Théorème de stabilité pour les systèmes linéaires

.

.

Théorème Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système $X' = AX$ est asymptotiquement stable Ssi toutes les valeurs propre de A ont une partie réelle strictement négative.

2. S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$ alors le système $X' = AX$ est instable.

.

.

Application : Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases} ....(EA)$$

Le système (EA) s'écrit sous la forme

$$X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rappel : Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les élements de la diagonale.

Ainsi, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

On a $\operatorname{Re}\lambda_1$ et $\operatorname{Re}\lambda_2$ sont strictement négatives. C. à dire toutes les valeurs propres de A ont une partie réelles strictement négatives. Ceci implique que le système (EA) est asymptotiquement stable.