Université Batna 2, Département de Mathématiques
3ème année Licence Mathématiques
Module: Introduction à la théorie des opérateurs linéaires bornés
2020/2021

Rattrapage

Partie 1 (4 pts)

1. Soit X un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. Que représente X^*.
2. Donner la définition d'un opérateur surjectif.
3. Citer deux propriétés d'un opérateur linéaire borné.

Partie 2 (8 pts)
Considérons $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tout les polynômes à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante

$$\|a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\| = \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_n|\}.$$

1. Considérons la suite des polynômes (P_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $P_n = x^n$. Calculer $\|P_n\|$.
2. Considérons l'opérateur linéaire

$$A : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longmapsto AP = P(3).$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $|AP_n|$.
   (b) Déduire que A est un opérateur non borné.

Partie 3 (8 pts)

1. Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) défini sur $l_2(\mathbb{R})$ par

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, ...) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R}).$$

   Montrer que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul.
2. Par deux manières, montrer que (A_n) converge ponctuellement vers l'opérateur nul.

Correction

Partie 1

1. $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{k})$ le dual de X. 1
2. $A : X \longrightarrow Y$ est un opérateur injectif si
$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = Ax. \quad 1$$
3. Un opérateur borné est un opérateur continue et Lipscitzien. 2

Partie 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\|P_n\| = 1.$ 2
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|AP_n| = 3^n.$ 2
3. On suppose que A est borné alors 1
$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : |AP_n| \leq M \|P_n\|. \quad 1$$
Donc
$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : 3^n \leq M.1 = M. \quad 1$$
Contradiction avec (3^n) est une suite réelle non bornée. 1

Partie 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| = \sup_{0 \neq (x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_2(\mathbb{R})} \frac{\|A_n(x_1, x_2, \ldots)\|}{\|(x_1, x_2, \ldots\ldots)\|}$$
$$= \frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
1 1 1

2. **Manière 1:** Puisque (A_n) converge uniformément vers l'opérateur nul alors elle converge poctuellement vers 0. 2

Manière 2: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, \ldots\ldots) \in l_2(\mathbb{R})$, on a
$$\|A_n(x_1, x_2, \ldots\ldots) - 0(x_1, x_2, \ldots\ldots)\| = \left\| \frac{n}{n^2+1}(x_1, x_2, \ldots) \right\|$$
$$= \frac{n}{n^2+1} \|(x_1, x_2, \ldots)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
1 1 1