Université Batna 2
Département de Mathématiques
EDO Master (Mathémaiques Appliquées)
Chapitre 1: Rappel

Exercice 1

1. Montrer que la fonction y définie sur $J=\mathbb{R}$ par $y(t)=e^{-4t}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'}=-4y$. Est ce que c'est une solution maximale. (Justifier)

2. Montrer que la fonction y définie sur $J=]-\infty,-1[$ par $y(t)=\frac{1}{t+1}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'}=-y^2$ car $\lim\limits_{t\overset{<}{\longrightarrow}-1} y(t)=\lim\limits_{t\overset{<}{\longrightarrow}-1}\frac{1}{t+1}=-\infty$.

3. Montrer que la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est une solution globale de l'équation $y^{'}=y$ car elle est une solution définie sur tout $I=\mathbb{R}$. Est ce que c'est une solution maximale. (Justifier)

Exercice 2

Considérons l'équation

$$y'=t^2+y^2+\cos^2(y+1)\,......(E)$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution maximale qui vérifie $y(0)=1$.
Notons z cette solution et J son intervalle de définition.
2. Justifier que z est de classe $C^4(J)$.
3. Montrer que z est monotone sur J et positive sur $J_+=\{t\in J : t\geq 0\}$.

Exercice 3

Soit $y_0\in\mathbb{R}$. Considérons l'équation

$$y'=-y^4-t^2y^2\,.................(E)$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution maximale qui vérifie $y(0)=y_0$.
Notons φ cette solution et J son intervalle de définition.
2. Montrer que si $y_0=0$ alors $\varphi=0$.
3. Montrer que φ est monotone sur J.
4. On prend $y_0=1$. Montrer que $\varphi\leq 1$ sur $J_+=\{t\in J : t\geq 0\}$.

Exercice 4

Considérons le problème

$$\begin{cases} y'=t^2+y^2+y^4, \\ y(0)=0. \end{cases}\quad ....(PC)$$

1. Montrer que (PC) admet une unique solution maximale.
Notons φ cette solution et J son intervalle de définition.
2. Justifier que $J=]S,T[$ avec $-\infty\leq S<0<T\leq+\infty$.
3. Considérons la fonction définie par $\psi(t)=-\varphi(-t)$ pour tout $t\in]-T,-S[$. Montrer que ψ est une solution de (PC).
4. Déduire que $S=-T$ et que φ est une fonction impaire. *(Indication: Utiliser le faite que φ est maximale).*

CORRIGE

Solution 1:

1. La fonction y définie sur $J=\mathbb{R}$ par $y(t)=e^{-4t}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'}=-4y$ car c'est une solution (a le faire) et elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle de définition maximale.

2. La fonction y définie sur $J=]-\infty,-1[$ par $y(t)=\frac{1}{t+1}$ est une solution maximale de l'équation $y^{'}=-y^2$ car c'est une solution (a le faire) et $\lim\limits_{t\overset{<}{\longrightarrow}-1} y(t)=\lim\limits_{t\overset{<}{\longrightarrow}-1}\frac{1}{t+1}=-\infty$.

3. La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est une solution globale de l'équation $y^{'}=y$ car c'est une solution (a le faire) et elle est une solution définie sur tout $I=\mathbb{R}$. Oui c'est une solution maximale car c'est solution globale.

Solution 2:

1. On a

$$\text{la fonction } f \text{ définie par } f(t,y) = t^2 + y^2 + \cos^2(y+1) \text{ est de classe } C^1\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Alors

– f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

– f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution maximale qui vérifie $y(0) = 1$.

2. On a

$$f \in C^3\left(\mathbb{R}^2\right)$$

alors $z \in C^4(J)$.

3. On a

$$z' = t^2 + z^2 + \cos^2(z+1) \geq 0 \text{ pour tout } t \in J$$

alors z est croissante, donc z est monotone.

* Soit $t \in J_+$ alors $t \geq 0$. Puisque z est croissante alors

$$z(t) \geq z(0) = 1 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in J_+$ on a $z(t) \geq 0$. Ceci implique que z est positive sur J_+.

Solution 3:

1. On a

$$\text{La fonction } f \text{ définie par } f(t,y) = -y^4 - t^2y^2 \text{ est de classe } C^1\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Alors

– f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

– f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution maximale qui vérifie $y(0) = y_0$.

2. On remarque que

$$\text{la fonction nulle } \psi = 0 \text{ est aussi une solution maximale de } (E) \text{ qui vérifie } \psi(0) = 0 = y_0.$$

Donc, de l'unicité de la solution maximale, on trouve que $\varphi = \psi$. Ainsi $\varphi = 0$.

3. On a

$$\varphi' = -\varphi^4 - t^2\varphi^2 \leq 0 \text{ pour tout } t \in J$$

alors φ est décroissante, donc φ est monotone.

4. Soit $t \in J_+$ alors $t \geq 0$. Puisque φ est décroissante alors

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) = y_0 = 1.$$

Ainsi, pour tout $t \in J_+$ on a $\varphi(t) \leq 1$.

Solution 4:

1. On a

$$\text{La fonction } f \text{ définie par } f(t,y) = t^2 + y^2 + y^4 \text{ est de classe } C^1\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Alors

– f est localement Lipschitzienne, par rapport à y uniformément par rapport à t, sur $\mathbb{R}^2$.

– f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

.

2. Puisque φ est une solution maximale alors son intervalle de définition est ouvert de la forme $J = \left]S, T\right[$ avec $S < T$. Puisque $0 = t_0 \in J = \left]S, T\right[$ alors $S < 0 < T$.

3. D'une part pour tout $t \in \left]-T, -S\right[$ (donc $-t \in \left]S, T\right[$)

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= (-\varphi(-t))' = \varphi'(-t) = (-t)^2 + \varphi^2(-t) + \varphi^4(-t) \\
&= t^2 + (\varphi(-t))^2 + (\varphi(-t))^4 = t^2 + (-\varphi(-t))^2 + (-\varphi(-t))^4 \\
&= t^2 + (\psi(t))^2 + (\psi(t))^4.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\psi(0) = -\varphi(-0) = -\varphi(0) = 0.$$

Ainsi ψ est une solution de (PC).

.

4. Puique ψ est une solution de (PC) sur $]-T,-S[$ et φ est une solution maximale de (PC) sur $]S,T[$. Alors, $]-T,-S[\subset]S,T[$ et $\varphi = \psi$ sur $]-T,-S[$.

.

* $]-T,-S[\subset]S,T[$ implique que $S \leq -T < -S \leq T$. Cela donne $-T \leq S \leq -T$. Ainsi $S = -T$.

.

* Puisque $\varphi = \psi$ sur $]-T,-S[=]-T,T[$ alors pour tout $t \in]-T,T[$ on a $\varphi(t) = \psi(t)$. Ceci implique que $\varphi(t) = -\varphi(-t)$ pour tout $t \in]-T,T[$. Donc, φ est impaire.