Université de Batna 2, Département de Mathématiques
3 Année Licence Mathématiques
Travaux Dirigés ***(Suite)*****:** *Equations Différentielles Ordinaires*

.

.

.

Exercice 5

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide, $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Considérons le système (E) suivant $Y' = A(t)Y + B(t)$. Soient (H) le système homogène associé à (E) et S_H l'ensemble des solutions de (H).

Soit Y_p une solution de (E). Montrer que l'ensemble des solutions de (E), noté S_E, est donné par $S_E = S_H + Y_p$.

.

Exercice 6

Questions de cours: Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide et $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de la matrice résolvante *(ou brièvement, la résolvante)* du système $Y' = A(t)Y......(H)$. Quelle est la relation qui existe entre la résolvante de (H) et la solution du système $\begin{cases} Y' = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$ .... $(H.D.)$. Ici, $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculer la résolvante du système $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2. \end{cases}$

.

.

Exercice 7

Questions de cours: Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide, $t_0 \in I$ et $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ des fonctions vectorielles définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Donner la définition de l'indépendance linéaire de $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Puis, la définition de l'indépendance linéaire de $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$.

1. Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $Y_1(t_0), Y_2(t_0), ..., Y_n(t_0)$ sont L. I alors $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I.
2. Montrer que si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont L. I alors on ne peut rien dire sur l'indépendance linéaire de $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. (*Indication: Considérer* $n = 2, Y_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $t_0 = 2$ et $t_1 = 1$.)
3. Montrer que si $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont des solutions d'un système $Y' = A(t)Y$ et qui sont L. I. alors pour tout $t \in I$ on a $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_n(t)$ sont L. I..

.

Exercice 8

Considérons le système $\begin{cases} y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + e^t y_2), \\ y_2' = \frac{1}{2}(e^{-t} y_1 - y_2). \end{cases}$

1. Ecrire ce système sous la forme (H).
2. On pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (H).
3. Trouver l'ensemble S_H.

.

Exercice 9

Considérons le système $Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y$.

1. Montrer que $R(t,t_0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{t-t_0} & e^t - e^{t_0} \\ e^{-t_0} - e^{-t} & 1+e^{t_0-t} \end{pmatrix}$ pour tout $t, t_0 \in I = \mathbb{R}$.
2. Résoudre les systèmes $Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y$ et $Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.
3. Utiliser deux méthodes pour résoudre les systèmes

$$\begin{cases} Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exercice 10

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 11

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$e^{\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix}.$$

Application: Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Résoudre les systèmes suivants:

1. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$
2. $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix}$.
3. $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y, \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$