Université de Batna 2, Département de Mathématiques
3 Année Licence Mathématiques
Travaux Dirigés: *Introduction à la Théorie des Opérateurs Linéaires*
2020/2021

.
.

Exercice 1 Considérons l'opérateur linéaire $A : (R[X], \|.\|) \to \mathbb{R}$ avec $AP = P(2)$. Montrer que A est non borné.

....

Exercice 2 Montrer que l'opérateur $A : (l_2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \to (l_2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...) \text{ pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$$

est linéaire borné. Puis, calculer sa norme.

....

Exercice 3 Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de l'opérateur linéaire définit sur $l_2(\mathbb{C})$ par

$$A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, x_3, x_4, ...) \text{ pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C}).$$

....

Exercice 4 Est ce que l'opérateur linéaire borné $A : (l_2(\mathbb{R}), \|.\|_2) \to (l_2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ avec

$$A(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, 0, ...) \text{ pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{R})$$

est auto adjoint.

....

Exercice 5 Considérons la suite d'opérateurs linéaires bornés (A_n) définie sur $l_2(\mathbb{C})$ par

$$A_n(x_1, x_2, ...) = \frac{1}{n}(x_1, x_2, ...) \text{ pour tout } (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{C}) \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Utiliser la définition de la norme d'opérateurs canonique pour calculer $\|A_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier la convergente uniforme de (A_n) vers l'opérateur nul.
3. Par deux manières, Etudier la convergence ponctuelle de (A_n).