha Af + Ag.$$

Ainsi, A est linéaire.

6. On a

$$\begin{aligned} \|A\| &\overset{(0{,}5pt)}{=} \sup_{0 \neq f \in C[0,1]} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \overset{(0{,}25pt)}{=} \sup_{0 \neq f \in C[0,1]} \frac{\|2019 f\|}{\|f\|} \\ &\overset{(0{,}25pt)}{=} \sup_{0 \neq f \in C[0,1]} \frac{2019\,\|f\|}{\|f\|} \overset{(0{,}25pt)}{=} \sup_{0 \neq f \in C[0,1]} 2019 \overset{(0{,}25pt)}{=} 2019. \end{aligned}$$

7. (0,5pt +0,5pt) Présentation de la copie et signalisation du numéro de groupe.

Partie II :

1. – La norme sur $L^2[0,1]$ associée à ce produit scalaire est donnée par

$$\|f\| \overset{(0{,}25pt)}{:=} \sqrt{\langle f, f \rangle} \overset{(0{,}25pt)}{=} \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } f \in L^2[0,1].$$

– On a $(L^2[0,1])^* = L^2[0,1]$ car $\underbrace{L^2[0,1] \text{ est un epace de Hilbert}}_{(0{,}5pt)}$.

(a) (0,5pt) *Pour montrer que A est bien défini il suffit de montrer que*

$$\forall f \in L^2[0,1] : Af \in L^2[0,1].$$

Soit $f \in L^2[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |(Af)(t)| &= \left| \int_0^1 te^s f(s)\, ds \right| = |\langle te^s, f\rangle| \\ &\leq \|te^s\| \, \|f\| \text{ d'après Cauchy Schwarz} \\ &= \left(\int_0^1 t^2 e^{2s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^1 t^2 e^{2s} ds = \frac{1}{2} t^2 e^{2s} \Big|_{s=0}^{s=1} = \frac{1}{2} t^2 \left(e^2 - 1\right).$$

Donc

$$|(Af)(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} t \left(e^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(Af)(t)|^2 dt &\leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2} t^2 \left(e^2 - 1\right) \|f\|^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \left(e^2 - 1\right) \|f\|^2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{6} \left(e^2 - 1\right) \|f\|^2 < \infty ....(*) \end{aligned}$$

C. à dire

$$\int_0^1 |(Af)(t)|^2 dt < \infty.$$

Ainsi, $Af \in L^2[0,1]$.

(b) – (1pt) *Pour montrer que A est linéaire il suffit de montrer que*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^2[0,1] : A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in L^2[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
[A(\alpha f + g)](t) &= \int_0^1 te^s (\alpha f + g)(s)\, ds = \alpha \int_0^1 te^s f(s)\, ds + \int_0^1 te^s g(s)\, ds \\
&= \alpha (Af)(t) + (Ag)(t) = [\alpha Af + Ag](t).
\end{aligned}$$

C. à dire

$$[A(\alpha f + g)](t) = [\alpha Af + Ag](t), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ainsi,

$$A(\alpha f + g) = \alpha Af + Ag.$$

– (0,75pt) *Pour montrer que A est borné il suffit de montrer que*

$$\exists M \geq 0, \forall f \in L^2[0,1] : \|Af\| \leq M \|f\| ....(**)$$

On a

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 |(Af)(t)|^2\, dt \overset{*}{\leq} \frac{1}{6}\left(e^2 - 1\right) \|f\|^2.$$

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{e^2 - 1} > 0$.

– Puisque A est un opérateur $\underbrace{\text{linéaire}}_{(0{,}25pt)}$ $\underbrace{\text{borné}}_{(0{,}25pt)}$ alors A et continue.

– $\underbrace{\text{De } (**)}_{(0{,}5pt)}$, on trouve que

$$\|A\| \leq M = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{e^2 - 1}.$$

(c) Puisque A est $\underbrace{\text{linéaire}}_{(0{,}5pt)}$ $\underbrace{\text{borné}}_{(0{,}5pt)}$ alors $N(A)$ est fermé.

(d) Puisque A est $\underbrace{\text{linéaire}}_{(0{,}5pt)}$ $\underbrace{\text{borné}}_{(0{,}5pt)}$ alors A^* existe.

(e) *Pour montrer que A n'est pas autoadjoint il suffit de calculer A^* puis de* *vérifier que* $A \neq A^*$:

– (1pt) *Calcul de* A^* : Soient $f, g \in L^2[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_0^1 (Af)(t)\, g(t)\, dt = \int_0^1 \left[\int_0^1 te^s f(s)\, ds\right] g(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 te^s f(s)\, g(t)\, dsdt = \int_0^1 \int_0^1 te^s f(s)\, g(t)\, dtds \\
&= \int_0^1 f(s) \left[\int_0^1 te^s g(t)\, dt\right] ds \\
&= \left\langle f, \underbrace{\int_0^1 te^s g(t)\, dt}_{A^*g} \right\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi

$$A^* : L^2[0,1] \underset{f \longmapsto A^*f}{\longrightarrow} L^2[0,1]$$

avec

$$(A^*f)(t) = \int_0^1 se^t g(s)\, ds \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

– $\underbrace{\text{De la définition de } A \text{ et } A^*}_{(0{,}5pt)}$ on trouve que $\underbrace{A \neq A^*}_{(0{,}5pt)}$. Donc, A n'est pas autoadjoint.

....

Examen final (2019/2020)

.

Wear your mask to protect yourself and others

.

On muni l'espace $C[0,1]$ par la norme définie par

$$\text{Pour tout } f \in C[0,1] \text{ on a } \|f\|_\infty = \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|.$$

Soit $\varphi \in C[0,1]$ une fonction donnée.

On considère l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} A & : & C[0,1] \to \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & Af = \displaystyle\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt. \end{array}$$

1. **(2pts+2pts+1pts)** Montrer que A est linéaire, borné et que $\|A\| \leq \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$.
2. Considérons la suite de fonctions continues sur $[0,1]$ définie comme suit :

$$f_n(t) = \frac{n^2\varphi(t)}{n^2|\varphi(t)|+1} \text{ pour tout } t \in [0,1] \text{ et pour tout } n \geq 1.$$

   (a) **(2pts+2pts)** Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $Af_n \geq 0$ et $\|f_n\|_\infty \leq 1$.

   (b) **(2pts+2pts)** Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq \left|Af_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Puis, déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} Af_n = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$.

   (c) **(3pts)** Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $Af_n \leq \|A\|$ (*Ind. :* Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $Af_n \leq \frac{|Af_n|}{\|f_n\|_\infty} \leq \|A\|$).

   (d) **(2pts)** Déduire que $\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt \leq \|A\|$.

3. **(1pt)** Déterminer la valeur de $\|A\|$.
4. **(1pt)** Ecriture du numéro de groupe est obligatoire.

   NB : Mode de correction est ou bien 1 ou bien 0.

Correction

Barème : voir sujet **et NB**

1. – *Montrons que A est linéaire :* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C[0,1]$. On a

$$A(\alpha f+g) = \int_0^1 (\alpha f+g)(t)\varphi(t)\,dt = \alpha\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\varphi(t)\,dt = \alpha Af + Ag.$$

– *Montrons que A est borné :* Soit $f \in C[0,1]$. On a

$$|Af| = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,|\varphi(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt.$$

Ainsi, on a montré que

$$\exists M = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt \geq 0, \forall f \in C[0,1], |Af| \leq M\,\|f\|_\infty \text{................}(*)$$

– *Montrons que* $\|A\| \leq \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$: De (*), on trouve que

$$\|A\| \leq M = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt \text{ ....}(1)$$

2. .

(a) – *Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a $Af_n \geq 0$:* On a

$$Af_n = \int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^1 \frac{n^2\varphi^2(t)}{n^2|\varphi(t)|+1}dt \geq 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

– *Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a* $\|f_n\|_\infty \leq 1$: Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= \sup_{s\in[0,1]} |f_n(s)| = \sup_{s\in[0,1]}\left[\frac{n^2|\varphi(s)|}{n^2|\varphi(s)|+1}\right] \\ &\leq 1 \text{ car } n^2|\varphi(s)| \leq n^2|\varphi(s)|+1. \end{aligned}$$

–*Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a* $0 \leq \left|Af_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \left|Af_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right| \text{ car la valeur absolu est positive.}$$

En plus

$$\begin{aligned}
\left|Af_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right| &= \left|\int_0^1 \left[\frac{n^2\varphi^2(t)}{n^2|\varphi(t)|+1} - |\varphi(t)|\right]dt\right| = \int_0^1 \left[\frac{|\varphi(t)|}{n^2|\varphi(t)|+1}\right]dt \\
&\leq \int_0^1 \left[\frac{|\varphi(t)|}{n^2|\varphi(t)|}\right]dt \text{ car } n^2|\varphi(t)|+1 \geq n^2|\varphi(t)| \\
&= \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

– *Déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} Af_n = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt$: On a

$$0 \leq \left|Af_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right| \leq \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Par le théorème de l'encadrement, on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|Af_n - \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\right| = 0.$$

Si on utilise les propriétés des suites on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} Af_n = \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt.$$

(b) *Montrons que pour tout* $n \geq 1$ *on a* $Af_n \leq \|A\|$: Soit $n \geq 1$.

– Si on utilise les propriétés de la norme canonique d'opérateurs linéaires bornés on trouve

$$\frac{|Af_n|}{\|f_n\|_\infty} \leq \|A\| \;\; ....(2)$$

– Puisque

$$\|f_n\|_\infty \leq 1$$

donc

$$|Af_n| \leq \frac{|Af_n|}{\|f_n\|_\infty}.$$

Mais

$$|Af_n| = Af_n \text{ car } Af_n \geq 0$$

alors

$$Af_n \leq \frac{|Af_n|}{\|f_n\|_\infty}............(3)$$

De (2) et (3), on trouve

$$Af_n \leq \|A\|.$$

(c) *Déduire que* $\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt \leq \|A\|$: Puisque

$$\text{pour tout } n \geq 1 \text{ on a } Af_n \leq \|A\|.$$

alors, par passage à la limite, on trouve que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} Af_n \leq \|A\|.$$

Puisque

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} Af_n = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt.$$

Alors

$$\int_0^1 |\varphi(t)|\, dt \leq \|A\| \;\; ....(4)$$

3. *Déterminons la valeur de* $\|A\|$: De (1) et (4), on trouve

$$\|A\| = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt.$$

....

Rattrapage (2019/2020)

Exercice 1 (10 pt)

Considérons l'opérateur

$$A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$f \longmapsto Af$$

avec

$$Af(t) = \int_0^t f(s)\, ds \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

1. Montrer que l'opérateur A est bien défini et linéaire.
2. Considérons $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme définie sur $C[0,1]$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ pour tout } f \in C[0,1].$$

   Montrer que

$$\forall f \in C[0,1], \|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

   Est ce que A est borné (Justifier). Montrer que $\|A\| = 1$.

Exercice 2 (10 pt)

Considérons $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tout les polynômes à coefficients réels. Rappellons que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ muni de la norme suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} : \left\| \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k \right\| = \max_{k=\overline{1,n}} |a_k| .$$

1. Soit P_n la suite des polynômes définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $P_n = x^n$. Calculer $\|P_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Considérer l'opérateur linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} : A\left(\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k x^{k-1}.$$

   Calculer $\|AP_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Est ce que A est borné (Justifier).

....

Devoir 1

Que veut dire :

– L'espace X^* , Une fonctionnnelle linéaire f.

– $\langle f, x \rangle$ et $\|f\|_{X^*}$ avec $f \in X^*$ et $x \in X$.

Citer les propriétés de : L'espace X^*.

Enoncer : Le théorème de Hahn Banach et ses corollaires.

Comparer : Le théorème de Hahn Banach et le théorème de l'existence du prolongement par continuité.

....

Devoir 2

Enoncer : Le théorème de Représentation de Riesz Fréchet.

Que veut dire : Un isomorphisme isométrique.

Expliquer : L'identification de l'espace de Hilbert H et son dual ($H = H^*$).

....

Devoir 3

Enoncer : Les théorèmes de fredholm

Citer les propriétés de : L'espace $\mathcal{K}(X, Y)$, Le spectre d'un opérateur linéaire compact.