Théorème de stabilité de Liapunov

Considérons le système autonome suivant : $X^{'} = f(X)$ ....(EA)

Théorème : (Méthode de Liapunov) On suppose que $f(0) = 0$ et il existe une fonction V de classe C^1 telle que $V : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec U un voisinage de 0, $V(0) = 0$ et $V(X) > 0$ pour tout $X \neq 0$.

1. Si $V^{'}(X) := \frac{d}{dt}(V(X)) \leq 0$ pour toute solution X non nulle de (EA) alors 0 est stable.

2. Si $V^{'}(X) < 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est asymptotiquement stable.

3. Si $V^{'}(X) > 0$ pour toute solution non nulle de (EA) alors 0 est instable (n'est pas stable).

Application : Utilisons la méthode de Liapunov pour étudier la stabilité du système $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$ Considérons la fonction suivante : $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. D'une part, on a $V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ pour tout $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. D'autre part, pour toute solution $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} V^{'}(x_1, x_2) \quad : \quad &= \frac{d}{dt}(V(x_1, x_2)) = \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ &= 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2x_1\left(x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) \\ &= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 > 0 \text{ car } (x_1, x_2) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Ainsi, l'origine (le système) est instable.

Remarque : On peut calculer $V^{'}(x_1, x_2)$ comme suit

$$\begin{aligned} V^{'}(x_1, x_2) \quad : \quad &= \frac{d}{dt}(V(x_1, x_2)) = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt}\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ &= \left(x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)2x_1 + \left(-x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)2x_2 \\ &= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2. \end{aligned}$$