Chapitre 4

Stabilité

4.1 Définitions

Considérons le système

$$X' = f(X) \tag{EA}$$

On suppose que $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction qui vérifie les conditions de Cauchy Lipschitz. Soient $t_0 \in I$ et $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre de (EA) c. à dire $f\left(\overline{X}\right) = 0$.

Définition 4.1.1 *On dit que $\overline{X}$ est stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X_0 : \left(\left\|X_0 - \overline{X}\right\| < \delta\right) \Longrightarrow \left(\left\|X(t, t_0, X_0) - \overline{X}\right\| < \varepsilon \textit{ pour tout } t \in I\right).$$

Ici $X(., t_0, X_0)$ est la solution de $\begin{cases} X' = f(X), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$

Définition 4.1.2 *On dit que $\overline{X}$ est asymptotiquement stable si*

1. *$\overline{X}$ est stable.*

2. Il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall X_0 : \left\| X_0 - \overline{X} \right\| < \beta \Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} X(t, t_0, X_0) = \overline{X}.$$

Définition 4.1.3 *On suppose que $f(0) = 0$ (C. à dire l'origine est un point d'équilibre de (EA)). Le système (EA) est stable (resp. asymptotiquement stable) veut dire que l'origine est stable (resp. asymptotiquement stable).*

4.2 Théorèmes de stabilité

Théorème 4.2.1 ***(Méthode de Liapunov)*** *On suppose que $f(0) = 0$ et il existe une fonction V de classe C^1 telle que $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec U un voisinage de 0, $V(0) = 0$ et $V(X) > 0$ pour tout $X \neq 0$.*

1. *Si $V'(X) := \frac{d}{dt}(V(X)) \leq 0$ pour toute solution X non nulle de (EA) alors 0 est stable.*
2. *Si $V'(X) < 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est asymptotiquement stable.*
3. *Si $V'(X) > 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est instable (n'est pas stable).*

Application : Utilisons la méthode de Liapunov pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$ Considérons la fonction suivante : $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ pour tout $(x_1, x_2) \neq$