Stabilité d'un point d'équilibre différent de l'origine (Méthode de linéairisation 2)

.

.

Lemme : Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre non nul du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y). \end{cases} \quad .... \left(Sys_{(x,y)}\right)$$

On considère le changement de variable $u = x - \overline{x}$ et $v = y - \overline{y}$. On considère le système associé à (u, v) donné par

$$\begin{cases} u^{'} = g_1(u, v), \\ v^{'} = g_2(u, v). \end{cases} \quad ....(Sys_{(u,v)})$$

On a

$$Dg(0, 0) = Df(\overline{x}, \overline{y}).$$

Application : Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x+1) = f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = x(y^3+1) = f_2(x, y). \end{cases} \quad .... \left(Sys_{(x,y)}\right)$$

Etudions la stabilité de $(-1, -1)$: On a

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y(x+1)) & \frac{\partial}{\partial y}(y(x+1)) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x(y^3+1)) & \frac{\partial}{\partial y}(x(y^3+1)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y & x+1 \\ y^3+1 & 3xy^2 \end{pmatrix},$$

alors

$$Df\,(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propre de $Df\,(-1,-1)$ sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -3$. Puisque $\operatorname{Re}\lambda_1 = -1 < 0$ et $\operatorname{Re}\lambda_2 = -3 < 0$ alors toutes les valeurs propre de $Df\,(-1,-1)$ ont une partie réelle strictement négative alors $(-1,-1)$ est asymptotiquement stable pour le système $(Sys_{(x,y)})$.