Université de Batna 2, Département de Mathématiques,

3 Année Licence Mathématiques, *Mesure et Intégration*

Exercices corrigés

.

Exercice 1

Question 1 : *Déterminer* $\underset{n\geq 1}{\cap}\left[\frac{-1}{n},1\right]$ *et* $\underset{n\geq 1}{\cap}\left]\frac{-1}{n},1\right]$.

Réponse : D'une part

$$\begin{aligned}\left(x\in\underset{n\geq 1}{\cap}\left[\frac{-1}{n},1\right]\right) &\Longrightarrow \left(\forall n\geq 1, x\in\left[\frac{-1}{n},1\right]\right)\Longrightarrow\left(\forall n\geq 1,\frac{-1}{n}\leq x\leq 1\right)\\ &\Longrightarrow (0\leq x\leq 1) \text{ par passage à la limite qd } n\to\infty\\ &\Longrightarrow (x\in[0,1]).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\underset{n\geq 1}{\cap}\left[\frac{-1}{n},1\right]\subset[0,1]\,........(*)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}(x\in[0,1]) &\Longrightarrow \left(\forall n\geq 1, x\in\left[\frac{-1}{n},1\right]\right) \text{ car } [0,1]\subset\left[\frac{-1}{n},1\right] \text{ pour tout } n\geq 1.\\ &\Longrightarrow \left(x\in\underset{n\geq 1}{\cap}\left[\frac{-1}{n},1\right]\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$[0,1]\subset\underset{n\geq 1}{\cap}\left[\frac{-1}{n},1\right]\,.......(2*)$$

De $(*)$ et $(2*)$, on trouve que $\underset{n\geq 1}{\cap}\left[\frac{-1}{n},1\right]=[0,1]$.

De même, *on montre que* $\underset{n\geq 1}{\cap}\left]\frac{-1}{n},1\right]=[0,1]$ *(notons ici que l'étape* $\left(\forall n\geq 1,\frac{-1}{n}<x\right)$, *par passage à la limite qd* $n\to\infty$, *donne* $0\leq x$*).*

Remarque : Rappellons que si (A_n) *est une suite d'ensembles croissante (resp. décroissante) alors elle converge vers* $A=\underset{n}{\cup}A_n$ *(resp. vers* $A=\underset{n}{\cap}A_n$*).*

On a

$$\textit{pour tout } n \geq 1 \textit{ on a } \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1} \leq 1$$

alors

$$\textit{pour tout } n \geq 1 \textit{ on a } \left[\frac{-1}{n+1}, 1\right] \subset \left[\frac{-1}{n}, 1\right]$$

Ainsi, *la suite d'ensembles* $\left(\left[\frac{-1}{n}, 1\right]\right)_{n\geq 1}$ *est une suite décroissante. Cela implique qu'elle a une limite. En plus, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{-1}{n}, 1\right] = \bigcap_{n\geq 1} \left[\frac{-1}{n}, 1\right].$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{-1}{n}, 1\right] = [0, 1].$$

De même, *on montre que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left]\frac{-1}{n}, 1\right] = [0, 1]$.

Question 2 : *Donner un exemple de suite non constante de parties de* $\mathbb{R}$ *dont la limite est* $]0, 1]$.

Réponse : Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$:

– Puisque $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$ pour tout $n \geq 1$ alors la suite $\left(\left[\frac{1}{n}, 1\right]\right)_{n\geq 1}$ est une suite croisante. Donc, elle a une limite. En plus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \bigcup\limits_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

– Calculons $\bigcup\limits_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$:

D'une part

$$\begin{aligned}\left(x \in \bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) &\Longrightarrow \left(\exists n \geq 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) \Longrightarrow \left(\exists n \geq 1, 0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \\ &\Longrightarrow (0 < x \leq 1) \Longrightarrow (x \in]0, 1]).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset]0, 1] \text{........}(*)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}(x \in \left]0,1\right]) &\Longrightarrow (\exists n \geq 1, nx > 1) \text{ application d'Archimède sur } (x,1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \left(\exists n \geq 1, \frac{1}{n} < x \leq 1\right) \Longrightarrow \left(\exists n \geq 1, x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) \\ &\Longrightarrow \left(x \in \bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left]0,1\right] \subset \bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] \quad ....(2*)$$

De $(*)$ et $(2*)$, on trouve que $\bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \left]0,1\right]$.

Question 3 : *Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par $B_{2n-1} = \left]-2-\frac{1}{n}, 1\right]$ et $B_{2n} = \left[-1, 2+\frac{1}{n^2}\right[$.*

Réponse :

Rappel : Soit (A_n) une suite d'ensembles. On a

– *$x \in \lim\limits_{n\to+\infty} \sup A_n$ Ssi x appartient à A_n pour une infinité d'indices n.*

– *$x \in \lim\limits_{n\to+\infty} \inf A_n$ Ssi x appartient à A_n pour tout n sauf pour un nombre fini d'indices.*

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup B_n = [-2,2]$. D'une part

– Si $x \in [-2,1]$ alors x appartient à tout les ensembles impaires. Donc, $x \in B_n$ pour une infinité d'indice n. Donc, $x \in \lim\limits_{n\to+\infty} \sup B_n$

– Si $x \in [1,2]$ Ainsi, $x \in B_n$ pour une infinité de valeurs de l'indice n (pourquoi). Donc, $x \in \lim\limits_{n\to+\infty} \sup B_n$.

Ainsi

$$[-2,2] = [-2,1] \cup [1,2] \subset \lim_{n\to+\infty} \sup B_n ......(*)$$

D'autre part, si $x \notin [-2,2]$ alors $x \notin B_n$ à partir d'un certain rang N. Donc, x appartient à un nombre fini de parties B_n. Ceci implique que $x \notin \lim\limits_{n\to+\infty} \sup B_n$. C'est à dire, on a montré que

$$(x \notin [-2,2]) \Longrightarrow \left(x \notin \lim_{n\to+\infty} \sup B_n\right).$$

Par contraposition, on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} \sup B_n \subset [-2, 2] \text{.......} (2*)$$

De (*) et (2*), on trouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup B_n = [-2, 2]$.

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \inf B_n = [-1, 1]$: D'une part, si $x \in [-1, 1]$ alors $x \in B_n$ pour tout n on a donc $[-1, 1] \subset \lim\limits_{n \to +\infty} \inf B_n$. D'autre part, si $x \notin [-1, 1]$ alors il existe une infinité d'indices n pour lesquelles $x \notin B_n$ donc $x \notin \lim\limits_{n \to +\infty} \inf B_n$. Ainsi , $\lim\limits_{n \to +\infty} \inf B_n \subset [-1, 1]$.

Question 4 : *Existe t'il une suite* $(C_n)_{n \geq 1}$ *de parties de* $\mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_n \sup C_n = [-1, 2]$ *et* $\lim\limits_n \inf C_n = [-2, 1]$.

Réponse : Non il n'existe pas. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite $(C_n)_{n \geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_n \sup C_n = [-1, 2]$ et $\lim\limits_n \inf C_n = [-2, 1]$. On sait que $\lim\limits_n \inf C_n \subset \lim\limits_n \sup C_n$ alors $[-2, 1] \subset [-1, 2]$. C'est une contradiction.

Exercice 2

Soient X, Y deux ensembles non vide et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

Question 1 : *Soit* F *une* $\sigma-$*algèbre (tribu) sur* Y. *Posons* $\tau := f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$. *Montrer que* τ *est une* $\sigma-$*algèbre sur* X.

Réponse : Remarquons que

$$(A \in \tau) \iff \big(\exists B \in \mathcal{F} : A = f^{-1}(B)\big) \iff \big(A = f^{-1}(B) \text{ avec } B \in \mathcal{F}\big).$$

* Montrons que $X \in \tau$: On a

$$X = f^{-1}(Y) \text{ résultat dans la th. ensembles}$$

et

$$Y \in \mathcal{F} \text{ car } \mathcal{F} \text{ une } \sigma\text{-algèbre sur } Y.$$

C'est à dire, on a montré que $X = f^{-1}(Y)$ avec $Y \in \mathcal{F}$. Cela veut dire $X \in \tau$.

** Montrons que $\forall A \in \tau, A^c \in \tau$ (Stabilité par passage au complément).

Soit $A \in \tau$ alors $A = f^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{F}$. On a

$$A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c \overset{\text{th. ensemble}}{=} f^{-1}(B^c)$$

et

$$B^c \in \mathcal{F} \text{ car } B \in \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est une } \sigma - \textit{algèbre sur } Y.$$

C'est à dire, on a montré que $A^c = f^{-1}(B^c)$ avec $B^c \in \mathcal{F}$. Cela veut dire que $A^c \in \tau$.

Remarquons que $A \subset X$ donc $A^c = C_X A$ et $B \subset Y$ donc $B^c = C_Y B$.

*** Montrons que $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \tau, \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \tau$ (Stabilité par réunion dénombrable):

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \tau$ alors

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ on a } A_i = f^{-1}(B_i) \text{ avec } B_i \in \mathcal{F}.$$

On a

$$\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} \left(f^{-1}(B_i)\right) \overset{\textit{th. ensembles}}{=} f^{-1}\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} B_i\right)$$

et

$$\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} B_i \in \mathcal{F} \text{ car } (B_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est une } \sigma - \textit{algèbre sur } Y.$$

C'est à dire, on a montré que

$$\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i = f^{-1}\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} B_i\right) \text{ avec } \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} B_i \in \mathcal{F}.$$

Cela veut dire que $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \tau$.

Conclusion : L'image indirecte d'une $\sigma-$algèbre par une application est une $\sigma-$algèbre.

Question 2 : *Soit G une $\sigma-$algèbre sur X. Posons $f(\mathcal{G}) = \{f(A) : A \in \mathcal{G}\}$. Est ce que $f(\mathcal{G})$ est une $\sigma-$algèbre sur Y (Justifier).*

Réponse : Pour répondre à cette question, on va traiter ces deux exemples :

Exemple 1 : Soient $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2\}$, $\mathcal{G} = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, X\}$ et

$f : X \longrightarrow Y$ avec $f(x) = 2$ pour tout $x \in X$.

On a $\mathcal{G}$ une $\sigma-$algèbre sur X car $\mathcal{G} = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ avec $A = \{1\} \subset X$. En plus,

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{G}) &= \{f(A) : A \in \mathcal{G}\} = \{f(\varnothing), f(\{1\}), f(\{2,3,4,5\}), f(X)\} \\
&= \{\varnothing, \{f(1)\}, \{f(2), f(3), f(4), f(5)\}, \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}\} \\
&= \{\varnothing, \{2\}, \{2,2,2,2\}, \{2,2,2,2,2\}\} \\
&= \{\varnothing, \{2\}, \{2\}, \{2\}\} = \{\varnothing, \{2\}\}.
\end{aligned}$$

Alors $f(\mathcal{G}) = \{\varnothing, \{2\}\}$ n'est pas une $\sigma-$*algèbre sur* Y car $Y \notin f(\mathcal{G})$.

Exemple 2 : Soient $X = Y = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{G} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3,4,5\}, X\}$ et $f : X \longrightarrow Y = X$ avec $f(x) = x$ pour tout $x \in X$. On a

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{G}) &= \{f(A) : A \in \mathcal{G}\} = \{f(\varnothing), f(\{1\}), f(\{2,3,4,5\}), f(X)\} \\
&= \{\varnothing, \{f(1)\}, \{f(2), f(3), f(4), f(5)\}, \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}\} \\
&= \{\varnothing, \{1\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\} \\
&= \{\varnothing, \{1\}, \{2,3,4,5\}, X\} = \mathcal{G}.
\end{aligned}$$

Alors $f(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ est une $\sigma-$*algèbre sur* $Y = X$.

Conclusion : On ne peut rien conclure sur l'image directe d'une $\sigma-$algèbre par une application. Elle peut être une $\sigma-$algèbre ou ne pas être.

Exercice 3

Soit X un ensemble infini. On définit la famille D de parties de X par

$$D = \{A \in P(X) : A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$$

Rappelons que A est au plus dénombrable veut dire que A est fini $(cardA < +\infty)$ ou bien A est dénombrable $($il existe une bijection $f : A \longrightarrow \mathbb{N})$.

Question : *Montrer que D est une $\sigma-$algèbre sur X.*

1. **Réponse :** Notons que tout les ensembles sont dans $\mathcal{P}(X)$.

   (a) *Montrons que* $X \in D$: On a $X^c = \emptyset$ et $\emptyset$ est fini ($card\emptyset = 0 < +\infty$). Alors X^c est fini d'où X^c est au plus dénombrable. Ainsi $X \in D$.

   (b) *Montrons que* $\forall A \in D, A^c \in D$: Soit $A \in D$. On a

$$\begin{aligned} A \in D &\Longrightarrow (A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}) \\ &\Longrightarrow (A^c \text{ est au plus dénombrable ou } (A^c)^c = A \text{ est au plus dénombrable}) \\ &\Longrightarrow (A^c \text{ est au plus dénombrable ou } (A^c)^c \text{ est au plus dénombrable}) \\ &\Longrightarrow A^c \in D. \end{aligned}$$

   (c) *Montrons que* $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset D, \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in D$: Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset D$. On distingue deux cas

   Cas 1 : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i est au plus dénombrable : Alors $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i$ est au plus dénombrable (Résultat d'ensembles : L'union dénombrable des ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Ainsi, $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in D$.

   Cas 2 : Il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ telque A_{i_0} n'est pas au plus dénombrable : Puisque $A_{i_0} \in D$ alors $A_{i_0}^c$ est au plus dénombrable. On a

$$\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right)^c = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cap} A_i^c \subset A_{i_0}^c.$$

   Donc $\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right)^c$ est au plus dénombrable (Résultat d'ensembles : Les ensembles contenus dans un ensemble au plus dénombrable sont au plus dénombrable). Ainsi, $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in D$.

Question : *Soit* $C = \{\{x\} : x \in X\}$. *Montrer que* $D = \sigma(C)$. *Ici* $\sigma(C)$ *est la* $\sigma-$*algèbre engendrée par* C.

1. **Réponse :**

   (a) *Montrons que* $D \subset \sigma(C)$: Soit $A \in D$ alors on distingue deux cas

Cas 1 : A est au plus dénombrable. **Si** A **est fini** alors ils existent $x_0, x_1, ..., x_n \in X$ telque $A = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Donc $A = \overset{i=n}{\underset{i=0}{\cup}} \{x_i\}$. Puisque $(\{x_i\})_{i=\overline{0,n}} \subset C \subset \sigma(C)$ et $\sigma(C)$ est $\sigma-$*algèbre sur* C alors $A = \overset{i=n}{\underset{i=0}{\cup}} \{x_i\} \in \sigma(C)$. **Si** A **est dénombrable** alors ils existent $x_0, x_1, ..., x_n, ... \in X$ telque $A = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$. Donc $A = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} \{x_i\}$. Puisque $(\{x_i\})_{i\in\mathbb{N}} \subset C \subset \sigma(C)$ et $\sigma(C)$ est $\sigma-$*algèbre sur* C alors $A = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} \{x_i\} \in \sigma(C)$.

A retenir : On a montré que si A est au plus dénombrable (quelconque) alors $A \in \sigma(C)$. Donc, on retient le résultat suivant : $\sigma(C)$ contient les ensembles au plus dénombrables.

Cas 2 : A^c est au plus dénombrable. D'aprés le résultat précédent $A^c \in \sigma(C)$. Puisque $\sigma(C)$ est une $\sigma-$algèbre sur X alors $(A^c)^c \in \sigma(C)$. D'où $A \in \sigma(C)$.

(b) *Montrons que* $\sigma(C) \subset D$: Il suffit de montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Soit $A \in \mathcal{C}$ alors $A = \{x\}$ avec $x \in X$. Donc A est fini donc au plus dénombrable. Ce qui implique que $A \in \mathcal{D}$.

Exercice 4

On pose $C = \{[a, b] : a \leq b \text{ et } a, b \in]0, 1[\}$.

Question : *Montrer que* $\sigma(C) = B(]0, 1[)$. *Notons que* $\sigma(C)$ *représente la* $\sigma-$*algèbre sur* $]0, 1[$ *engendrée par* C.

Réponse : Pour montrer que $\sigma(C) = \mathcal{B}(]0, 1[)$, on montre que

$$\sigma(C) \subset \mathcal{B}(]0, 1[) \text{ et } \sigma(C) \supset \mathcal{B}(]0, 1[).$$

* Montrons que $\sigma(C) \subset \mathcal{B}(]0, 1[)$: Puisque

par définition $\sigma(C)$ est la plus petite σ-algèbre sur $]0, 1[$ qui contient C

et

$$\mathcal{B}(]0, 1[) \text{ est une } \sigma\text{-algèbre sur }]0, 1[$$

alors il suffit de montrer que

$$C \subset \mathcal{B}\left(]0,1[\right).$$

Soit $[a,b] \in C$ donc $a \leq b$ et $a,b \in]0,1[$. On a

$$[a,b] = [a,b] \cap]0,1[\text{ et } [a,b] \text{ est un fermé de } \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$[a,b] \text{ est un fermé de }]0,1[\text{ (par la topologie induite).}$$

Comme $\mathcal{B}\left(]0,1[\right)$ contient les fermés de $]0,1[$ alors $[a,b] \in \mathcal{B}\left(]0,1[\right)$.

A retenir : Soit $\mathcal{D}$ une famille d'ensembles d'un ensemble X et $\mathcal{F}$ une $\sigma-$algèbre sur X. En général, pour montrer que $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}$ il suffit de montrer que $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$.

** Montrons que $\sigma(C) \supset \mathcal{B}\left(]0,1[\right)$: On sait que par définition

$$\mathcal{B}\left(]0,1[\right) = \sigma(L) \text{ avec } L := \{O : O \text{ ouvert de }]0,1[\}.$$

Donc, il suffit de montrer que $L \subset \sigma(C)$: Soit $O \in L$ alors O est un ouvert de $]0,1[$. On sait que

$$O \text{ est une union dénombrable d'intervalles sous la forme }]a,b[\text{ avec } 0 \leq a < b \leq 1 ....(*)$$

Mais

$$]a,b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \geq \frac{2}{b-a}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

Comme

$$\left(\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \geq \frac{2}{b-a}} \subset C \overset{\textit{résultat}}{\subset} \sigma(C) \text{ et } \sigma(C) \text{ est une } \sigma\text{-}\textit{algèbre sur }]0,1[$$

alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \geq \frac{2}{b-a}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(C)$.

Ainsi

$$]a,b[\in\sigma(C)\text{......}(**)$$

(*) et (**) implique que $O\in\sigma(C)$.

Exercice 5

Soit $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure de probabilité. On pose $\tau:=\{A\in\mathcal{F}:\mu(A)=0 \text{ ou } \mu(A)=1\}$.

Question : *Montrer que τ est une $\sigma-$algèbre (tribu) sur X.*

Réponse :

* Montrons que $X\in\tau$: On a

$$X\in\mathcal{F} \text{ car } \mathcal{F} \text{ est une } \sigma-\text{algèbre sur } X$$

et

$$\mu(X)=1 \text{ car } \mu \text{ est une mesure de probabilité.}$$

C'est à dire, on a montré que $X\in\mathcal{F}$ et $\mu(X)=1$. Cela veut dire que $X\in\tau$.

** Montrons que $\forall A\in\tau, A^c\in\tau$: Soit $A\in\tau$. Par la définition de l'ensemble τ

– On a $A\in\mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur X alors

$$A^c\in\mathcal{F}\text{......}(*)$$

– On a aussi $\mu(A)=0$ ou $\mu(A)=1$. Mais

$$\begin{aligned}\mu(A^c) &= \mu(X)-\mu(A) \text{ (A le faire)}\\ &= 1-\mu(A)=\begin{cases}1-1=0 \text{ si } \mu(A)=1\\ \text{ou bien}\\ 1-0=1 \text{ si } \mu(A)=0.\end{cases}\end{aligned}.$$

Ainsi

$$\mu(A^c) = 0 \text{ ou } \mu(A^c) = 1......(2*)$$

De (*) et (2*), on trouve que $A^c \in \tau$.

*** Montrons que $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \tau, \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \tau$: Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \tau$. On a $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F}$ (Pourquoi). Pour montrer, maintenant, que $\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) = 0$ ou $\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) = 1$, On va distinguer 2 cas :

OU BIEN : Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\mu(A_i) = 0$. Alors

$$0 \overset{\mu \text{ mesure}}{\leq} \mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) \overset{\textit{propriété}}{\leq} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = 0.$$

Ainsi $\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) = 0$.

OU BIEN : Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_k) = 1$. On a $A_k \subset \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \subset X$ alors

$$1 = \mu(A_k) \leq \mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) \leq \mu(X) = 1.$$

Ainsi, $\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) = 1$.

Exercice 6

Question : *Montrer que la fonction ν définie par $\nu(A) := cardA$ pour tout $A \in P(\mathbb{N})$ est une mesure positive sur* $\mathbb{N}$.

Réponse : On a

* $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une $\sigma-$algèbre sur $\mathbb{N}$. En plus

** $\nu(\varnothing) := card\varnothing = 0$ car $\varnothing$ ne contient aucun elément.

*** Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}.} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ disjoints deux à deux. On a

$$\begin{aligned}
\nu\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) &:= card\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} card A_i \text{ car } (A_i)_{i\in\mathbb{N}.} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ sont disjoints deux à deux} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i).
\end{aligned}$$

Exercice 7

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec λ est la mesure de Lebesgue. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $A + a := \{x + a : x \in A\}$.

Question 1 : *Montrer que* $\tau_a := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$.

Réponse : Remarquons que tout les ensembles sont dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

* Montrons que $\mathbb{R} \in \tau_a$: On a

$$\mathbb{R} + a = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ car } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ est une } \sigma\text{-algèbre sur } \mathbb{R}.$$

C'est à dire, on a montré que $\mathbb{R} + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cela veut dire que $\mathbb{R} \in \tau_a$.

** Montrons que $\forall A \in \tau_a, A^c \in \tau_a$: Soit $A \in \tau_a$ alors $A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut, facilement, montrer que

$$A^c + a = (A + a)^c.$$

Mais

$$(A + a)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ car } A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ est une } \sigma\text{-algèbre sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi $A^c + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cela veut dire que $A^c \in \tau_a$.

*** Montrons que $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \tau_a, \underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i \in \tau_a$: Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \tau_a$ alors

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^* \text{ on a } A_i + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On peut montrer que

$$\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i + a = \underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} (A_i + a).$$

Mais

$$\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} (A_i + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ car } (A_i + a)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ est une } \sigma\text{-algèbre sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Cela veut dire que $\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i \in \tau_a$.

Question 2 : *Montrer que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \tau_a$.

Réponse :

* Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \tau_a$: On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]x, y[\,, x, y \in \mathbb{R} \text{ avec } x \leq y\})$ alors pour montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \tau_a$ il suffit de montrer que

$$\{]x, y[\,, x, y \in \mathbb{R} \text{ avec } x \leq y\} \subset \tau_a.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$. On a

$$]x, y[+ a =]x + a, y + a[\,.$$

Mais

$$]x + a, y + a[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ car }]x + a, y + a[\text{ est un ouvert de } \mathbb{R}.$$

Ainsi $]x, y[+ a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cela veut dire que $]x, y[\in \tau_a$.

A retenir : On a montré que pour tout $a \in \mathbb{R}$ *on a* $B(\mathbb{R}) \subset \tau_a$. *Ainsi* $B(\mathbb{R}) \subset \tau_{-a}$ *aussi.*

** Montrons que $\tau_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$: Soit $A \in \tau_a$ alors

$$A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Mais

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \tau_{-a}$$

alors $A + a \in \tau_{-a}$. Ainsi

$$A = (A + a) + (-a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Question 3 : *Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on pose* $\mu(A) = \lambda(A + a)$. *Montrer que* μ *est une mesure positive sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Réponse : On a

* $\mu(\varnothing) = \lambda(\varnothing + a) = \lambda(\varnothing) = 0$ car λ est une mesure.

** Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjoints deux à deux. On a

$$\begin{aligned}
\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) &= \lambda\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i + a\right) = \lambda\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} (A_i + a)\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \lambda(A_i + a) \text{ car } \lambda \text{ est une mesure et } (A_i + a)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ disjoints deux à deux} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mu(A_i).
\end{aligned}$$

Question 4 : *Montrer que pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda(A + a) = \lambda(A)$.

Réponse : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\mu(]x, y]) = \lambda(]x + a, y + a]) = y - x = \lambda(]x, y]).$$

Alors μ et λ coincident sur le semi anneau $\{]x, y] : x, y \in \mathbb{R} \text{ avec } x \leq y\}$.

Puisque λ est $\sigma-$finis alors μ et λ coincident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. C. à dire,

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ on a } \mu(A) = \lambda(A).$$

Ceci implique que $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ pour tout $A \in B(\mathbb{R})$.

Exercice 8

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue.

Question 1 : *Soit* $A = \underset{n\geq 1}{\cup}\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]$. *Calculer* $\lambda(A)$.

Réponse : On a

$$n < n + \frac{1}{2^n} < n+1 < n+1+\frac{1}{2^{n+1}} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Alors, la suite d'ensembles $\left(\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]\right)_{n\geq 1}$ est strictement croissante. Donc, les ensembles $\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]$ sont disjoints deux à deux. Ainsi

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \lambda\left(\underset{n\geq 1}{\cup}\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]\right) = \sum_{n\geq 1}\lambda\left(\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]\right) \\ &= \sum_{n\geq 1}\left[\left(n+\frac{1}{2^n}\right)-n\right] = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n} = ?.\end{aligned}$$

Test : *Calculer* $\lambda\left(\underset{n\geq 0}{\cup}\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right[\right)$.

Question 2 : *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Calculer* $\lambda(\{x\})$.

Réponse :

Méthode 1 : On a

$$\lambda(\{x\}) = \lambda([x,x]) = x - x = 0.$$

Méthode 2 : On a

$$\forall \varepsilon > 0 : \{x\} \subset [x, x+\varepsilon].$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0 : \lambda(\{x\}) \leq \lambda([x, x+\varepsilon]) = \varepsilon.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* (\text{avec } \varepsilon = \frac{1}{n} > 0) \text{ on a } 0 \leq \lambda(\{x\}) \leq \frac{1}{n}.$$

Par passage à la limite qd $n \to +\infty$, on obtient $\lambda(\{x\}) = 0$.

Question 3 : *Soient* $x_0, x_1, ... \in \mathbb{R}$. *Calculer* $\lambda\left(\underset{n\geq 0}{\cup}\{x_n\}\right)$.

Réponse : On a

$$0 \leq \lambda \left(\underset{n\geq 0}{\cup} \{x_n\} \right) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(\{x_n\}) = \sum_{n\geq 0} 0 = 0.$$

Alors $\lambda \left(\underset{n\geq 0}{\cup} \{x_n\} \right) = 0.$

Question 4 :

Q. 4. 1 : *En déduire que* $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

R. 4. 1 : Puisque $\mathbb{Q}$ est déombrable alors $\mathbb{Q} = \underset{n\geq 0}{\cup} \{x_n\}$. Ainsi

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda \left(\underset{n\geq 0}{\cup} \{x_n\} \right) \overset{Q.3}{=} 0.$$

Q. 4. 2 : *Calculer* $\lambda([0,1]/\mathbb{Q})$.

R. 4. 2 : On a

$$\lambda([0,1]) = \lambda(([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([0,1]/\mathbb{Q})).$$

Puisque $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $[0,1]/\mathbb{Q}$ sont disjoints et λ est une mesure alors

$$\lambda([0,1]) = \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) + \lambda([0,1]/\mathbb{Q}).$$

Cela implique que

$$\lambda([0,1]/\mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}).$$

Mais

$$\lambda([0,1]) = 1 - 0 = 1$$

et

$$\lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0 \text{ car } 0 \leq \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) \leq \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

Ainsi $\lambda([0,1]/\mathbb{Q}) = 1 - 0 = 0.$

Exercice 9

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable ($\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur X). Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de mesures positive sur $(X, \mathcal{F})$ (Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, μ_n est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$).

Partie I :

Supposons que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de mesure croissante. Posons pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) := \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(A) \tag{1}$$

Question 1 : *Montrer que la relation (1) définit une application $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $\mu(\varnothing) = \varnothing$.*

Réponse : *Puisque* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de mesures croissante alors pour tout n on a $\mu_n \leq \mu_{n+1}$. Ainsi, pour tout n et pour tout $A \in \mathcal{F}$ on a $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Ceci implique que $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ croissante. Ainsi $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(A)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$). En plus, cette limite est unique donc μ définit une application.

On a

$$\begin{aligned}
\mu(\varnothing) \quad : &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(\varnothing) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} 0 \text{ car } \mu_n \text{ est une mesure} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

C'est à dire $\mu(\varnothing) = \varnothing$.

Question 2 : *Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux. Posons $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ et $\alpha = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(A_k)$. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ on a $\mu_n(A) \geq \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_n(A_k)$.*

Réponse : Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\mu_n(A) &= \mu_n\left(\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_k\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu_n(A_k) \text{ car } \mu_n \text{ est une mesure et } (A_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F} \textit{ disjoints deux à deux}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m} \mu_n(A_k) + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mu_n(A_k) \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} \mu_n(A_k) \text{ car } \mu_n : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ donc } \sum_{k=m+1} \mu_n(A_k) \geq 0
\end{aligned}$$

C'est à dire $\mu_n(A) \geq \sum_{k=1}^{m} \mu_n(A_k)$.

Question 3 : *Montrer que $\mu(A) \geq \alpha$.*

Réponse : Pour tout n on a $\mu_n(A) \geq \sum_{k=1}^{m} \mu_n(A_k)$ alors on passe à la limite $n \longrightarrow +\infty$ on trouve

$$\mu(A) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(A) \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

Donc $\mu(A) \geq \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k)$. On passe à la limite $m \longrightarrow +\infty$ on trouve $\mu(A) = \lim_{m\longrightarrow+\infty} \mu(A) \geq \lim_{m\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \alpha$. Ainsi $\mu(A) \geq \alpha$.

Question 4 : *Déduire que si $\alpha = +\infty$ alors $\mu(A) = \alpha$.*

Réponse : On a $\mu(A) \geq \alpha = +\infty$ alors $\mu(A) = +\infty = \alpha$.

Question 5 : *Supposons que $\alpha < \infty$ (c-à- dire $\alpha \in \mathbb{R}$). En utilisant la propriété du reste d'une série convergente dans $\mathbb{R}$ démontrer la relation suivante*

$$\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k\geq m_0+1} \mu_n(A_k) < \epsilon.$$

Réponse : Puisque $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(A_k) = \alpha < \infty$ alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(A_k)$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Ceci implique que le reste $R_m = \sum\limits_{k\geq m+1} \mu(A_k)$ est convergente vers 0. Alors, par définition, on trouve

$$\forall\epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^*, \forall m : m \geq m_0 \Longrightarrow |R_m - 0| < \epsilon.$$

Mais $|R_m - 0| = \sum\limits_{k\geq m+1} \mu(A_k)$ alors en prenant $m = m_0 \geq m_0$ on trouve

$$\forall\epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^*, \sum_{k\geq m_0+1} \mu(A_k) < \epsilon.$$

Puisque $\mu(A) = \sup\{\mu_n(A), n \in \mathbb{N}^*\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mu_n(A_k) \leq \mu(A_k)$ alors

$$\forall\epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k\geq m_0+1} \mu_n(A_k) \leq \sum_{k\geq m_0+1} \mu(A_k) < \epsilon.$$

Question 6 : Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mu_n(A) \leq \sum\limits_{m=1}^{m_0} \mu_n(A_m) + \epsilon.$

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque μ_n est une mesure sur $(X, \mathcal{F})$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux alors

$$\mu_n(A) = \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{m_0}\mu_n(A_k) + \sum_{k\geq m_0+1} \mu_n(A_k).$$

De la question précédente, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu_n(A) < \sum_{m=1}^{m_0}\mu_n(A_m) + \epsilon.$$

Question 7 : *Déduire que* $\mu(A) \leq \alpha$.

Réponse : On passe dans l'inégalité ci-dessus à la limite quand $n \to \infty$ pour trouver $\mu(A) \leq \sum\limits_{m=1}^{m_0} \mu(A_m) + \epsilon$. Ainsi

$$\mu(A) \leq \sum_{m=1}^{m_0}\mu(A_k) + \epsilon \leq \sum_{m=1}^{m_0}\mu(A_k) + \sum_{k\geq m_0+1} \mu(A_k) + \epsilon = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\mu(A_k) + \epsilon.$$

Ceci implique que

$$\forall\varepsilon > 0, \mu(A) \leq \alpha + \varepsilon$$

On passe à la limite quand $\varepsilon \overset{>}{\rightarrow} 0$ pour trouver $\mu(A) \leq \alpha$.

Question 8 : *Déduire que μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.*

Réponse : On a vu que $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ avec $\mu(\varnothing) = 0$. Reste à vérifier que

$$\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F} \text{ disjoints deux à deux, } \mu\left(\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(A_k).$$

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}$ disjoints deux à deux. On a

Si $\alpha = +\infty$ alors d'aprés la question 4 on a $\mu(A) = \alpha$. C'est à dire $\mu\left(\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_k\right) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(A_k)$..

Si $\alpha < +\infty$ alors $\mu(A) \leq \alpha$. Mais d'aprés la question 3 $\mu(A) \geq \alpha$ ainsi $\mu(A) = \alpha$. C'est à dire $\mu\left(\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_k\right) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(A_k)$.

A retenir : *La limite (simple) d'un suite de mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$ croissante est une mesure.positive sur $(X, \mathcal{F})$.*

Partie II :

On ne suppose plus que la suite de mesures $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ soit une suite croissante. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ on pose $\upsilon(A) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mu_k(A)$.

Question : *Montrer que υ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.*

Réponse : On remarque que $\upsilon(A) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \upsilon_n$ avec $\upsilon_n(A) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \mu_k(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, on va appliquer le résultat de la première partie. On a υ_n est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$ car c'est la somme **fini** de mesures positives sur $(X, \mathcal{F})$. En plus,

$$\forall n, \upsilon_n(A) = \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k(A) \leq \sum_{k=1}^{k=n+1} \mu_k(A) = \upsilon_{n+1}(A).$$

Ainsi, $(\upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$ croissante d'aprés la première partie on trouve que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \upsilon_n$ est une mesure positive *sur* $(X, \mathcal{F})$. D'où υ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$

A retenir : *La série dont le terme général est une suite de mesure positive sur* $(X, \mathcal{F})$ *est une mesure positive sur* $(X, \mathcal{F})$.

Exercice 10

Soit f une fonction mesurable de E vers $\overline{\mathbb{R}}_+$ i. e. $f \in \mathcal{M}\left(E, \overline{\mathbb{R}}_+\right)$.

Question 1 : *Rappeller la tribus Borelienne* $B_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ *sur* $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Réponse : Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

– Les intervalles $[-\infty, a[\,,\ ]a, b[$ et $]b, +\infty]$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.

– U est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ Ssi $U = O \cap \overline{\mathbb{R}}_+$ avec O un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, $\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ car $\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[= \left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\cap \overline{\mathbb{R}}_+$ et $\left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

– V est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}_+$ Ssi $V = F \cap \overline{\mathbb{R}}_+$ avec F un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, pour tout entiers k et n on a $\left\{\frac{k}{2^n}\right\}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}_+$ car $\left\{\frac{k}{2^n}\right\} = \left\{\frac{k}{2^n}\right\} \cap \overline{\mathbb{R}}_+$ et $\left\{\frac{k}{2^n}\right\}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ ($\left\{\frac{k}{2^n}\right\}^c = \left[-\infty, \frac{k}{2^n}\right[\cup \left]\frac{k}{2^n}, +\infty\right]$ un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$).

– $B_{\overline{\mathbb{R}}_+} = \sigma-$algèbre Borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}_+ = \sigma\left(\left\{U : U \text{ ouvert de } \overline{\mathbb{R}}_+\right\}\right) = \sigma\left(\left\{V : V \text{ fermé de } \overline{\mathbb{R}}_+\right\}\right)$

Considérons, maintenant, la suite définie comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in E$ on a

$$f_n(x) = \begin{cases} k2^{-n} & \text{si} \quad \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ et } k = 0, 1, ..., n2^n - 1, \\ n & \text{si} \quad f(x) \geq n. \end{cases}$$

Question 2 : *Soit* $x \in E$. *Comment calculer* $f_n(x)$?

Réponse : Au début, on calcule $f(x)$. On a $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \left(\bigcup_{k=0}^{n2^n-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) \cup [n, +\infty]$ donc ou bien il existe $k = 0, ..., n2^n - 1$ tel que $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ alors $f_n(x) = k2^{-n}$ ou bien $f(x) \in [n, +\infty]$ alors $f_n(x) = n$.

Question 3 : *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \{x \in E : f(x) \in [n, +\infty]\}$ *et pour tout* $k = 0, 1, ..., n2^n - 1$, $A_{n,k} = \left\{x \in E : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right\}$ *.Montrer que les ensembles* B_n *et* $A_{n,k}$ *sont mesurables.*

Réponse : On a

$$B_n := \{x \in E : f(x) \in [n, +\infty]\} = f^{-1}([n, +\infty]).$$

$.f$ est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}_+, B_{\overline{\mathbb{R}}_+}\right)$ et

$$[n, +\infty] \in B_{\overline{\mathbb{R}}_+} \ ([n, +\infty] = \{n\} \cup]n, +\infty] \text{ et } \{n\},]n, +\infty] \in B_{\overline{\mathbb{R}}_+}.)$$

Alors B_n est un ensemble mesurable de E.

De plus

$$A_{n,k} := \left\{x \in E : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right).$$

f est mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}_+, B_{\overline{\mathbb{R}}_+}\right)$ et

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\in B_{\overline{\mathbb{R}}_+} \ (\text{car } \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[= \left\{\frac{k}{2^n}\right\} \cup \left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\text{ et } \left\{\frac{k}{2^n}\right\}, \left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\in B_{\overline{\mathbb{R}}_+}).$$

Alors $A_{n,k}$ est un ensemble mesurable.

Question 4 : *Montrer que* (f_n) *est une suite de fonctions positives.*

Réponse : : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$. On a

* Ou bien $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$ et $k = 0, 1, ..., n2^n - 1$ alors $f_n(x) = k2^{-n} \geq 0$.

** Ou bien $f(x) \geq n$ alors $f_n(x) = n \geq 0$.

Ce qui implique que $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 5 : *Montrer que* (f_n) *est une suite de fonctions croissante.*

Réponse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in E = \left(\overset{n2^n-1}{\underset{k=0}{\cup}} A_{n,k}\right) \cup B_n$ alors on distingue trois cas :

Cas 1 $0 \leq f(x) < n$ alors il existe $k = 0, ..., n2^n - 1$ tel que $x \in A_{n,k}$. D'une part,

$f_n(x) = k2^{-n}$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
(x \in A_{n,k}) &\Longrightarrow \left(\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right) \\
&\Longrightarrow \left(\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}} = \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \\
&\Longrightarrow \left(\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \text{ ou } \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \\
&\Longrightarrow (x \in A_{n+1,2k} \text{ ou } x \in A_{n+1,2k+1})
\end{aligned}$$

Ainsi, ou bien $x \in A_{n+1,2k}$ alors

$$f_{n+1}(x) = 2k2^{-(n+1)} = 2k2^{-n}2^{-1} = k2^{-n} = f_n(x) \geq f_n(x).$$

Ou bien $x \in A_{n+1,2k+1}$ alors

$$f_{n+1}(x) = (2k+1)2^{-(n+1)} = (2k+1)2^{-n}2^{-1} = \left(k + \frac{1}{2}\right)2^{-n} \geq k2^{-n} = f_n(x).$$

Cas 2 $n \leq f(x) < n+1$ (Ainsi $f_n(x) = n$). On a $\frac{n2^n}{2^n} = n \leq f(x) < n+1 = \frac{(n+1)2^n}{2^n}$ alors il existe $k = n2^n, ..., (n+1)2^n - 1$ tel que $\frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} = \frac{2k+2}{2^{n+1}}$. Donc ou bien $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ ou bien $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$. Puis, on montre que dans les deux cas $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ (A le faire).

Cas 3 $f(x) \geq n+1$ alors $f_{n+1}(x) = n+1 \geq n = f_n(x)$. C'est à dire $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Question 6 : *Montrer que* $E = \left(\bigcup_{k=0}^{n2^n-1} A_{n,k}\right) \cup B_n$ *avec* $A_{n,0}, A_{n,1}, ..., A_{n,n2^n-1}$ *et* B_n *sont disjoints deux à deux.*

Réponse : $E = \left(\bigcup_{k=0}^{n2^n-1} A_{n,k}\right) \cup B_n$ car

$$\begin{aligned}
E &= f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right) = f^{-1}([0,n[\cup [n,+\infty]) = f^{-1}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n2^n-1}\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) \cup [n,+\infty]\right) \\
&= \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) \cup f^{-1}([n,+\infty]) = \left(\bigcup_{k=0}^{n2^n-1} A_{n,k}\right) \cup B_n.
\end{aligned}$$

$A_{n,0}, A_{n,1}, \ldots.., A_{n,n2^n-1}, B_n$ sont disjoints deux à deux :: Soient $k, m = 0, 1, \ldots, n2^n - 1$ avec $k \neq m$ $(k > m)$. On a

$$\begin{aligned} A_{n,k} \cap A_{n,m} &= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) \cap f^{-1}\left(\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right[\right) \\ &= f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\cap \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right[\right) \overset{k \geq m}{=} f^{-1}(\varnothing) = \varnothing. \end{aligned}$$

C'est à dire $A_{n,k} \cap A_{n,m} = \varnothing$.

Enuite, on montre que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n2^n - 1$ on a $A_{n,k} \cap B_n = \varnothing$ (A le faire).

Question 7 : *Montrer que (f_n) est une suite de fonctions étagées.*

Réponse : Soit $x \in E$. Puisque $E = \left(\overset{n2^n-1}{\underset{k=0}{\cup}} A_{n,k}\right) \cup B_n$ avec $A_{n,0}, A_{n,1}, \ldots.., A_{n,n2^n-1}$ et B_n sont disjoints deux à deux alors

$$\begin{aligned} & f_n(x) = \left(f_n 1_{A_{n,0}} + f_n 1_{A_{n,1}} + \ldots + f_n 1_{A_{n,n2^n-1}} + f_n 1_{B_n}\right)(x) \\ = & \sum_{k=0}^{n2^n-1} f_n(x) 1_{A_{n,k}}(x) + f_n(x) 1_{B_n}(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \left(k2^{-n} 1_{A_{n,k}}\right)(x) + n1_{B_n}(x). \end{aligned}$$

Ainsi $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n} 1_{A_{n,k}} + n1_{B_n}$. Ceci implique, par définition, que f_n est une fonction étagée.

Question 8 : *Montrer que (f_n) est une suite de fonctions mesurables.*

Réponse :

Méthode 1 : On utilise la condition suffisante de la mesurabilité des fonctions étagées : Puisque $A_{n,0}, A_{n,1}, \ldots.., A_{n,n2^n-1}$ et B_n sont mesurables alors la fonction étagée

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n} 1_{A_{n,k}} + n1_{B_n}$$

est mesurable.

Méthode 2 : On a
$f_n = \sum\limits_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n} 1_{A_{n,k}} + n1_{B_n}$.

Pour tout $k = 0, 1, ..., n2^n - 1$, la fonction $k2^{-n}1_{A_{n,k}}$ est mesurable car c'est le produit de la fonction constante $k2^{-n}$ qui est mesurable et la fonction $1_{A_{n,k}}$ qui est mesurable car $A_{n,k}$ est mesurable.

La fonction $n1_{B_n}$ est mesurable (Pourquoi).

Alors f_n est mesurable.

(Rappel : La somme de fonctions mesurables est une fonction mesurable).

Question 9 : *Montrer que f est la limite simple de (f_n).*

Réponse : *On montre que, pour tout $x \in E$, on a* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

Cas 1 : Si $f(x) = +\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(x) \geq n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(x) = n$. Ainsi $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n = +\infty = f(x)$.

Cas 2 : Si $f(x) < +\infty$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) < n_0$ (par exemple $n_0 = E(f(x)) + 1$). Soit $n \geq n_0$ on a $f(x) < n_0 \leq n$. Alors il existe $k = 0, 1, ..., n2^n - 1$ tel que $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$. Donc $f_n(x) = k2^{-n}$. *Calculons* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)$: **(Attention ici k dépend de n : pour tout $n \geq n_0$ il existe k...)**. On a

$$\forall n \geq n_0 : f_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} = f_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi $0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$. Par le critère d'encadrement, on trouve $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (f(x) - f_n(x)) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Exercice 11

Question : *Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante est Borélienne.*

Réponse : *Rappellons q'une fonction Borélienne est une fonction mesurable de (X, B_X) dans (Y, B_Y).*

Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}(]-\infty, a]) \in B_{\mathbb{R}}$. On distingue trois cas

Cas $f^{-1}(]-\infty, a]) = \varnothing$. Puisque $\varnothing \in B_{\mathbb{R}}$ (car $\varnothing$ est un fermé de $\mathbb{R}$) alors

$$f^{-1}(]-\infty, a]) \in B_{\mathbb{R}}.$$

Cas $f^{-1}(]-\infty,a]) = \{x\}$. Puisque $\{x\} \in B_{\mathbb{R}}$ (car c'est un fermé de $\mathbb{R}$) alors

$$f^{-1}(]-\infty,a]) \in B_{\mathbb{R}}.$$

Cas $f^{-1}(]-\infty,a])$ contient au moin deux éléments distincts. *Il suffit de montrer que* $f^{-1}(]-\infty,a])$ *est un intervalle :* Soient $x, y \in f^{-1}(]-\infty,a])$ avec $x < y$. *Soit* $t \in]x,y[$. Puisque f est une fonction croissante alors

$$f(x) \leq f(t) \leq f(y).$$

Mais

$$f(y) \leq a$$

car $y \in f^{-1}(]-\infty,a])$ **ainsi** $f(y) \in]-\infty,a]$.

Alors

$$f(t) \leq f(y) \leq a.$$

Donc $f(t) \leq a$. Ce qui implique que $t \in f^{-1}(]-\infty,a])$. Ainsi, on a montré que

$$\forall x, y \in \ f^{-1}(]-\infty,a]) :]x,y[\subset \ f^{-1}(]-\infty,a]).$$

Ceci implique, par la définition d'un intervalle, que $f^{-1}(]-\infty,a])$ est un intervalle. Ainsi, on a montré que f est mesurable. Puisque $f : (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ alors f est Borelienne.

Exercice 12

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble non vide E.

Question 1 : *Montrer que si la fonction* f *est* $(T, B(\mathbb{R}))$ *mesurable alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'ensemble* $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ *est mesurable.*

Réponse : *Notons que* f *est* $(T, B(\mathbb{R}))$ *mesurable veut dire que* $f : E \to \mathbb{R}$ *est mesurable pour la tribu* T *sur* X *et la tribu* $B(\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}
\{x \in E : f(x) = a\} &= \{x \in E : f(x) \leq \alpha \text{ et } f(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in E : f(x) \in]-\infty, \alpha]\} \cap \{x \in E : f(x) \in [\alpha, +\infty[\} \\
&= f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \cap f^{-1}([\alpha, +\infty[).
\end{aligned}$$

Puisque

$$f \text{ est mesurable et }]-\infty, \alpha], [\alpha, +\infty[\in B(\mathbb{R})$$

alors

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha]), f^{-1}([\alpha, +\infty[) \in T.$$

Mais T est une tribu sur X alors

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \cap f^{-1}([\alpha, +\infty[) \in T.$$

Ceci implique que $\{x \in E : f(x) = a\} \in T$. Cela veut dire que $\{x \in E : f(x) = a\}$ est mesurable.

Question 2 : *On considère les fonctions* $f^+ = \sup(f, 0)$ *et* $f^- = -\inf(f, 0)$. *Montrer que* f *est mesurable Ssi* f^+ *et* f^- *sont mesurables.*

Réponse :

L'implication directe : Si f *est mesurable alors* f^+ *et* f^- *sont mesurables :*

* **Pour** f^+ : *Rappellons que le max de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable.*

On a

$$f^+ = \max(f, 0).$$

Puisque f est mesurable et la fonction constante 0 est mesurable (car c'est une fonction constante) alors $\max(f, 0)$ est mesurable. Ainsi, f^+ est mesurable.

** **Pour** f^+ : *Rappellons que si* f *est mesurable alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la fonction* λf *est mesurable.*

On a

$$f^- = \max(-f, 0).$$

Mais $\max(-f, 0)$ est mesurable car c'est le max de deux fonctions mesurables $-f = (-1) f$ et la fonction 0.

L'implication indirecte : Si f^+ *et* f^- *sont mesurables alors* f *est mesurable :*

On a

$$f = f^+ - f^-.$$

Mais $f^+ - f^-$ est mesurable car c'est la différence entre deux fonctions mesurables f^+ et f^-. Ainsi f est mesurable.

Question 3a : *Montrer que si* f *est mesurable alors* $|f|$ *est mesurable.*

Réponse :

Méthode 1 : $|f|$ est mesurable car $|f|$ est la composition de deux fonctions mesurables (la fonction f et la fonction $|.|$). Ici, $|.|$ est mesurable car c'est une fonction continue.

Méthode 2 : D'une part, f est mesurable alors, d'aprés la question 2, f^+ et f^- sont mesurables. D'autre part, on a

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Mais $f^+ + f^-$ est mesurable car c'est la somme de deux fonctions mesurables f^+ et f^-. Ainsi, $|f|$ est mesurable.

Question 3b : *Donner un exemple pour montrer que l'inverse n'est pas toujours vérifie.*

Réponse : Soit $A \notin T$. On consière la fonction définie sur E par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ -1 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

On a

– $|f|$ est une fonction mesurable car $|f| = 1$ (fonction constante).

– f n'est pas mesurable car il existe $B \in B(\mathbb{R})$ tel que $f^{-1}(B) \notin T$. En effet, si on prend $B = [0, +\infty[\in B(\mathbb{R})$. Alors

$$f^{-1}(B) = f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in E : f(x) \in [0, +\infty[\} = \{x \in E : f(x) \geq 0\} = A \notin T.$$

Conclusion : Si $|f|$ est une fonction mesurable alors on ne peut rien conclure sur la mesurabilité de f.

Exercice 13

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On considère les applications mesurables $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Question 1 : *Montrer que l'application H définit sur X par $H(x) = g(f_1(x), f_2(x))$ est mesurable.*

Réponse :

Rappel : Une fonction $f : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{E})$ est mesurable si

$$\forall A \in \mathcal{E} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Un ensemble mesurable est un ensemble qui appartient à la $\sigma-$algèbre.

1. Considérons la fonction F définie de X vers $\mathbb{R}^2$ par $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Pour tout $x \in X$, on a

$$H(x) = g(f_1(x), f_2(x)) = g(F(x)) = goF(x).$$

   Ainsi $H = goF$.

2. *Montrons que F est mesurable de $(X, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2})$: C'est à dire, on montre que*

$$\forall A \in B_{\mathbb{R}^2} := \sigma(\{]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2] : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}) : F^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Pour cela, par un résultat du cours, il suffit de montrer que

$$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} : F^{-1}\left(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right) \in \mathcal{F}.$$

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. *Trouvons* $F^{-1}\left(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right)$: Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned}
\left(x \in F^{-1}\left(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right)\right) &\iff \left(\left(f_1(x), f_2(x)\right) = F(x) \in]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right) \\
&\iff \left(f_1(x) \in]-\infty, a_1] \text{ et } f_2(x) \in]-\infty, a_2]\right) \\
&\iff \left(x \in f_1^{-1}\left(]-\infty, a_1]\right) \text{ et } x \in f_2^{-1}\left(]-\infty, a_2]\right)\right) \\
&\iff \left(x \in f_1^{-1}\left(]-\infty, a_1]\right) \cap f_2^{-1}\left(]-\infty, a_2]\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $F^{-1}\left(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right) = f_1^{-1}\left(]-\infty, a_1]\right) \cap f_2^{-1}\left(]-\infty, a_2]\right)$. Puisque

(a) $F^{-1}\left(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right) = f_1^{-1}\left(]-\infty, a_1]\right) \cap f_2^{-1}\left(]-\infty, a_2]\right)$.

(b) $f_1^{-1}\left(]-\infty, a_1]\right) \in \mathcal{F}$ car f_1 est une fonction mesurable de $(X, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ et $]-\infty, a_1] \in B_{\mathbb{R}}$ (Ici $]-\infty, a_1] \in B_{\mathbb{R}}$ car $]-\infty, a_1]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$)

(c) $f_2^{-1}\left(]-\infty, a_2]\right) \in \mathcal{F}$ car f_2 est une fonction mesurable de $(X, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ et $]-\infty, a_2] \in B_{\mathbb{R}}$.

(d) $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur X.

Ceci implique que $F^{-1}\left(]-\infty, a_1] \times]-\infty, a_2]\right) \in \mathcal{F}$.

3. *Conclusion :* On a

(a) $h = goF$.

(b) g est mesurable (hypothèse).

(c) F est mesurable.(d'aprés 2)

Alors h est mesurable

Rappel : La composition de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable.

Question 2 : *Appliquer le résultat de la question 1, pour montrer la mesurabilité des fonctions :* $f_1 + f_2,\ f_1 f_2, f_1 \wedge f_2 := \min(\ f_1, f_2)$ *et* $f_1 \vee f_2 = \max(\ f_1, f_2)$.

Réponse :

1. On a

   (a) $f_1 + f_2 = g(f_1, f_2)$ avec $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie comme suit $g(x, y) = x + y$.

   (b) f_1 et f_2 deux fonction réelles mesurables sur $(X, \mathcal{F})$ (hypothèse).

   (c) g est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^2$ (c'est une fonction polynôme).

   Ce qui implique, d'aprés la question 1, que $f_1 + f_2$ est mesurable.

2. Pour $f_1 f_2$: *Ind.* $f_1 f_2 = g(f_1, f_2)$ *avec* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie comme suit* $g(x, y) = xy$.

3. Pour $f_1 \wedge f_2 := \min(\ f_1, f_2)$: *Ind.* $f_1 \wedge f_2 := \min(\ f_1, f_2) = g(f_1, f_2)$ *avec* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie comme suit* $g(x, y) = \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

4. Pour $f_1 \vee f_2 := \max(\ f_1, f_2)$: *Ind.* $f_1 \vee f_2 := \max(\ f_1, f_2) = g(f_1, f_2)$ *avec* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie comme suit* $g(x, y) = \max(x, y) = \frac{1}{2}[x + y + |x - y|]$.

Question 3 : *Montrer la mesurabilité des fonctions :* f_1^{α} (Ici $\alpha \in \mathbb{N}^*$ quelconque) *et* $\frac{1}{f_1}$ *(Ici* f_1 *ne s'annule pas sur* X*).*

Réponse :

1. Pour f_1^{α} (Ici $\alpha \in \mathbb{N}^*$ quelconque) : *Montrons que pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^*$ *on a* f_1^{α} *est mesurable :* Utilisons le raisonnement par récurrence.

   (a) Pour $\alpha = 1$, on a $f_1^{\alpha} = f_1$ est une fonction mesurable (hypothèse).

   (b) On suppose que f_1^{α} est une fonction mesurable. Puisque f_1 est mesurable alors $f_1^{\alpha+1} = f_1^{\alpha} f_1$ est mesurable.

   (le produit de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable).

2. Pour $\frac{1}{f_1}$ (Ici f_1 ne s'annule pas sur X) : On a

   (a) $\frac{1}{f_1} = gof_1$ avec $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie comme suit $g(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable car c'est une fonction continue.

(c) $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

Alors $\frac{1}{f_1}$ est mesurable.

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Question : *Montrer que f' est Borélienne : Ind. Utiliser le résultat suivant : $f'(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Réponse : On a

1. f est mesurable de $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ (f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ est mesurable de $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ car $g_n(x) = nf\left(x + \frac{1}{n}\right) - nf(x)$ et les deux fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $nf\left(x + \frac{1}{n}\right)$ et $nf(x)$ sont mesurables de $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n \rightarrow \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f'(x)$.

   Ainsi f' est mesurable de $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$. Ainsi f' est Borélienne.

   (*Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables de E vers un espace métrique F et elle converge simplement vers une fonction f alors f est une fonction mesurable de E vers F.)*

Exercice 15

Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables.

Question 1 : *Soient $f : E \longrightarrow F$ une fonction mesurable et $A \in E$. Considérons la fonction $f_{/A} : (A, \mathcal{E} \cap A) \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ défini par $f_{/A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que la fonction $f_{/A}$ est mesurable.*

Réponse : Soit $V \in \mathcal{F}$. On a

$$\begin{aligned} f_{/A}^{-1}(V) \quad : \quad &= \left\{x \in A : f_{/A}(x) \in V\right\} = \{x \in A : f(x) \in V\} \\ &= f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{E} \cap A \text{ car } V \in \mathcal{F} \text{ et } f \text{ est mesurable.} \end{aligned}$$

Question 2 : *Soient $a \in F$ et $g : E \longrightarrow F$ défini par $g(x) = a$ pour tout $x \in E$. Montrer que la fonction g est mesurable.*

Réponse : Soit $V \in \mathcal{F}$. On a

$$g^{-1}(V) := \{x \in E : g(x) \in V\} = \{x \in E : a \in V\}.$$

Donc, si $a \in V$ alors $g^{-1}(V) = E \in \mathcal{E}$, si $a \notin V$ donc $g^{-1}(V) = \varnothing \in \mathcal{E}$.

Exercice 16

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction $f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$ par $f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| \leq \alpha, \\ \alpha \text{ si } f(x) > \alpha, \\ -\alpha \text{ si } f(x) < -\alpha. \end{cases}$

Question 1 : Montrer que pour tout $x \in X$ on a $f_\alpha(x) = sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha)$ où $sign(y)$ désigne le signe du nombre réel y.

Réponse : *Rappellons que* $sign(y) := \begin{cases} +1 \text{ si } y \geq 0, \\ -1 \text{ si } y < 0. \end{cases} = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \text{ si } y \neq 0, \\ +1 \text{ si } y = 0. \end{cases}$

Cas $|f(x)| \leq \alpha$: On distingue deux sous cas

Cas $|f(x)| = 0$: On a

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= f(x) = 0 \\ &\text{et} \\ sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha) &= sign(0) \min(0, \alpha) = 1 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $f_\alpha(x) = sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha)$.

Cas $|f(x)| \neq 0$: On a

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= f(x) \\ &\text{et} \\ sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha) &= \frac{f(x)}{|f(x)|} |f(x)| = f(x). \end{aligned}$$

Ainsi $f_\alpha(x) = sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha)$.

Cas $f(x) > \alpha$: D'une part, $f_\alpha(x) = \alpha$. D'autre part, puisque $\alpha > 0$ alors $f(x) > 0$. Ainsi

$$sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha) = (+1)\alpha = \alpha.$$

Ce qui implique que $f_\alpha(x) = sign(f(x)) \min(|f(x)|, \alpha)$.

Cas $f(x) < -\alpha$: De même.

Question 2 : En déduire, en utilisant deux méthodes, que f_α est mesurable.

Réponse :

Méthode 1 (En utilisant la définition de la mesurabilité) : Montrons que

$$\text{pour tout } V \in B_{\mathbb{R}} \text{ on a } f_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{E}.......(*)$$

Posons

$$A_1 = f^{-1}(]-\infty, -\alpha[), A_2 = f^{-1}([-\alpha, \alpha]) \text{ et } A_3 = f^{-1}(]\alpha, +\infty[).$$

Considérons les fonctions

$$f_{\alpha/A_i} : (A_i, \mathcal{E} \cap A_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}).$$

Ici, $\mathcal{E} \cap A_i = \{B \cap A_i : B \in \mathcal{E}\}$ est la $\sigma-$ algèbre induite (trace) de $\mathcal{E}$ sur A_i.

Remarque : D'une part, on a

1. A_1 est mesurable car $A_1 = f^{-1}(]-\infty, -\alpha[)$, f mesurable et $]-\infty, -\alpha[$ mesurable.

Aussi, A_2 et A_3 sont des ensembles mesurables.

2. f_{α/A_1} et f_{α/A_3} sont des fonctions mesurables car elles représentent des fonctions constantes ($f_{\alpha/A_1} = -\alpha$ et $f_{\alpha/A_3} = \alpha$).

3. f_{α/A_2} est une fonction mesurable car $f_{\alpha/A_2} = f_{/A_2}$ et $f_{/A_2}$ est mesurable (f est mesurable et A_2 est mesurable).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(]-\infty,-\alpha[\cup[-\alpha,\alpha]\cup]\alpha,+\infty[) \\ &= f^{-1}(]-\infty,-\alpha[) \cup f^{-1}([-\alpha,\alpha]) \cup f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} A_i. \end{aligned}$$

Revenons à la preuve de (*) : soit $V \in B_{\mathbb{R}}$. On a $f_\alpha^{-1}(V) = \overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} \left(\left(f_{\alpha/A_i}\right)^{-1}(V) \right)$ car

$$f_\alpha^{-1}(V) = X \cap f_\alpha^{-1}(V) = \left(\overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \right) \cap f_\alpha^{-1}(V) = \overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} \left(A_i \cap f_\alpha^{-1}(V) \right) = \overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} \left(\left(f_{\alpha/A_i}\right)^{-1}(V) \right).$$

Puisque $V \in B_{\mathbb{R}}$ et $f_{\alpha/A_i} : (A_i, \mathcal{E} \cap A_i) \longrightarrow (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ est mesurable alors $\left(f_{\alpha/A_i}\right)^{-1}(V) \in \mathcal{E} \cap A_i$. Ainsi,

$$f_\alpha^{-1}(V) = \overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} \left(\left(f_{\alpha/A_i}\right)^{-1}(V) \right) \in \overset{i=3}{\underset{i=1}{\cup}} (\mathcal{E} \cap A_i) \overset{A_i \in \mathcal{E}}{\subset} \mathcal{E}.$$

Ce qui implique que $f_\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{E}$.

Méthode 2 (En utilisant la question 1) : On a

1. $f_\alpha = sign(f) \min(|f|, \alpha)$.

2. $sign(f)$ est une fonction mesurable car $sign(y) = \begin{cases} +1 \text{ si } y \geq 0, \\ -1 \text{ si } y < 0. \end{cases}$ est une fonction croissante.

3. $\min(|f|, \alpha)$ est une fonction mesurable car c'est le min de deux fonction mesurable : la fonction constante α est mesurable et $|f|$ est mesurable (composition de deux fonctions mesurables f et la fonction valeur absolue $|.|$).

Donc f_α est mesurable.

Exercice 17

Question : Les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) suivantes sont elles Borélienne :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad g(x) = e^{\cos x} \text{ et } h(x) = 1_{\mathbb{Q}}.$$

Réponse :

1. Pour f : *Remarquons que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ (car elle n'est pas continue au point $(0,0)$).*

Rappellos que la limite simple, d'une suite de fonctions mesurables de E vers un espace métrique F, est une fonction mesurable de E vers F.

Considérons la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_n(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+\frac{1}{n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

a. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions mesurables car les fonctions f_n sont continues (f_n représente le quotient de deux fonctions continues -fonctions polynômes- et la fonction dénominateur est non nulle).

b. f est la limite (simple) de la suite de fonction (f_n) car

$$f_n(0,0) = \frac{0}{0+\frac{1}{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f_n(0,0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 = f(0,0)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+\frac{1}{n}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(x,y) \text{ pour } (x,y) \neq (0,0).$$

c. L'espace d'arrivé $\mathbb{R}$ est un espace métrique.

Donc f est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ alors f est Borélienne.

2. Pour g : Puisque g est continue alors elle est Borélienne. (*Rappel : Toute fonction continue est Borélienne).*

3. Pour h : Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable alors il est mesurable ainsi $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable de $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$. Ceci implique que h est Borélienne.

Exercice 18

Question : Les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) suivantes sont elles Borélienne : $f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ \frac{1}{x} \text{ si } x > 0. \end{cases}$ et $f_2(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0, \\ x^2 + 1 \text{ si } x > 0. \end{cases}$

Réponse :

1. **Pour** f_1 :Considérons les deux fonctions **mesurables** $f : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Soit $V \in B_{\mathbb{R}}$; Comme dans l'exercice 4, on montre que
$$f_1^{-1}(V) = ... = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V) \in ...... \in B_{\mathbb{R}}.$$

2. **Pour** f_2 : On a

   (a) $f_2 = f_2 1_{]-\infty,0]} + f_2 1_{]0,+\infty[} = x 1_{]-\infty,0]} + (x^2 + 1) 1_{]0,+\infty[}$.

   (b) Les fonctions x et $(x^2 + 1)$ sont mesurables car elles sont des fonctions continues.

   (c) Les fonctions $1_{]-\infty,0]}$ et $1_{]0,+\infty[}$ sont mesurables car $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ sont des ensembles mesurables.

   Donc f_2 est mesurable.

   Attention : *On a* $f_1 = f_1 1_{]-\infty,0]} + f_1 1_{]0,+\infty[}$ *mais* $f_1 1_{]0,+\infty[} \neq g 1_{]0,+\infty[}$ *car les domaines de définitions de* $f_1 1_{]0,+\infty[}$ *et* $g 1_{]0,+\infty[}$*sont différents. Donc, on ne peut pas étudier la mesurabilité de* f_1 *comme on a fait pour* f_2.

Exercice 19

Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $A, B \in \mathcal{F}$.

Question : *Calculer* $\int_A 1_B d\mu$ *et* $\int_X f d\mu$ *avec* $f(x) = \begin{cases} 3 \text{ si } x \in A, \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$

Réponse : On a

$$\int_A 1_B d\mu = \int_X 1_A 1_B d\mu = \int_X 1_{A\cap B} d\mu = \mu(A \cap B)$$

et

$$\int_X f d\mu = \int_X (3.1_A + 2.1_{A^c})\, d\mu = 3\int_X 1_A d\mu + 2\int_X 1_{A^c} d\mu = 3\mu(A) + 2\mu(A^c).$$

Exercice 20

Question 1 : *Calculer*

$$I_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} (1 - x^n)\, d\lambda,\ I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) d\lambda \text{ et } I_3 = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2+1} dx.$$

Réponse :

* **Pour** I_1 : On a

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction définie par $1 - x^n$ est une fonction **mesurable positive** sur $[0,1]$.

2. La suite de fonction $(1-x^n)_n$ est **croissante** sur $[0,1]$ car $1 - x^n \leq 1 - x^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. (Si $x \in [0,1]$ on a $x^n \geq x^{n+1}$)

3. Pour tout $x \in [0,1]$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - x^n) = 1$ p. p..

Ainsi, la suite de fonctions $(1-x^n)_n$ vérifie les conditions du th de la convergence monotone (Th de Beppo Levi). Donc

$$I_1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} (1 - x^n)\, d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} (1 - x^n)\, d\lambda = \int_{[0,1]} d\lambda = \lambda([0,1]) = 1 - 0 = 1.$$

* **Pour** I_2 : On a

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction définie par $\sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ est une fonction **mesurable** sur $]0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$ on a $\left|\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right| \leq 1$ et $g = 1$ est une fonction intégrable sur $]0,1]$ (car $\int_{]0,1]} |g|\, d\lambda = \int_{]0,1]} 1 d\lambda = \lambda\left(]0,1]\right) = 1 < \infty$).

3. Pour tout $x \in]0,1]$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) = 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $\left(\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right)_n$ vérifie les conditions du th de la convergence dominée. Donc

$$I_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) d\lambda = \int_{]0,1]} \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) d\lambda = \int_{]0,1]} 0 d\lambda = 0.$$

* **Pour** I_3 : On a

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction définie par $\frac{n^2+1}{n^2x^2+1}$ est une fonction **mesurable** sur $[1, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $\left|\frac{n^2+1}{n^2x^2+1}\right| \leq \frac{n^2+n^2}{n^2x^2} = \frac{2}{x^2}$ est $g = \frac{1}{x^2}$ est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$ car

$$I_3 = \int_1^{+\infty} |g|\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{2}{x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \left.\frac{-2}{x}\right|_1^M = 2 < \infty$$

3. Pour tout $x \in]0,1]$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2+1} = \frac{1}{x^2}$.

Ainsi, la suite de fonction $\left(\frac{n^2+1}{n^2x^2+1}\right)_n$ vérifie les conditions du th de la convergence dominée :

$$I_3 = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2+1} dx = \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2+1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2.$$

Question 2 : *Soit* (g_n) *une suite de fonction mesurable positive qui converge simplement vers* g*. Montrer que s'il existe* $M > 0$ *tel que* $\int g_n d\mu \leq M$ *alors* $\int g d\mu \leq M$.

Réponse : On a $g = \lim_{n \to +\infty} g_n = \liminf g_n$ alors

$$\begin{aligned}
\int g d\mu &= \int \liminf g_n d\mu \\
&\leq \liminf \int g_n d\mu \text{ d'après le lemme de Fatou} \\
&\leq \liminf M \text{ car } \int g_n d\mu \leq M.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int g d\mu \leq M.$$

Exercice 21

Question 1 : *On considère la fonction g définie par $g(x) = x$. Montrer que $g \in L^1[0,1]$. Puis, calculer $\int_{[0,1]} g d\lambda$.*

Réponse : *Rappellons que $L^1[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{[0,1]} |f| \, d\lambda < \infty \right\}$ l'ensemble des fonctions intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$ (les fonctions intégrables par la mesure de Lebesgue).*

Rappellons, aussi que toute fonction g intégrable au sens de Riemann sur un intervalle bornée fermé $[a,b]$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ et on a $\underbrace{\int_{[a,b]} g d\lambda}_{Lebesgue} = \underbrace{\int_a^b g(x) \, dx}_{Rimann}.$

Puisque la fonction g est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ (car c'est une fonction continue sur $[0,1]$) alors elle est intégrable au sens de Lebesgue. Ainsi, $g \in L^1[0,1]$. En plus,

$$\int_{[0,1]} g d\lambda = \int_0^1 g(x) \, dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Question 2 : *Donner un exemple d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue et elle n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

Réponse : Considérons la fonction $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$:

* La fonction $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$ car

$$0 \leq \int_{[0,1]} \left|1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\right| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} d\lambda = \lambda\left(\mathbb{Q}\cap[0,1]\right) \underset{\lambda \text{ mesure}}{\overset{\mathbb{Q}\cap[0,1]\subset\mathbb{Q}}{\leq}} \lambda\left(\mathbb{Q}\right) = 0.$$

Donc,

$$\int_{[0,1]} \left|1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\right| d\lambda = 0 < \infty.$$

* En utilisant la définition de l'intégrale de Riemann, on peut montrer que la fonction $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ (Voir Analyse 1).

Interrogation (2016/2017)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques

3 ème année Maths **Mesure et intégration**

1. Donner la définition de :

   (a) $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur E.

   (b) La tribus Borèlienne sur un espace topologique E.

   (c) f est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$.

   (d) A est un ensemble mesurable de $(E, \mathcal{E})$.

2. Justifier ce qui suit :

   (a) $]a, b[\in B_{\mathbb{R}}$. Ici $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $\{a\} \in B_{\mathbb{R}}$. Ici $a \in \mathbb{R}$.

   (c) Les fonctions $1_{]1,2]}$ et $1_{[3,4[}$ sont mesurables. Précisez l'espace mesurable de départ et d'arrivé de chaque fonction.

Correction

1. Voir cours : **1pt pour chaque définition (définition complète)**

2. *Rappel : Soit E un* ***espace topologique*** *c'est à dire E est muni d'une* ***topologie*** *$\mathcal{T}$ (Voir la définition de la topologie). Les élements de la topologie $\mathcal{T}$ s'appellent des* ***ouverts de*** *E. Par définition, un ensemble U de E est un* ***fermé*** *de E si $U^c \in \mathcal{T}$.*

   La tribus de Borel sur E contient les ouverts et les fermés de E (Pourquoi).

   Rappelons aussi que la tribus de Borel $B_{\mathbb{R}}$ contient tout les intervalles de $\mathbb{R}$ (Pourquoi)

Justification :

(a) $]a, b[\in B_{\mathbb{R}}$? $(1pt)$

Méthode 1 : $]a, b[\in B_{\mathbb{R}}$ car $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Méthode 2 : $]a, b[\in B_{\mathbb{R}}$ car $]a, b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(b) $\{a\} \in B_{\mathbb{R}}$ car $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ *(Ici* $\{a\}^c =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *car l'union de deux ouverts et un ouvert)*

(c) On a $\underbrace{]1,2] \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}}_{(0{,}25pt)}$ alors $\underbrace{]1,2] \in B_{\mathbb{R}}}_{(0{,}5pt)}$. Ainsi, la fonction $1_{]1,2]}$ est mesurable. En plus, on a $\underbrace{1_{]1,2]} : (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})}_{(0{,}25pt)}$.

De même, pour $1_{[3,4[}$.

Interrogation (29 Janvier 2018)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques

3 ème année Maths **Mesure et Intégration**

Sujet 1

1. **Justifier ce qui suit**

   (a) $\{a, b\} \in B_{\mathbb{R}}$. Ici, $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $\mathcal{G} := \{\{2018, \triangle\}, \{\triangle\}, \{\triangle, \square\}, \varnothing\}$ n'est pas une $\sigma-$ algèbre sur $X := \{2018, \triangle, \square\}$.

2. Soient $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable et μ_1, μ_2 deux mesures positives sur $(X, \mathcal{F})$. On pose $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

   (a) **Que veut dire** $(X, \mathcal{F})$ est un espace mesurable.

   (b) **Montrer** que μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.

Sujet 2

1. **Justifier ce qui suit**

   (a) $\mathbb{Q} \in B_{\mathbb{R}}$.

(b) $\mathcal{G} := \{\{2018, \triangle, \square\}, \{\triangle\}, \varnothing\}$ n'est pas une $\sigma-$ algèbre sur $X := \{2018, \triangle, \square\}$.

2. Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $a \in \mathbb{R}$. On pose $\lambda = a\mu$.

   (a) **Que veut dire** $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré.

   (b) **Montrer** que λ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.

Sujet 3

1. **Justifier ce qui suit**

   (a) $\varnothing \in B_{\mathbb{R}}$.

   (b) $\mathcal{G} := \{\{2018, \triangle, \square\}, \{\triangle\}, \{\square\}, \{2018, \square\}, \{2018, \triangle\}, \varnothing\}$ n'est pas une $\sigma-$ algèbre sur $X := \{2018, \triangle, \square\}$.

2. Soient $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et μ_1, μ_2 deux mesures positives sur $(X, \mathcal{F})$. On pose $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$.

   (a) **Que veut dire** $(X, \mathcal{F})$ est un espace mesurable.

   (b) **Montrer** que μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.

Correction

Sujet 1

1. On a

   (a) **(1 pt)** $\{a, b\} \in B_{\mathbb{R}}$ **car** $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ avec $\{a\}, \{b\} \in B_{\mathbb{R}}$ et $B_{\mathbb{R}}$ est une $\sigma-$algèbre sur $\mathbb{R}$.

   (b) **(1 pt)** $\mathcal{G} := \{\{2018, \triangle\}, \{\triangle\}, \{\triangle, \square\}, \varnothing\}$ n'est pas une $\sigma-$ algèbre sur $X := \{2018, \triangle, \square\}$ **car** $X = \{2018, \triangle, \square\} \notin \mathcal{G}$.

2. .

   (a) **(0,5 pt)** $(X, \mathcal{F})$ est un espace mesurable veut dire que $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur l'ensemble non vide X.

(b) D'une part, on a $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ avec

$$\begin{aligned}\mu(\varnothing) &= (\mu_1+\mu_2)(\varnothing) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} \mu_1(\varnothing)+\mu_2(\varnothing)\\ &\overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} 0+0 \text{ car } \underbrace{\mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ mesures sur } (X,\mathcal{F})}_{\textbf{(0,25pt)}}.\\ &\overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} 0\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\underbrace{(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F} \text{ disjoints deux à deux.}}_{\textbf{(0,25 pt)}}$ On a

$$\begin{aligned}\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) &= (\mu_1+\mu_2)\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right)\\ &\overset{\textbf{(0,5 pt)}}{=} \mu_1\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right)+\mu_2\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) \text{ (Somme de deux applications)}\\ &\overset{\textbf{(0,5 pt))}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu_1(A_i)+\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu_2(A_i) \text{ car } \underbrace{\mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ mesures sur } (X,\mathcal{F})}_{\textbf{(0,25 pt)}}\\ &\overset{\textbf{(0,25 pt)}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}(\mu_1+\mu_2)(A_i) \overset{\textbf{(0,25 pt)}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu(A_i).\end{aligned}$$

Remarque : *On peut prendre* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *ou bien* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Sujet 2

1. On a

   (a) **(1 pt)** $\mathbb{Q} \in B_{\mathbb{R}}$ **car** $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$.

   (b) **(1 pt)** $\mathcal{G}\colon = \{\{2018, \triangle, \square\}, \{\triangle\}, \varnothing\}$ n'est pas une $\sigma-$ algèbre sur $X := \{2018, \triangle, \square\}$ **car** $A = \{\triangle\} \in \mathcal{G}$ mais $A^c = \{\triangle\}^c = \{2018, \square\} \notin \mathcal{G}$.

2. .

   (a) **(0,5 pt)** $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré veut dire que $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur l'ensemble non vide X et μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.

(b) D'une part, on a $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ avec

$$\begin{aligned}
\lambda(\varnothing) &= (a\mu)(\varnothing) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} a\mu(\varnothing) \\
&\overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} a.0 \text{ car } \underbrace{\mu \text{ est une mesure positive sur } (X,\mathcal{F})}_{\textbf{(0,25pt)}}. \\
&\overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\underbrace{(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F} \text{ disjoints deux à deux.}}_{\textbf{(0,25 pt)}}$ On a

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) &= (a\mu)\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) \\
&\overset{\textbf{(0,5 pt)}}{=} a.\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) \text{ (Produit d'un scalaire par une application)} \\
&\overset{\textbf{(0,5 pt))}}{=} a\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu(A_i) \text{ car } \underbrace{\mu \text{ est une mesure positive sur } (X,\mathcal{F})}_{\textbf{(0,25 pt)}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}^*} a.\mu(A_i) \overset{\textbf{(0,25 pt)}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}(a\mu)(A_i) \overset{\textbf{(0,25 pt)}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\lambda(A_i).
\end{aligned}$$

Sujet 3

1. On a

   (a) **(1 pt)** $\varnothing \in B_{\mathbb{R}}$ **car** $\varnothing =]a,a[$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

   (b) **(1 pt)** $\mathcal{G}: = \{\{2018,\triangle,\square\},\{\triangle\},\{\square\},\{2018,\square\},\{2018,\triangle\},\varnothing\}$ n'est pas une $\sigma-$ algèbre sur $X := \{2018,\triangle,\square\}$ **car** $A_1 = \{\triangle\} \in \mathcal{G}$ et $A_2 = \{\square\} \in \mathcal{G}$ mais $A_1 \cup A_2 = \{\triangle,\square\} \notin \mathcal{G}$.

2. .

   (a) **(0,5 pt)** $(X,\mathcal{F})$ est un espace mesurable veut dire que $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre sur l'ensemble non vide X.

(b) D'une part, on a $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ avec

$$\begin{aligned}
\mu(\varnothing) &= (a_1\mu_1 + a_2\mu_2)(\varnothing) \overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} a_1\mu_1(\varnothing) + a_2\mu_2(\varnothing) \\
&\overset{\textbf{(0,5pt)}}{=} a_1.0 + a_2.0 \text{ car } \underbrace{\mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ sont des mesures sur } (X, \mathcal{F})}_{\textbf{(0,25pt)}}. \\
&\overset{\textbf{(0,25pt)}}{=} 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\underbrace{(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F} \text{ disjoints deux à deux.}}_{\textbf{(0,25 pt)}}$ On a

$$\begin{aligned}
\mu\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) &= (a_1\mu_1 + a_2\mu_2)\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) \\
&\overset{\textbf{(0,5 pt)}}{=} a_1\mu_1\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) + a_2\mu_2\left(\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} A_i\right) \\
&\overset{\textbf{(0,5 pt)}}{=} a_1\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu_1(A_i) + a_2\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu_2(A_i) \text{ car } \underbrace{\mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ mesures sur } (X, \mathcal{F})}_{\textbf{(0,25 pt)}} \\
&\overset{\textbf{(0,25 pt)}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}(a_1\mu_1 + a_2\mu_2)(A_i) \\
&\overset{\textbf{(0,25 pt)}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}^*}\mu(A_i).
\end{aligned}$$

Devoir (Décembre 2017)

Université de Batna 2, Département de Mathématiques

3 ème Année Licence Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\sigma-$ algèbre sur un ensemble non vide X.

Question 1 : Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est une $\sigma-$ algèbre sur X.

Réponse :

1. *Montrons que* $X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$: Puisque $\underbrace{\mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \text{ sont deux } \sigma - \text{algèbre sur } X}_{(0,25pt)}$ alors $\underbrace{X \in \mathcal{F} \text{ et } X \in \mathcal{G}}_{(0,25pt)}$. Ainsi $\underbrace{X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$

2. *Montrons que* $\forall A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}, A^c \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$: Soit $\underbrace{A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.}$ Alors $\underbrace{A \in \mathcal{F} \text{ et } A \in \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$

Puisque $\underbrace{\mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \text{ sont deux } \sigma\text{-algèbre sur } X}$ alors $\underbrace{A^c \in \mathcal{F} \text{ et } A^c \in \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$ Ainsi $\underbrace{A^c \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$

3. *Montrons que* $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}, \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$: Soit $\underbrace{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.}$ Donc,

$\underbrace{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \text{ et } (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$ Puisque $\underbrace{\mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \text{ sont deux } \sigma - \text{algèbre sur } X}$ alors

$\underbrace{\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F} \text{ et } \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$ Ainsi $\underbrace{\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.}_{(0,25pt)}$

Remarque : *On peut écrire la proposition* $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset F \cap G, \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in F \cap G$ *par*

$$\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}}, \left((A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\right) \Longrightarrow \left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\right)$$

ou bien

$$\forall A_i, (A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\right).$$

Question 2 : Que peut on dire sur $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ (Justifier).

Réponse : $\underbrace{\text{On ne peut rien dire sur } \mathcal{F} \cup \mathcal{G}}_{(0,25pt)}$ car elle peut être une $\sigma-$algèbre sur X comme elle ne peut pas être :

Exemple 1 : Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \mathcal{G}$. Puique $\mathcal{G}$ est une $\sigma-$algèbre sur X alors $F \cup G$ **est une** $\sigma-$**algèbre sur** X.

Exemple 2 $(0,5pt)$ **:** On prend $X = \{0,1,2,3\}$ puis on considère les deux $\sigma-$ algèbre sur X comme suit $\mathcal{F} = \{X, \{0\}, \{1,2,3\}, \varnothing\}$ et $\mathcal{G} = \{X, \{1\}, \{0,2,3\}, \varnothing\}$. On a $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{X, \{0\}, \{1\}, \{1,2,3\}, \{0,2,3\}, \varnothing\}$. Donc $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ **n'est pas une** $\sigma-$**algèbre sur** X car si on considère $A_1 = \{0\} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ et $A_2 = \{1\} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ mais $A_1 \cup A_2 = \{0,1\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

Question : Pourquoi $\mathcal{F} = \{X, \{0\}, \{1,2,3\}, \varnothing\}$ et $\mathcal{G} = \{X, \{1\}, \{0,2,3\}, \varnothing\}$ sont des $\sigma-$ algèbre sur X.

Remarque : *Dans le cas où l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie et on veut montrer qu'on ne peut rien dire sur $Q \Longrightarrow P$. Il suffit de donner un exemple où cette implication n'est* *pas vérifiée.*

....

Exposé :

Définition de la $\sigma-$ algèbre Borelienne sur $\mathbb{R}$ $(0,25pt)$. Définition de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ $(0,25pt)$. **Trois** propriétés au moin de la $\sigma-$ algèbre Borelienne sur $\mathbb{R}$ $(0,25pt)$. **Trois** propriétés au moin de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ $(0,25pt)$.

DEVOIR (2018)

A rendre après les vacances d'hiver

Donner la définition et les propriétés de l'intégrale par une mesure d'une fonction mesurable $\int_X f d\mu$ dans le cas où f est une fonction étagées mesurable positive, f est une fonction mesurable positive (Ils existent deux définitions équivalentes) et f est une fonction mesurable quelconque.

Enoncer le théorème de la convergence monotone, le lemme de Fatou et le théorème de la convergence dominée.

Référence sur internet : *Théorie de la mesure et de l'intégration, THIERRY GALLARY.*