

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Méth. Num. pour les EDOs et EDPs
Mme. Hanachi Adalet
2019-2020

CORRIGÉ TYPE D'EXAMEN FINAL
3^{ÈME} ANNÉE LICENCE

Solution d'exercice 1. (12points) Considérons le schéma suivant :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + ah, x_n + ahf(t_n, x_n)); \text{ où } t_n = nh \text{ et } h = \frac{T}{N}. \quad (0.0.1)$$

- L'étude de la stabilité, la consistance et l'ordre du schéma (0.0.1).

Du schéma (0.0.1), on trouve $\phi(t, x, h) = f(t + ah, x + ahf(t, x))$ **1point**

1. La Stabilité. Rappelons que le schéma (0.0.1) est stable ssi ϕ est Lipschitzienne par rapport à x . **1point**
C-à-d il existe $C > 0$ indépendante de h telle que $\forall (t, x, h), (t, y, h) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times [0, h_0]$ on a

$$|\phi(t, x, h) - \phi(t, y, h)| \leq C|x - y| \quad (1point)$$

En effet

$$\begin{aligned} |\phi(t, x, h) - \phi(t, y, h)| &= |f(t + ah, x + ahf(t, x)) - f(t + ah, y + ahf(t, y))| \\ &\leq L|x + ahf(t, x) - (y + ahf(t, y))| \leq L|x - y| + ahL|f(t, x) - f(t, y)| \\ &\leq (L + ah_0L^2)|x - y| \end{aligned}$$

1point

Donc pour tout $a \in [0, 1]$, il existe $C = (L + ah_0L^2) > 0$ et indépendante de h telle que la fonction ϕ est Lipschitzienne. **0.5 point**

2. La consistance du schéma. Rappelons que le schéma est consistant ssi $\phi(t, x, 0) = f(t, x)$. **1point**
On a

$$\phi(t, x, 0) = f(t + 0, x + 0) = f(t, x)$$

ce qui donne que le schéma est consistant au moins d'ordre 1. **1point**

3. L'ordre du schéma. Pour déterminer l'ordre du schéma il faut calculer les dérivées partielles par rapport à h de ϕ au point $(t, x, 0)$. En effet

$$\begin{aligned} \partial_h \phi(t, x, h) &= \frac{\partial}{\partial h} f(t + ah, x + ahf(t, x)) \\ &= a \left(\partial_t f(t + ah, x + ahf(t, x)) + \partial_y f(t + ah, x + ahf(t, x)) f(t, x) \right) \end{aligned}$$

1.5point

donc pour $h = 0$, on trouve

$$\partial_h \phi(t, x, 0) = a \left(\partial_t f(t, x) + \partial_y f(t, x) \cdot f(t, x) \right) = af^{(1)}(t, x)$$

0.5 point

ce qui donne que le schéma est au moins d'ordre 2 ssi $a = \frac{1}{2}$ **1point**.

On teste maintenant est ce que l'ordre est exactement 2 ou plus grand ?

$$\begin{aligned} \partial_h^2 \phi(t, x, h) &= \frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}hf(t, x)) \right) \\ &= \partial_h \left(\frac{1}{2} \left(\partial_t f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}hf(t, x)) + \partial_y f(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}hf(t, x)) f(t, x) \right) \right) \end{aligned}$$

En utilisant la règle des chaîne et après des calculs, on trouve

$$\partial_h^2 \phi(t, x, 0) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) f^2(t, x) \right)$$

1point

D'autre part, on a

$$\frac{1}{3} f^{(2)}(t, x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) f^2(t, x) \right) \neq \partial_h^2 \phi(t, x, 0)$$

1point

Donc le schéma est exactement d'ordre 2 pour $a = \frac{1}{2}$. **0.5point**

Solution d'exercice 2 8points Soit le schéma multipas suivant :

$$x_{n+2} + (b-1)x_{n+1} - bx_n = \frac{h}{4} ((b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n); \text{ où } f_n = f(t_n, x_n). \quad (0.0.2)$$

1. Le schéma (0.0.2) est à 2 pas **1point**.
2. Si $b \neq -3$ le schéma est implicite, donc il est stable **1point**.
Sinon le schéma est explicite et dans ce cas on ne peut pas confirmer la stabilité avant d'étudier **0.5point**.
3. L'étude de l'ordre selon les valeurs de b . En utilisant le critère de l'ordre, l'ordre est p ssi

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{i=2} \alpha_i = 0; & \sum_{i=0}^{i=2} i \alpha_i = \sum_{i=0}^{i=2} \beta_i \\ \sum_{i=0}^{i=2} i^2 \alpha_i = 2 \sum_{i=0}^{i=2} i \beta_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{i=2} i^p \alpha_i = p \sum_{i=0}^{i=2} i^{p-1} \beta_i \end{cases} \quad (0.0.3)$$

1point

avec $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = b-1, \alpha_0 = -b$ et $\beta_2 = \frac{b+3}{4}, \beta_1 = 0, \beta_0 = \frac{3b+1}{4}$ **1point**

En effet

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{i=2} \alpha_i = 0; & \sum_{i=0}^{i=2} i \alpha_i = \sum_{i=0}^{i=2} \beta_i = b+1 \\ \sum_{i=0}^{i=2} i^2 \alpha_i = b+3 = 2 \sum_{i=0}^{i=2} i \beta_i \\ \sum_{i=0}^{i=2} i^3 \alpha_i = b+7 \quad \text{et} \quad 3 \sum_{i=0}^{i=2} i^2 \beta_i = 3b+9 \end{cases} \quad (0.0.4)$$

1.5points

pour que le schéma soit au moins d'ordre 3 il faut que $3b+9 = b+7$, donc $b = -1$ **1point**.

On teste l'ordre 4.

$$\sum_{i=0}^{i=2} i^4 \alpha_i = 14; \quad \text{et} \quad 4 \sum_{i=0}^{i=2} i^3 \beta_i = 16 \quad (0.0.5)$$

Combinant (0.0.4) et (0.0.5), on trouve le schéma (0.0.2) est exactement d'ordre 3 si $b = -1$ **1point**